ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

Βένιος Αγγελόπουλος
Ευστάθιος Βασιλείου
Αθανάσιος Γαγάτσης
Τίνα Ζορμπαλά
Ελισάβετ Καμπάνη
Διονύσης Λάππας
Τάσος Πατρώνης
Ανδρέας Πούλος
Αθανάσιος Σκούρας
Παναγιώτης Σπύρου
Χρόνης Στράντζαλος
Πέτρος Χαβιάρης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-236-7

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Με δεδομένη την υποτίμηση της Γεωμετρίας στο Λύκειο και το ασυνεχές του περιεχομένου σπουδών από βαθμίδα σε βαθμίδα εκπαίδευσης, ανακύπτουν ερωτήματα όπως: *γιατί να διδάσκεται η Γεωμετρία* στο ελληνικό σχολείο, *ποιά Γεωμετρία* πρέπει να διδάσκεται, *πώς πρέπει να διδάσκεται*, με *ποιό πρόγραμμα σπουδών* που θα διατρέχει τη "ραχοκοκαλιά" όλου του αναλυτικού προγράμματος σπουδών από το δημοτικό μέχρι το Λύκειο, κ.ά. Αυτά είναι μερικά από τα ερωτήματα που πραγματεύονται οι συγγραφείς του συλλογικού τόμου που κρατάτε στα χέρια σας.

Ο τόμος περιλαμβάνει μια συλλογή επιστημονικών άρθρων τα οποία προέκυψαν ως αποτέλεσμα σειράς διαλέξεων και Ημερίδας με θέμα την *Γεωμετρία και την διδακτική της στη σύγχρονη εκπαίδευση*, που διοργανώθηκαν πρόσφατα από την *Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*.

Οι συγγραφείς των άρθρων είναι έγκριτοι πανεπιστημιακοί (μαθηματικοί, παιδαγωγοί), εκπρόσωποι του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, υπεύθυνοι για τα Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών, αλλά και μάχιμοι εκπαιδευτικοί, τόσο της Δευτεροβάθμιας όσο και της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, με μεταπτυχιακές και διδακτορικές σπουδές και ερευνητικό έργο στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Θεωρούμε ότι το σύνολο των άρθρων χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία, επιστημονική εγκυρότητα και, το σημαντικότερο, αφορά στην ελληνική πραγματικότητα. Απευθύνεται δε τόσο στο σύνολο των εκπαιδευτικών, όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Παιδαγωγικών Τμημάτων, καθώς και σε ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Ευχαριστούμε θερμά τους συγγραφείς, τους Πανεπιστημιακούς Δασκάλους και τους Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για τη συνεισφορά τους

στο συλλογικό τόμο, τα μέλη της Ένωσης Τάσο Πατρώνη, Σωφρόνη Βαμβακούση και Πέτρο Χαβιάρη, που εργάστηκαν για την άρτια έκδοση αυτού του τόμου, καθώς και τον εκδοτικό οίκο Ζήτη, που στήριξε αυτήν την εκδοτική προσπάθεια.

Για την «**Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών**»[1]

Το Διοικητικό Συμβούλιο

[1] www.didamath.gr

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

> "Δεν μου αρέσουν οι ρητά ειπωμένες φιλοσοφίες (explicit philosophies), αλλά δεν μπορώ να κατανοήσω τους παιδαγωγούς παρά μονάχα αν κάνω ρητές τις υπονοούμενες (implicit) φιλοσοφίες τους."
>
> Hans Freudenthal, *Geometry between the Devil and the Deep Sea.*

Τα τελευταία χρόνια η "Διδακτική της Γεωμετρίας" έχει γίνει αντικείμενο σεμιναρίων, μεταπτυχιακών μαθημάτων και ενός τουλάχιστον Πανελληνίου επιστημονικού συνεδρίου.

Ο τόμος αυτός περιέχει τα κείμενα των εισηγήσεων στο Σεμινάριο με θέμα: *Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη σύγχρονη Εκπαίδευση*, που διεξήγαγε η Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών κατά το δεύτερο (εαρινό) εξάμηνο της ακαδημαικής χρονιάς 2008-2009.

Παρόλο που η Γεωμετρία έχει πολύ αγαπηθεί και συζητηθεί στον τόπο μας, παραμένει ο "παρίας" σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ως κυρίαρχη μαθηματική κουλτούρα έχει επιβληθεί αυτή των αριθμών και των υπολογισμών. Τα κείμενα που ακολουθούν φιλοδοξούν, το καθένα από την πλευρά του, να συμβάλουν σε μια αλλαγή αυτού του κλίματος. Επιπλέον η προσπάθειά μας αποσκοπεί στο να ενθαρρύνει τις αμφίδρομες επιδράσεις μεταξύ της επιστημολογίας των Μαθηματικών και της παιδαγωγικής θεωρίας και πράξης. Αποσκοπεί ακόμα στο να προωθήσει τη διεπιστημονικότητα, το διάλογο και την αλληλοκατανόηση μεταξύ των ενδιαφερομένων όλων των βαθμίδων της Εκπαίδευσης, καθώς και μεταξύ των "παλαιών" και των νεότερων εκπαιδευτικών. Η μονόπλευρη οπτική των "καθαρών" Μαθηματικών (αξιωματικά συστήματα), είτε της εκπαιδευτικής τεχνολογίας (δυναμικά περιβάλλοντα), είτε ακόμα μιας αφηρημένης "διδακτικής" γλώσσας, είναι ανεπαρκής. Καθεμιά από τις οπτικές αυτές μπορεί να είναι χρήσιμη σε ένα μακρύ και (ελπίζουμε) εποικοδομητικό διάλογο για τα σύνθετα παιδαγωγικά και επιστημολογικά προβλήματα της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Η θρυλούμενη απάντηση του Ευκλείδη στο βασιλιά της Αιγύπτου αποκτά, έτσι, στην εποχή μας ένα καινούργιο νόημα. Για τη διδασκαλία και μάθηση της Γεωμετρίας δεν υπάρχει "βασιλική οδός", ούτε θαυματουργά μέσα και εργαλεία. Η γεωμετρική παιδεία θα πρέπει να προχωρήσει ανάμεσα σε Συμπληγάδες, όπως αυτές της απόλυτης Λογοκρατίας και του Απλοϊκού Εμπειρισμού ("between the Devil and the Deep Sea"). Έτσι όπως το θέτει ο Freudenthal, το όλο πρόβλημα συνίσταται στην "οργάνωση της εξερεύνησης του χώρου" από το παιδί και τον έφηβο. Ο ρόλος του δασκάλου είναι εδώ λεπτός και καθοριστικός. Τα παιδιά δεν βλέπουν κατευθείαν από μόνα τους αυτά που περιμένουμε να δουν σ'ένα σχήμα, ούτε αποκτούν ως εκ θαύματος την εποπτεία του χώρου που έχουν οι ενήλικοι – και μάλιστα οι μαθηματικά μορφωμένοι. Από την άλλη μεριά, αν ο δάσκαλος επιβάλει απ' την αρχή τη δική του οπτική στους μαθητές, υπάρχει κίνδυνος να αποκλείσει ένα μεγάλο πλούτο εναλλακτικών ερμηνειών και αντιλήψεων από τον "ορίζοντά" τους.

Τα άρθρα αυτού του τόμου χωρίστηκαν, για μεθοδολογικούς λόγους, σε πέντε ενότητες, τις εξής:

1) Θεμελιώδη παιδαγωγικά και επιστημολογικά ζητήματα.
2) Πολιτισμική εξέλιξη και εξέλιξη της Γεωμετρίας.
3) Ιστορία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.
4) Σχεδιασμός και αναστοχασμός της εκπαιδευτικής εμπειρίας.
5) Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος στη διδασκαλία.

Το πρώτο κείμενο της πρώτης ενότητας βάζει τον αναγνώστη από την αρχή στον αγώνα του βαδίσματος ανάμεσα σε Συμπληγάδες, που εδώ εξειδικεύονται στο δογματικό φορμαλισμό και την τελείως μη-συστηματική, εμπειρική παρουσίαση των εννοιών της Γεωμετρίας. Ενάντια και στις δύο αυτές ακρότητες υποστηρίζεται ότι οι γεωμετρικές έννοιες έχουν διαφορετικές όψεις και ρόλους να παίξουν σε διαφορετικά συμφραζόμενα ή θεωρητικά πλαίσια. Ο Βένιος Αγγελόπουλος εισάγει και συζητά, στο κείμενο αυτό, τρία είδη ιστορικότητας των μαθηματικών εννοιών. Η προσέγγιση είναι ρηξικέλευθη, ταυτόχρονα επιστημολογική και παιδαγωγική και αναπτύσσεται "διαχρονικά" μέσα από το παράδειγμα της έννοιας της *γωνίας.*

Το ίδιο παράδειγμα χρησιμεύει, με αφορμή μια δογματική αποστροφή, ως τίτλος για το επόμενο κείμενο της ίδιας ενότητας. Στο κείμενο αυτό ο Τάσος Πατρώνης (με τη συνεργασία της Ματούλας Πετρόλια και του Μανώλη Γαλιουδάκη) επιχειρεί να εντάξει την Παιδαγωγική της Γεωμετρίας μέσα σε ένα ευρύτερο κοινωνικό και παιδαγωγικό πλαίσιο για τις επιλογές του "σήμερα". Έτσι επιχει-

ρείται να χαραχθεί ένας συμπληρωματικός άξονας συζήτησης σε σχέση με το προηγούμενο κείμενο. Στο δεύτερο μέρος του κειμένου εμπεριέχεται και η κριτική σε δύο πολύ γνωστά βιβλία εκλαϊκευτικού περιεχομένου για τα Μαθηματικά, όσον αφορά τα σχετικά με τη Γεωμετρία μέρη τους. Τέλος επιχειρείται ως παιδαγωγική επιλογή μια σύνθεση μεταξύ δύο διαφορετικών επιστημολογικών απόψεων για την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Αναζητώντας νέες φιλοσοφικές συνθέσεις και βαθύτερες συμβατότητες πέρα από τις ιδεολογικές αντιθέσεις και τις επιφανειακές διαφορές ή ομοιότητες, είναι δυνατό να οδηγηθούμε στην "αξιοποίηση" κοινών πλεονεκτημάτων, όσο και τη "θεραπεία" ή αποφυγή κοινών μειονεκτημάτων. Αυτό άλλωστε ισχυρίστηκε ότι έκανε ο Καρτέσιος, αναφορικά με τη συγκρότηση της ελληνικής Γεωμετρίας και της "βαρβαρικής" Άλγεβρας, δημιουργώντας ως σύνθεση μεταξύ τους τη δική του *Geometrie*. Μια ανάλογη φιλοσοφική αναζήτηση στην εποχή μας αφορά το γενικό πρόβλημα της συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης (τουλάχιστον σε σχέση με τις παιδαγωγικές του διαστάσεις). Για παράδειγμα, ένα κοινό σημείο μεταξύ του "Πλατωνικού" Ρεαλισμού, του Ενορατισμού του Brouwer και του Ριζοσπαστικού Κονστρουκτιβισμού του von Glasersfeld φαίνεται να είναι η ανεπαρκής εξήγηση του αποφασιστικού ρόλου της *γλώσσας*, όσο και του ιστορικού χαρακτήρα της "*διυποκειμενικότητας*" (και *διακειμενικότητας* ανάμεσα στα μαθηματικά κείμενα διαφορετικών εποχών.). Ποιά θα μπορούσε να είναι, στο σημείο αυτό, η συνεισφορά της Χουσσερλιανής *Προέλευσης της Γεωμετρίας* και των σύγχρονων μελετητών της όπως ο Jacques Derrida; Στα δύσκολα (και δυσπρόσιτα για το μη-φιλοσοφικά ενήμερο αναγνώστη) όσο και θεμελιώδους σημασίας, αυτά ερωτήματα έρχεται να συμβάλει το κείμενο του Παναγιώτη Σπύρου, με το οποίο κλείνει ο κύκλος της πρώτης ενότητας του παρόντος τόμου.

Η δεύτερη ενότητα του παρόντος τόμου περιλαμβάνει δύο κείμενα που έχουν κάποια κοινά σημεία, αλλά διαφέρουν στο βασικό τους προσανατολισμό. Το πρώτο (αλφαβητικά) κείμενο του Στάθη Βασιλείου ασχολείται με τη νεότερη εξέλιξη της Διαφορικής Γεωμετρίας (από τον Gauss και μετά), δίνοντας έμφαση στην αφηρημένη δομή που χαρακτηρίζει μια "διαφορική πολλαπλότητα", με παραδείγματα από την κλασσική γεωμετρία και τη νεότερη φυσική. Το κείμενο του Χρόνη Στράντζαλου αντιστοιχίζει τρεις "συνολικές πολιτισμικές αιχμές" της ιστορίας της ανθρωπότητας (Ελληνική αρχαιότητα, Αναγέννηση και Βιομηχανική Επανάσταση) με αντίστοιχες "αλλαγές Παραδείγματος" στη Γεωμετρία. Το κείμενο επικεντρώνεται τελικά στις εξελίξεις που αντιστοιχούν στην τρίτη "πολιτισμική αιχμή" και συγκεκριμένα (1) στις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες, (2) στη (νεότερη) Διαφορική Γεωμετρία και τα Δυναμικά Συστήματα και (3) στη σύγ-

χρονη θεμελίωση της Ευκλείδειας, όσο και της Ουδέτερης ή Απόλυτης Γεωμετρίας.

Η τρίτη ενότητα αφορά την ιστορία των σχολικών εγχειριδίων Γεωμετρίας και περιλαμβάνει μόνο το κείμενο της Κωνσταντίνας Ζορμπαλά, σχετικά με την αξιωματική πραγμάτευση της Γεωμετρίας στα Γερμανικά εγχειρίδια του 19^{ου} αιώνα. Όπως φαίνεται από την ιστορική αυτή έρευνα, ο στόχος της διδασκαλίας δεν εμπόδισε τους συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων να διαμορφώσουν μια μαθηματική αντίληψη ανάλογη μ' αυτή του Hilbert και να γίνουν πρόδρομοι των Pasch, Hilbert και Peano στο ζήτημα της μοντέρνας αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας.

Η επόμενη ενότητα εισηγήσεων διακρίνεται από προβληματισμό, σκέψεις και κρίσεις σχετικά με το σχεδιασμό ή την αποτίμηση της όλης εκπαιδευτικής διαδικασίας (αναλυτικά προγράμματα, σχολικά βιβλία και διδακτικές πρακτικές) στο μάθημα της Γεωμετρίας.

Το κείμενο του Διονύση Λάππα είναι, με ελάχιστες απαραίτητες επεμβάσεις, ο ίδιος ο απομαγνητοφωνημένος προφορικός λόγος της εισήγησής του (έχει κι αυτός ο λόγος τη δική του χάρη). Σκέψεις που διέπονται από μια κριτική ανησυχία για την ελληνική πραγματικότητα της εκπαίδευσης, για το σχεδιασμό του αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας και κυρίως για όσα πράγματα και αξίες της εκπαίδευσης τείνουν να εκλείψουν εξαιτίας της κουλτούρας, της πληροφορικής και της "πληροφόρησης" στην εποχή που ζούμε.

Ιδιαίτερα η τύχη των γεωμετρικών κατασκευών, που αποτελούν ένα από τα παραδοσιακά στοιχεία της μαθηματικής κουλτούρας που απειλείται, εξετάζεται στο επόμενο κείμενο της ίδιας ενότητας, που ανήκει στον Αντρέα Πούλο. Οι γεωμετρικές κατασκευές ουσιαστικά *δεν διδάσκονται* στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, γεγονός που η εκπαιδευτική κοινότητα θα πρέπει επιτέλους να αντιμετωπίσει και να πάρει θέση με συνέπεια και υπευθυνότητα. Στο κείμενο συζητείται ένα διδακτικό πείραμα σε τάξη και αναφέρονται συστηματικά όλες οι σχετικές θεωρητικές και πειραματικές ελληνικές προσεγγίσεις των τελευταίων χρόνων στο θέμα.

Στην ίδια ενότητα, η φωνή του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου προσθέτει τη δική της αντιθετική νότα. Ο Θανάσης Σκούρας, από τους υπεύθυνους συμβούλους για τα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών, υπερασπίζεται τη βασική επιλογή του Π.Ι. για το Γυμνάσιο: το χωρισμό της ύλης της Γεωμετρίας από την αντίστοιχη ύλη της "Άλγεβρας", ένα γεγονός που (με εξαίρεση τη Γ΄ Γυμνασίου, με το "αξέχαστο" βιβλίο του Γ. Ιωαννίδη) περίμενε πάνω από 40 χρόνια μέχρι να ξανασυμβεί.

Η ενότητα συνεχίζεται με τη δεύτερη εισήγηση του Χρόνη Στράντζαλου ("Η Γεωμετρία ως πολιτισμικό αγαθό και ως διδακτικό αντικείμενο στο Λύκειο"), όπου προτείνεται η αναβάθμιση και ο εμπλουτισμός του μαθήματος της Γεωμετρίας για όλες τις τάξεις του Λυκείου. Η μελέτη της Γεωμετρίας βοηθάει τους μαθητές να υπερβούν την άμεση εποπτεία βαδίζοντας προς το αφηρημένο και τους ωθεί να πειθαρχούν τη σκέψη τους σε δεδομένα πλαίσια. Η Γεωμετρία από τη φύση της μπορεί να γίνει το κατ'εξοχήν μάθημα παροχής στοιχείων παιδείας στην προ-πανεπιστημιακή εκπαίδευση.

Το κείμενο του Πέτρου Χαβιάρη, τελευταίο (κατ' αλφαβητική σειρά) αυτής της ενότητας, θέτει σημαντικά ζητήματα σχετικά με το ρόλο της Γεωμετρίας κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Οι ασυνέπειες στο σχεδιασμό και την εφαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων, των σχολικών εγχειριδίων και των πρακτικών διδασκαλίας της Γεωμετρίας από βαθμίδα σε βαθμίδα σε σχέση με τις σύγχρονες προσεγγίσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών οδηγούν στην αναζήτηση ενός κοινού πλαισίου αντιλήψεων και πρακτικών για τη Μαθηματική Εκπαίδευση σε όλες τις βαθμίδες.

Η Πέμπτη και τελευταία ενότητα του τόμου αυτού αφορά στο ρόλο του γεωμετρικού σχήματος στη διδασκαλία της Γεωμετρίας και ξεκινά με την εισήγηση της Ελισάβετ Καμπάνη, όπου επισημαίνεται η κρισιμότητα της γνωστικής λειτουργίας της απόδοσης ρόλων στα γεωμετρικά σχήματα και στα στοιχεία αυτών κατά την επίλυση προβλημάτων στο μάθημα της Γεωμετρίας. Η γνωστική ανάλυση από τους εκπαιδευτικούς των ενεργειών των μαθητών τους καθώς αυτοί αποδίδουν συγκεκριμένους ρόλους στα σχήματα και η απόκτηση από τους ίδιους τους μαθητές διαδικασιών παρακολούθησης και ελέγχου των ενεργειών τους πρέπει να αποτελέσουν βασικούς στόχους στη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

Η ενότητα αυτή ολοκληρώνεται με το κείμενο του Αθανάσιου Γαγάτση, το οποίο εστιάζει στην εξέλιξη της εννοιολογικής κατανόησης επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων από μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπ/σης. Τα ερευνητικά δεδομένα που παρουσιάζονται ενισχύουν την αντίληψη του Duval σχετικά με τις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη λειτουργική κατανόηση του σχήματος και οδηγούν στην αναγκαιότητα να αποδίδεται κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας έμφαση σε όλες τις διαστάσεις κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος και στα είδη τροποποίησής του.

Στα πλαίσια του σεμιναρίου έγινε άλλη μια διάλεξη με θέμα: «Γεωμετρία παίζοντας και φιλοσοφώντας» από τον καθηγητή του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης Πάρι Πάμφιλο.

Στη διάλεξη αυτή ο Πάρις Πάμφιλος παρουσίασε, με βάση συγκεκριμένα θεωρήματα και προβλήματα, τις διδακτικές δυνατότητες του προγράμματος δυναμικής Γεωμετρίας *EucliDraw,* το οποίο έχει κατασκευάσει ο ίδιος, και πώς αυτό μπορεί να βάλει το μαθητή ή τον φοιτητή σε ένα «παιχνίδι» νόησης και φαντασίας. Καθώς όμως, όπως είπε ο ίδιος, το «παιχνίδι» αυτό είναι *συνεργατικό,* απαιτεί και τη συλλογική συμμετοχή των μαθητών- φοιτητών, αλλιώς χαλάει …

Η διάλεξη αυτή όμως δεν μπορεί να αποδοθεί χωρίς τη ζωντανή χρήση του προγράμματος, γι αυτό και δεν συμπεριλαμβάνεται στον τόμο.

Οι επιμελητές αυτού του τόμου:

Τάσος Πατρώνης,

Σωφρόνης Βαμβακούσης,

Πέτρος Χαβιάρης

Μέρος 1

Θεμελιώδη παιδαγωγικά
και επιστημολογικά ζητήματα

Πλούτος και ιστορικότητα των μαθηματικών εννοιών: Το παράδειγμα της γωνίας[1]

Βένιος Αγγελόπουλος

Περίληψη

Ασχολούμαστε με τον πλούτο και την ιστορικότητα των μαθηματικών ιδεών και εξειδικεύουμε τις θεωρήσεις μας με το παράδειγμα της *γωνίας*. Με τον πλούτο χαρακτηρίζουμε τις διαφορετικές όψεις ενός δοσμένου όρου σε διακριτά μεταξύ τους θεωρητικά συμφραζόμενα, καθώς και τους ποικίλους διαφορετικούς ρόλους που μπορεί να αναλάβει. Οι θεωρήσεις της *ιστορικότητας* οδηγούν στη διάκριση μεταξύ της συνολικής (δημόσιας) ιστορίας της μαθηματικής επιστήμης και της υποκειμενικής ιστορίας της μάθησης των Μαθηματικών από κάθε άτομο, καθώς και τη διάκριση μεταξύ των παραπάνω και ενός είδους δομικής, άχρονης (ή συγχρονικής) “ιστορικότητας”, η οποία ενσωματώνει όλες τις τρέχουσες αναδιατυπώσεις των Μαθηματικών. Κάθε μαθηματική ιδέα προσαρμόζεται σ’αυτές τις θεωρήσεις και μπορεί να μελετηθεί σχετικά.

1. Έννοιες και σύμβολα

Είναι γενικά παραδεκτό πως τα Μαθηματικά ασχολούνται με σύμβολα και με έννοιες. Τα δύο αυτά συνδέονται: τα σύμβολα χρησιμεύουν για να αποδώσουν τις έννοιες, είναι κατά κάποιον τρόπο συντομογραφίες. Με τον ίδιο τρόπο που οι έννοιες αποδίδονται γραπτά στις διάφορες γλώσσες: η έννοια «δέντρο» αποδίδεται από το σύμβολο (σύμπλεγμα γραμμάτων, λέξη) *δέντρο* στα ελληνικά, το *tree*

[1] Στα πλαίσια της σειράς των διαλέξεων της Επιστημονικής Ένωσης για την Διδακτική των Μαθηματικών έδωσα μια σχεδόν ομότιτλη διάλεξη, στις 15/1/2009 - και επωφελούμαι εδώ για να ευχαριστήσω τους οργανωτές για την πρόσκλησή τους. Το κείμενο που ακολουθεί βασίζεται σ’ αυτήν, είναι όμως αρκετά τροποποιημένο: Θεώρησα σκόπιμο να αναπτύξω περισσότερο το γενικό μέρος, οπότε, χάριν συντομίας, παρέλειψα το δεύτερο παράδειγμα που αφορούσε τον κύκλο. Στην τελική γραφή με βοήθησαν κάποιες παρατηρήσεις του Άρη Αραγεώργη, τον οποίον επίσης ευχαριστώ.

στα αγγλικά, το αντίστοιχο ιδεόγραμμα στα κινέζικα. Η έννοια, σε πρώτη προσέγγιση τουλάχιστον, μπορεί να είναι η ίδια σε διάφορες γλώσσες, ενώ ο ήχος που τη συμβολίζει παρουσιάζει μεγάλη ποικιλομορφία – και η γραφή επίσης[2].

Η σχέση έννοιας και συμβόλου στα Μαθηματικά είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, αλλά δεν θα είναι το αντικείμενο αυτής της ομιλίας. Γι' αυτό θα είμαι τελείως περιληπτικός, κυρίως για να εξηγήσω γιατί εστιάζω στις έννοιες και όχι στα σύμβολα.

Υπέρ της θέσης ότι οι έννοιες προηγούνται ενώ τα σύμβολα έπονται[3], αρκούν δύο λόγοι: αφενός διότι αυτό συμβαίνει στο προεπιστημονικό στάδιο των Μαθηματικών, είτε στις γλώσσες που δεν διαθέτουν γραφή, είτε στην προσχολική ηλικία όπου μαθαίνει κανείς να μετράει με τα δάχτυλα πολύ πριν διδαχθεί τα σύμβολα «1,2,3,…». Αφετέρου, διότι ενώ όλα τα σύμβολα παριστάνουν έννοιες, υπάρχουν έννοιες που δεν παρασταίνονται με σύμβολα. Για παράδειγμα, η έννοια της *συνάρτησης*: υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν όνομα και θεσμοθετημένο σύμβολο (διπλάσιο, αντίθετο, αντίστροφο, ημιδιπλάσιο, εκθετική, συνημίτονο, κτλ.), όπως ακριβώς και αριθμοί (1, 2, π, ½, i, κτλ.). Λέμε και γράφουμε «*η συνάρτηση Φ*», και κατόπιν «*η Φ*», όπου το σύμβολο «*Φ*» συμβολίζει *κάποια* συνάρτηση, είτε απροσδιόριστη (πρόκειται δηλαδή για μια μεταβλητή που παίρνει τιμές σε κάποιο σύνολο συναρτήσεων), είτε καθορισμένη εντός κειμένου, π.χ. διπλάσιο συν πέντε, ή $\Phi(x)=2x+5$ όχι όμως την έννοια «συνάρτηση». Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο, αφού ονομάζουμε ένα σκύλο «*Φλοξ*», μετά λέμε «*ο Φλοξ*» και δεν εννοούμε ο σκύλος εν γένει.

Ας μη θεωρηθεί ότι τα παραπάνω δηλώνουν ότι είμαστε *εναντίον* των συμβόλων. Κάτι τέτοιο θάταν τουλάχιστον γελοίο. Τα σύμβολα είναι απαραίτητα. Από τη στιγμή μάλιστα που οι στοιχειώδεις αρχές της λογικής έχουν κωδικοποιηθεί ικανοποιητικά, ο έλεγχος των μαθηματικών αποδείξεων είναι στην ουσία ένας απλός συντακτικός (δηλαδή μηχανικός, αυτοματοποιημένος, αλγοριθμικός) έλεγ-

---

[2] Προφανώς το ίδιο συμβαίνει και με τους φυσικούς αριθμούς, το μηδέν, ή τα κλάσματα, η γραφή των οποίων από γλώσσα σε γλώσσα διαφέρει.

[3] Έπονται συνήθως, όχι πάντα: κάποιες φορές, εισάγονται συντομογραφίες ως υπολογιστικά τεχνάσματα, και η ισχύς τους είναι τέτοια ώστε οδηγούν σε νέες έννοιες, στην *προϊστορία* των οποίων φυσιολογικά εντάσσονται: Τέτοια παραδείγματα είναι οι φανταστικοί αριθμοί ή οι γενικευμένες συναρτήσεις – κατανομές, για τις οποίες οι συντομογραφίες $i=\sqrt{-1}$ και δ (η «συνάρτηση» του Dirac) προηγούνται χρονικά. Με τη σειρά τους τότε, οι έννοιες δίνουν διαφορετική υπόσταση στα σύμβολα, τα φωτίζουν με άλλο τρόπο, τρόπο που δίνει απάντηση σε μετα-μαθηματικά ερωτήματα (όπως: *Επιτρέπεται να γράψεις ρίζα του μείον ένα;*), αναδιατυπώνοντάς τα. Με άλλα λόγια, σε αρκετές περιπτώσεις, η σχέση έννοιας-συμβόλου είναι πολύ λιγότερο απλή απ' ότι πιστεύεται, είναι σχέση *διαλεκτική*.

χος[4]. Και εφόσον αποδεχτούμε ότι το περιεχόμενο μιας θεωρίας είναι το άπειρο σύνολο των προτάσεων που παράγονται από τις αρχικές, τηρώντας τους συντακτικούς κανόνες και με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, έχουμε Μαθηματικά ανεξάρτητα από κάθε νοηματικό περιεχόμενο, τα οποία όμως είναι πολύ αμφίβολο αν εντάσσονται στη σφαίρα της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Δεν νομίζω ότι ο παραπάνω «καθαρός φορμαλισμός» οδηγεί πουθενά. Αν πάρουμε κατά γράμμα τη δήλωση του Χίλμπερτ, ότι η Γεωμετρία για να είναι ορθή, πρέπει να παραμένει ορθή αν αντικαταστήσουμε τις έννοιες *σημείο*, *ευθεία*, *επίπεδο* με *μπυροπότηρα*, *καρέκλες*, *τραπέζια*, καταλήγουμε σε προτάσεις του τύπου «*Τρία μπυροπότηρα ορίζουν ένα και μόνο ένα τραπέζι, εκτός αν ανήκουν στην ίδια καρέκλα*», κάτι που μάλλον στερείται ενδιαφέροντος. *Η αξία του φορμαλισμού δεν έγκειται στο ότι μια θεωρητική δομή μπορεί να αναπαραχθεί σα χαλκομανία ανεξαρτήτως νοήματος*. Αντίθετα, *έγκειται στο ότι την ίδια δομή τη συναντάμε σε διαφορετικά εννοιολογικά υποστρώματα, επιτρέποντας έτσι γενικεύσεις και αλληλουχίες γενικεύσεων*. Για παράδειγμα, άλλο τα μήκη, άλλο οι γωνίες, άλλο οι μιγαδικοί, άλλο οι συναρτήσεις. Όλα αυτά όμως μπορούν να προστεθούν, άρα η πρόσθεση είναι κοινή δομή σε διαφορετικά εννοιολογικά πεδία. Η κοινή δομή αναδεικνύεται εκ των υστέρων, και μπορεί να αναζητηθεί κατόπιν και αλλού.

2. Έννοιες στην κοινή γλώσσα και στα Μαθηματικά

Τα Μαθηματικά αναπτύσσονται ως επιστήμη μέσα στη γλώσσα, στην κάθε γλώσσα. Από την άλλη, κάθε γλώσσα περιέχει μαθηματικές έννοιες σε προεπιστημονικό επίπεδο[5] (αριθμούς, σχήματα, συγκρίσεις μεγεθών, κτλ), οι οποίες συχνότατα χρησιμοποιούνται αυτούσιες ως *λέξεις* στη μαθηματική θεωρία. Βεβαίως, στη μαθηματική επιστήμη οι νέοι όροι εισάγονται με τη σέσουλα, οπότε είτε χρησιμοποιούνται νεολογισμοί (όπως πληθάριθμος, λογάριθμος, ερμιτιανός, κτλ.) είτε δανεικές λέξεις από τη γλώσσα, αλλά με σαφώς διαφορετικό περιεχόμενο: Τα επίθετα *πραγματικός*, *φανταστικός*, *μιγαδικός*, έχουν τελείως διαφορετι-

[4] Βεβαίως στην πράξη αυτό ποτέ δεν τηρείται ακριβώς, γιατί οι αποδείξεις γράφονται για να διαβάζονται από ανθρώπους και όχι από μηχανές, και (σχεδόν) ποτέ δεν είναι πλήρως τυποποιημένες.

[5] Μπορούμε να δώσουμε ως συμβατικό ορόσημο της συγκρότησης των Μαθηματικών ως επιστήμη τα Στοιχεία του Ευκλείδη, έχοντας υπόψη ότι είναι η κατάληξη μιας διαδικασίας περίπου δύο αιώνων, κατά τους οποίους αφενός οργανώθηκε το σύστημα όρων, προτάσεων και αποδείξεων (δηλαδή η μαθηματική θεωρία), αφετέρου η μαθηματική γνώση έπαψε να είναι προνόμιο κλειστών ομάδων και εγκαταστάθηκε στο δημόσιο λόγο.

κή σημασία όταν προσδιορίζουν αριθμούς σε μαθηματικές προτάσεις, απ' ότι στην κοινή γλώσσα[6].

Αλλά ακόμα κι εκεί όπου τα Μαθηματικά υιοθετούν άμεσα προϋπάρχοντες όρους, όπως *ευθεία*, *πρόσθεση*, *κύκλος*, οι έννοιες αυτές υπόκεινται σε διαφορετικούς περιορισμούς από την κοινή γλώσσα: «ένας πλακουτσός κύκλος», «ένα μεταλλικό τρίγωνο», «ένα μαύρο εννιά», είναι εκφράσεις γλωσσικά παραδεκτές ενώ μαθηματικά στερούνται νοήματος.

Αυτό, γιατί στη γλώσσα το περίγραμμα των εννοιών δεν είναι ποτέ απολύτως προσδιορισμένο και μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με διάφορους παράγοντες, όπως τα συμφραζόμενα. Μπορεί επίσης να αλλοιώνεται με σχήματα λόγου, μέχρι σημείου να σημαίνει ακριβώς το αντίθετο από τη συνηθισμένη χρήση: Τι σημαίνει το «ωραία» στη φράση «Ωραία μας τα 'πες», ιδίως αν συνοδεύεται από ένα «δεν πας στο διάολο, λέω γω»;

Αντίθετα, στα μαθηματικά, κάθε έννοια έχει αυστηρά προσδιορισμένο περιεχόμενο, είτε είναι πρωταρχική, είτε εισαγόμενη με ορισμό[7]. Οι ιδιότητες κάθε έννοιας και οι συσχετίσεις της με άλλες είτε δίνονται εξαρχής, είτε αποδεικνύονται. Η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων και συσχετίσεων συνιστά τη μαθηματική πρακτική. Η χρήση επομένως των εννοιών νοείται μόνον μέσα στα πλαίσια της δοσμένης μαθηματικής θεωρίας.

Καθώς η χρήση των εννοιών στα Μαθηματικά υπόκειται στους περιορισμούς που επιβάλλουν οι κανόνες, η εμβέλειά τους είναι κατά κάποιο τρόπο μικρότερη, η δυναμική τους κατά κάποιον τρόπο φτωχότερη απ' ότι στην κοινή γλώσσα. Αυτό όμως δεν είναι απόλυτο. Εκτός από τελείως τετριμμένες θεωρίες (π.χ. ένα μαθηματικό σύμπαν με ένα μόνο στοιχείο), υπάρχει συνήθως αρκετό υλικό, ώστε στην ανάπτυξη της θεωρίας κάποιες έννοιες να χάνουν βασικά δομικά τους χαρακτηριστικά, και τελικά να σημαίνουν κάτι διαφορετικό απ' ότι αρχικά σήμαιναν. Πιο γνωστό ως παράδειγμα, η έννοια του αριθμού, που αρχικά σήμαινε «φυσικός αριθμός», και αντίστοιχα του λόγου που ήταν αρχικά νοητός ως ρητός, και με την επέλαση του $\sqrt{2}$ (και όλων των ασυμμέτρων στη συνέχεια) τινάχτηκε στον αέρα. Μέχρι σημείου σήμερα η λέξη «αριθμός» να μην είναι κοινά αποδεκτός μαθημα-

---

[6] Στην κοινή γλώσσα το «μιγαδικός» μεταφράζεται αγγλικά complex, που σημαίνει «σύνθετος» ή «πολύπλοκος».

[7] Θα περιοριστούμε εδώ στις έννοιες που έχουν λειτουργική θέση στη μαθηματική θεωρία, στους *μαθηματικούς όρους*, για να ακριβολογήσουμε. Σίγουρα, λέξεις όπως «γεωμετρία», «σχήμα», «υπολογισμός», μπορούν να θεωρηθούν μαθηματικές έννοιες, έχουν περιγραφικό – βοηθητικό χαρακτήρα, και τις χρησιμοποιούμε αρκετά στην πράξη. Η μελέτη τους όμως εδώ θα μας ξεστράτιζε πολύ.

τικός όρος αν δεν συνοδεύεται από ένα προσδιοριστικό επίθετο. Παρόμοιο φαινόμενο θα διαπιστώσουμε διεξοδικότερα παρακάτω στο παράδειγμα της γωνίας. Και επειδή μεγάλο μέρος της μαθηματικής παραγωγής συνίσταται στη μελέτη εναλλακτικών ιδιοτήτων, τέτοια φαινόμενα κάθε άλλο παρά περιθωριακά είναι.

Θα ήταν τελείως άγονο να θεωρηθούν οι μαθηματικές έννοιες ως περιορισμένες στον ορισμό τους. Αρκεί να δούμε πως, όχι μόνο μια έννοια μπορεί να επιδέχεται διαφορετικούς ορισμούς ισοδύναμους μεταξύ τους (οπότε επιλέγεται ο ένας και κάθε άλλος συνιστά αναγκαία και ικανή συνθήκη), αλλά και ένα πλέγμα εννοιών μπορεί να αλλάξει σειρά: Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία, το *τρίγωνο* μπορεί να οριστεί βάσει τριών σημείων ή τριών ευθειών. Επίσης, μπορεί να εισαχθεί ως πρωταρχική έννοια η ευθεία και να οριστεί κατόπιν το ευθύγραμμο τμήμα ως υποσύνολό της, ή αντίστροφα, το ευθύγραμμο τμήμα ως πρωταρχικό και η ευθεία ως προέκτασή του. Ως συναφής πρωταρχική έννοια αντί αυτών θα μπορούσε να εισαχθεί και η ημιευθεία (δεν έχω υπόψη μου τέτοιες θεωρήσεις, αλλά είναι σαφώς διατυπώσιμες)[8]. Προφανώς η επιλογή κάποιας εκδοχής από αυτές σε τίποτα δεν επηρεάζει τη μετέπειτα ανάπτυξη της θεωρίας[9].

Εφόσον λοιπόν οι μαθηματικές έννοιες καθορίζονται από το σύνολο των συσχετίσεών τους εντός θεωρίας, και μπορεί καθεμία, ανάλογα με το πλαίσιο, να παίξει διαφορετικούς ρόλους, είναι ακριβέστερο να πούμε πως η ποικιλία και ο πλούτος της μαθηματικής έννοιας είναι όχι φτωχότερος, αλλά *μη συγκρίσιμος* με αυτόν της γλωσσικής. Πράγματι, ενώ στα μαθηματικά δεν επιτρέπονται σχήματα λόγου έξω από την κυριολεξία, όταν μία έκφραση υφίσταται αλλοίωση νοήματος, αυτή πολιτογραφείται και συνοδεύει πλέον την έννοια, παρότι, σε ειδικές περιπτώσεις, η έννοια μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί με το αρχικό της νόημα. Αντίθετα, στη γλώσσα, παρόλο που υπάρχει η ευφημιστική αντίφραση «Εύξεινος Πόντος» αντί «αφιλόξενη θάλασσα», ουδέποτε το «εύξεινος» απέκτησε τη σημασία «αφιλόξενος», πάντα συνέχισε να σημαίνει «φιλόξενος».

---

[8] [Σημ. των επιμελητών] Σε μια τέτοια περίπτωση η *ευθεία* θα μπορούσε να οριστεί ως η συνολοθεωρητική ένωση δύο (κατάλληλων) ημιευθειών, ενώ το *ευθύγραμμο τμήμα* ως η συνολοθεωρητική τομή τους.

[9] Εκτός από τους άμεσα ανταλλάξιμους ορισμούς, όπως σ' αυτά τα παραδείγματα, έχουμε και φαινόμενα όπου διαφορετικοί ορισμοί χρησιμοποιούνται σε διαφορετικά πλαίσια για την ίδια έννοια: Το ζητούμενο είναι πλέον η αντιστοίχιση των διαφορετικών πλαισίων – όπως π.χ. της κλασσικής με την αναλυτική Γεωμετρία, με ορισμούς της ίδιας καμπύλης είτε από τις γεωμετρικές της ιδιότητες είτε από τη μορφή της εξίσωσής της.

3. Ιστορικότητα των μαθηματικών εννοιών

Η ένταξη των Μαθηματικών εννοιών σε μια θεωρία οδηγεί αναγκαστικά στην αποδοχή της ιστορικότητάς τους, και μάλιστα μιας ιστορικότητας τριπλής. Η πρώτη εκδοχή είναι η *συλλογική* ή *δημόσια* ιστορικότητα, αυτό που αποκαλούμε «Ιστορία των Μαθηματικών», και που συνιστά την εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης στα πλαίσια μιας κοινότητας, ενός πολιτισμού, μεταξύ πολιτισμών ή και στο σύνολο της ανθρωπότητας. Μια δεύτερη ιστορικότητα είναι η *υποκειμενική* ιστορικότητα, που έχει να κάνει με την ανάπτυξη της μαθηματικής θεωρίας, την κατανόηση και τη χρήση της στο μυαλό του κάθε ανθρώπου (που ποικίλει σε έκταση: για κάποιους σταματάει στην πρόσθεση, για άλλους φτάνει μέχρι τα πιο σκληρά θεωρήματα), και προφανώς σχετίζεται άμεσα με τη διδασκαλία[10].

Εκτιμώ ότι μπορούμε να θεωρήσουμε και μια ιστορικότητα άλλου τύπου, *δομική* και *άχρονη*. Πράγματι, σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μια μαθηματική κοινότητα (ή ένας άνθρωπος που καταπιάνεται με τα Μαθηματικά) έχει υπόψη της τη δεδομένη θεωρία, με τα αποτελέσματά της και τα ανοιχτά της προβλήματα, πάνω στην οποία δουλεύει. Η θεωρία αυτή έχει μια δομή, που καθορίζεται από τις συνεπαγωγές και τις ισοδυναμίες. Αλλά μία συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ σημαίνει ότι το Α προηγείται του Β μέσα στη δομή της θεωρίας, ανεξάρτητα αν το Α έχει διατυπωθεί πρώτο στον ιστορικό χρόνο ή όχι (προκειμένου για ένα άτομο, ανεξάρτητα του ποιο έμαθε πρώτα, το Α ή το Β). Κλασσικό παράδειγμα, η θεμελίωση της Αριθμητικής βάσει της Συνολοθεωρίας, όπου η διατύπωση της Θεωρίας Συνόλων ήταν ιστορικά κατά πολύ μεταγενέστερη της Αριθμητικής, κάτι που δεν εμπόδισε καθόλου τον Γκάους ή τον Φερμά να κάνουν ότι έκαναν. Δομική και χρονική ιστορικότητα δεν είναι κατ’ ανάγκη ταυτόσημες.

Δεδομένου ότι υπάρχουν συνεπαγωγές διπλής κατεύθυνσης, δηλαδή ισοδυναμίες, αυτές αντιστοιχούν στην ιστορική συγχρονία. Αλλά εκτός απ’ αυτό υπάρχουν και έννοιες ή αποτελέσματα που δεν μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με αλυσσίδα βελών συνεπαγωγής (π.χ., δύο γωνίες μπορεί να έχουν κοινή κορυφή ανεξάρτητα από το αν είναι ίσες ή όχι). Ενώ δηλαδή ο χρόνος θεωρείται ως ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο στιγμών, μία «ευθεία», μέσα στον οποίο συμβαίνουν τα γεγονότα σε αλληλουχία (ενδεχομένως με επικαλύψεις, δηλαδή συγχρονικά), η δομή μιας θεωρίας μοιάζει περισσότερο με ένα προσανατολισμένο και χρωματι-

[10] Ο Χάμιλτον ορίζει τα κουατέρνια χωρίς να χρησιμοποιεί την έννοια του διανυσματικού χώρου. Με τα σημερινά δεδομένα, αυτό πουθενά δεν συμβαίνει. Δημόσια και υποκειμενική ιστορικότητα διαφέρουν.