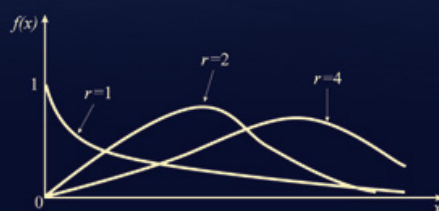
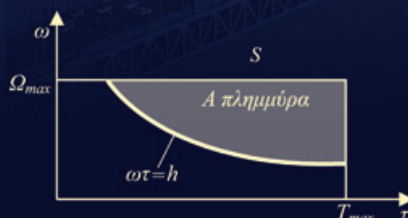


Γιώργος Χ. Ζιούτας

Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς



3^η Έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

Οι απαντήσεις των προβλημάτων για λύση βρίσκονται στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
www.ziti.gr/docs/pdf/1530_lyseis.pdf

ISBN 978-960-456-421-7

© Copyright, 3^η έκδοση, Απρίλιος 2014, Ζιούτας Χ. Γιώργος, Εκδόσεις Ζήτη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993) όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία

**Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία**

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18^ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαιάς
Τ.Θ. 4171 • Περαιά Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:

Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Ο μηχανικός πρέπει να συνεχίσει να βελτιώνει την ποιότητα της δουλειάς του εάν επιθυμεί να είναι ανταγωνιστικός στην αγορά της χώρας του και γενικότερα της Ευρώπης. Μία σημαντική αναλογία σε αυτήν την ποιοτική βελτίωση διαμορφώνεται από τους μηχανικούς, επειδή αυτοί είναι οι ειδικοί που σχεδιάζουν και αναπτύσσουν νέα κατασκευαστικά συστήματα και διαδικασίες που βελτιώνουν τα υπάρχοντα συστήματα. Οι πιθανότητες και η στατιστική είναι σπουδαία εργαλεία σε αυτές τις δραστηριότητες, επειδή προμηθεύουν τον μηχανικό και με τα δύο αναλυτικές και περιγραφικές μεθόδους, οι οποίες διαπραγματεύονται με την αβεβαιότητα των παρατηρούμενων δεδομένων.

Οι απρόβλεπτες εξελίξεις σε διάφορα φαινόμενα και γενικότερα οι αβεβαιότητες στον σχεδιασμό τεχνικών συστημάτων και άλλων κατασκευαστικών έργων είναι αναπόφευκτες. Είναι αναγνωρισμένο ότι οι έννοιες και μέθοδοι των πιθανοτήτων και στατιστικής συντελούν στην αξιολόγηση των επιπτώσεων των στοχαστικών φαινομένων και του κλίματος της αβεβαιότητας στην συμπεριφορά των τεχνικών συστημάτων. Η πιθανοθεωρία προσφέρει την μεθοδολογία για ανάπτυξη μοντέλων που μετρούν την αβεβαιότητα και αξιολογούν τις επιπτώσεις της στον σχεδιασμό έργων και τεχνικών συστημάτων. Η στατιστική ανάλυση παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη μοντέλων τεχνικών συστημάτων και την αξιολόγηση της συμπεριφοράς των σε περιβάλλον αβεβαιότητας, καθώς και στην εξισορρόπηση ρίσκου και ωφελειών που σχετίζονται με την λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

Πιθανότητες και Στατιστική είναι *μαθήματα* που περιλαμβάνουν έννοιες και μεθόδους όχι αρκετά εύκολες για τους φοιτητές της πολυτεχνικής σχολής. Για να αντεπεξέλθουμε αυτή την δυσκολία, μεγάλη έμφαση αποδίδεται στον τρόπο διδασκαλίας και εμπέδωσης αυτών των εννοιών. Στόχος αυτού του βιβλίου είναι να κάνει ευκολότερο για τους μηχανικούς φοιτητές την κατανόηση και αφομοίωση των πιθανοτήτων και στατιστικής. Αυτό το βιβλίο θα τους βοηθήσει να ανακαλύψουν πως αυτά τα θέματα σχετίζονται με τα ενδιαφέροντά τους

και τους είναι άμεσα χρειαζόμενα επειδή αυτό γράφθηκε ειδικότερα για τα προβλήματα του μηχανικού.

Θα μπορούσε κανείς να θέσει το ερώτημα γιατί γράφθηκε ένα νέο βιβλίο ειδικά για μηχανικούς. Πρώτον, υπάρχει ειδικότερη σπουδαιότητα των μεθόδων πιθανοτήτων και στατιστικής στις εφαρμογές του μηχανικού, όπως κατασκευές, εδαφομηχανική, υδρολογικές μελέτες, συγκοινωνιακή τεχνική, μόλυνση περιβάλλοντος. Για παράδειγμα, μοντέλα αξιοπιστίας συστημάτων, κατανομές πιθανοτήτων, διαφορετικές συνθήκες δεδομένων και άλλα απαιτούν διαφορετικές προσεγγίσεις. Δεύτερον, παλαιότερα βιβλία παραλείπουν ειδικά σπουδαία και μοντέρνα προβλήματα μηχανικού και αντί αυτού επικεντρώνονται πολλές φορές σε άλλα θέματα τα οποία μπορεί να μην έχουν άμεση σχέση με τον σύγχρονο μηχανικό. Για παράδειγμα, σήμερα έμφαση δίνεται όχι μόνο στην αξιοπιστία μιας κατασκευής αλλά και στην προφύλαξη του περιβάλλοντος.

Αυτό το βιβλίο είναι μία εισαγωγή για το μάθημα της πιθανοθεωρίας και στατιστικής στους φοιτητές πολυτεχνείου ή και άλλων επιστημών, Ενώ οι περισσότερες από τις μεθόδους που παρουσιάζουμε είναι βασικές και ουσιώδεις για πιθανοκρατική και στατιστική ανάλυση και σε άλλες κατευθύνσεις, όπως οικονομολόγους, φυσικούς, κοινωνιολόγους κ.τ.λ., επιλέξαμε την επικέντρωση περισσότερο σε μηχανικά προσανατολισμένα ενδιαφέροντα. Πιστεύουμε ότι αυτή η προσέγγιση θα εξυπηρετήσει καλύτερα τους μηχανικούς φοιτητές και θα τους συναρπάσει σε πολλές εφαρμογές των πιθανοτήτων και στατιστικής στην περιοχή τους. Έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια τα περισσότερα από τα παραδείγματα, ασκήσεις και προβλήματα να είναι μηχανικού περιεχομένου από τον πραγματικό κόσμο, τα οποία πάρθηκαν από μία μοντέρνα βιβλιογραφία εφαρμογών πιθανοτήτων και στατιστικής για μηχανικούς ή και από την δική μου εμπειρία εφαρμογής μεθόδων πιθανοτήτων και στατιστικής σε προβλήματα μηχανικού.

Πιστεύω ότι οι μηχανικοί όλων των κατευθύνσεων θα έπρεπε να πάρουν τουλάχιστον ένα μάθημα στις πιθανότητες και στατιστική. Ατυχώς, λόγω και άλλων υποχρεώσεών τους οι περισσότεροι μηχανικοί παίρνουν μόνο το βασικό μάθημα πιθανοτήτων και στατιστικής. Η ύλη αυτού του βιβλίου επικεντρώνεται περισσότερο στην μεθοδολογία των πιθανοτήτων και δεν καλύπτει όλη την ύλη του μαθήματος. Ένα δεύτερο βιβλίο που αναπτύσσει αναλυτικότερα την περιγραφική στατιστική καθώς και συμπερασματική στατιστική κρίνεται απαραίτητο για την κάλυψη του μαθήματος αυτού.

Έχει διατηρηθεί ένα σχετικά μικρό μαθηματικό υπόβαθρο κυρίως στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας των πιθανοτήτων. Φοιτητές οι οποίοι έχουν συμπλη-

ρώσει το πρώτο μέρος σε ολοκληρωτικό λογισμό δεν έχουν καμία δυσκολία στην κατανόηση όλων των κεφαλαίων αυτού του βιβλίου. Βασικά, η πρόθεσή μου είναι να δώσω στον αναγνώστη την μάθηση και κατανόηση της μεθοδολογίας και πώς να την εφαρμόσει στα προβλήματα του μηχανικού. Οι αναγκαίες μαθηματικές βάσεις της θεωρίας των πιθανοτήτων αναπτύσσονται μόνο στα ουσιώδη αξιώματα, θεωρήματα και βασικούς κανόνες. Οι απαραίτητες μαθηματικές αποδείξεις περιορίζονται στο ελάχιστο. Όμως, θα συμβούλευα τον αναγνώστη να ακολουθήσει τις όποιες αποδείξεις συναντά για πληρέστερη κατανόηση των εννοιών και μεθόδων των πιθανοτήτων και στατιστικής.

Η επεξήγηση της μεθοδολογίας συνοδεύεται και από τις υποθέσεις που γίνονται. Τονίζονται ιδιαίτερα οι ορισμοί, και σε πολλές περιπτώσεις σημειώνονται οι περιορισμοί και γίνονται παρατηρήσεις για να αποφευχθούν τυχών παγίδες ή άλλες παρερμηνείες στις έννοιες των πιθανοτήτων. Ακόμη, σε πολλούς κανόνες ή αποτελέσματα δίνεται η πρακτική τους ερμηνεία προκειμένου να τα κατανοήσει και χρησιμοποιήσει ο μηχανικός στις δικές του εφαρμογές.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του βιβλίου είναι η πολύ καλή επιλογή παραδειγμάτων, ασκήσεων και προβλημάτων μηχανικού. Στα τρία πρώτα κεφάλαια δίνονται και οι λύσεις με λεπτομερή επεξήγηση σε αρκετές ασκήσεις και προβλήματα. Έτσι, οι φοιτητές αποκτούν γνώση και ικανότητα πριν ασχοληθούν περαιτέρω με άλλτες ασκήσεις ή προβλήματα μηχανικού.

Το βασικότερο μέρος του παρόντος βιβλίου αναφέρεται στα κεφάλαια 2, 3, 4, 5, 6, 7, και 8. Στο κεφάλαιο 2 και 3 αναπτύσσεται το υπόβαθρο της πιθανοθεωρίας που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο μηχανικός για την εκτίμηση πιθανότητας πραγματοποίησης στοχαστικών γεγονότων. Χρησιμοποιώντας τα βασικά αξιώματα, θεωρήματα και κανόνες καταλήγουμε στην ολική πιθανότητα και θεώρημα του Bayes. Ο αναγνώστης είναι απαραίτητο να κατανοήσει πλήρως το δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο τόσο γιατί αναφέρεται σε βασικές έννοιες των πιθανοτήτων, όσο γιατί αποτελεί και τον πυρήνα στις μεθόδους πιθανοτήτων και στατιστικής που θα ακολουθήσουν.

Ακολουθούν τα κεφάλαια 4, 5, 6 και 7 που διευρύνουν το υπόβαθρο των πιθανοτήτων, πολύ βασικό για την κατανόηση της ανάπτυξης της στατιστικής μεθοδολογίας. Τα κεφάλαια αυτά, καλύπτουν τις βασικές έννοιες για τις τυχαίες μεταβλητές και τις απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν για να ακολουθούν τις χρήσιμες κατανομές πιθανοτήτων. Ορίζονται οι σπουδαιότερες κατανομές πιθανοτήτων και αναφέρονται οι ιδιότητές των που σχετίζονται με τις διάφορες εφαρμογές του μηχανικού.

Το κεφάλαιο 1 είναι εισαγωγικό στην περιληπτική παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων με πίνακες συχνοτήτων ή ιστογράμματα, και την χρησιμότητα των πιθανοτήτων και στατιστικής στις εφαρμογές του μηχανικού. Το κεφάλαιο 8 είναι επίσης εισαγωγικό στην συμπερασματική στατιστική. Σχετίζεται με την γενίκευση των δειγματικών συμπερασμάτων στον πληθυσμό και αναφέρεται κυρίως στην κατανόηση των διαφορών εκτιμητριών καθώς και την ερμηνεία των βασικότερων ιδιοτήτων τους.

Στη συνέχεια, το κεφάλαιο 9 αναφέρεται στον έλεγχο υποθέσεων, ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος στην λήψη αποφάσεων σε προβλήματα όπου η αξιοπιστία των τιμών των παραμέτρων και η συγκρισή τους μεταξύ διαφορετικών πληθυσμών παίζει σημαντικό ρόλο. Τέλος, στο κεφάλαιο 10 περιγράφεται η ανάλυση παλινδρόμησης. Τα περισσότερα προβλήματα μηχανικού ή άλλων επιστημών σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με κάποιο μοντέλο παλινδρόμησης. Με την ανάλυση παλινδρόμησης διερευνάται κατά πόσο είναι δυνατόν να αναπτυχθούν αξιόπιστα μοντέλα πρόβλεψης με βάση την συσχέτιση μεταξύ δύο ή και περισσότερων μεταβλητών

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2014,

Ο συγγραφέας

Περιεχόμενα

1	Περιβάλλον Αβεβαιότητας και ο Ρόλος των Πιθανοτήτων και Στατιστικής στις Εφαρμογές Μηχανικού	13
1.1	Εισαγωγή	15
1.2	Προκαταρκτική Ανάλυση Δεδομένων	17
1.3	Γραφική Παρουσίαση Δεδομένων	18
1.4	Περίληπτική Αριθμητική Παρουσίαση Δεδομένων	22
1.4.1	Μετρήσεις Κεντρικής Τάσης	22
1.4.2	Μετρήσεις Διασποράς και Ασυμμετρίας	24
1.5	Δεδομένα Παρατηρούμενα κατά Ζεύγη	25
1.6	Μελέτη και Λήψη Απόφασης κάτω από Αβεβαιότητα	28
1.6.1	Εφαρμογές των Πιθανοτήτων και Στατιστικής στα Τεχνικά Έργα	29
1.7	Περίληψη Κεφαλαίου	33
2	Βασικές Έννοιες Πιθανότητας	35
2.1	Αβεβαιότητα, Τυχαία Διαδικασία και Συναφείς Έννοιες	37
2.1.1	Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα	37
2.1.2	Δειγματοχώρος και Δειγματοσημεία	38
2.1.3	Σύνθετος Δειγματοχώρος	41
2.1.4	Γεγονότα	43
2.2	Πράξεις και Σχέσεις Γεγονότων	46
2.2.1	Πράξεις Γεγονότων	46
2.2.2	Ασυμβίβαστα Γεγονότα ή Αμοιβαίως Αποκλειόμενα	48
2.2.3	Κανόνες Πράξεων Γεγονότων	50
2.3	Χώρος Γεγονότων – Δυναμοσύνολο	53
2.4	Η Έννοια της Πιθανότητας	54
2.4.1	Κλασσική Θεωρία	54
2.4.2	Θεωρία Σχετικής Συχνότητας	57
2.4.3	Υποκειμενική Θεωρία	58
2.5	Αξιώματα και Θεωρήματα Πιθανότητας	59

2.6	Αρχές Απαρίθμησης	67
2.6.1	Ο Κανόνας του Γινομένου	68
2.6.2	Μεταθέσεις	69
2.6.3	Συνδυασμοί	73
2.6.4	Μεταθέσεις (όταν όλα τα αντικείμενα δεν είναι ίδια)	76
2.7	Περίληψη Κεφαλαίου	78
	<i>Λυμένες Ασκήσεις</i>	80
	<i>Ασκήσεις για Λύση</i>	83
	<i>Λυμένα Προβλήματα Μηχανικού</i>	85
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	88
3	Δεσμευμένη Πιθανότητα.	
	Ολική Πιθανότητα – Θεώρημα Bayes.	
	Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες	93
3.1	Υπό Συνθήκη ή Δεσμευμένη Πιθανότητα	95
3.2	Ολική Πιθανότητα	104
3.3	Θεώρημα Bayes	109
3.4	Στατιστική Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες	112
3.4.1	Στατιστικά Ανεξάρτητα Γεγονότα	112
3.4.2	Ανεξάρτητα και Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Γεγονότα	117
3.5	Περίληψη Κεφαλαίου	119
	<i>Λυμένες Ασκήσεις</i>	121
	<i>Ασκήσεις για Λύση</i>	126
	<i>Λυμένα Προβλήματα Μηχανικού</i>	129
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	151
4	Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής	
	Πιθανότητας	159
4.1	Έννοια Τυχαίας Μεταβλητής	161
4.2	Συναρτήσεις Μάζας ή Πυκνότητας Πιθανότητας	166
4.2.1	Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή	166
4.2.2	Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή	169
4.3	Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας	174
4.3.1	Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή	175
4.3.2	Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή	176
4.3.3	Ιδιότητες Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής $F(x)$	178

4.4	Μικτή Τυχαία Μεταβλητή.....	182
4.5	Περίληψη Κεφαλαίου	186
	<i>Λυμένες Ασκήσεις.....</i>	187
	<i>Ασκήσεις για Λύση.....</i>	191
	<i>Λυμένα Προβλήματα Μηχανικού.....</i>	194
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	201
5	Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών.....	205
5.1	Μέση Τιμή.....	207
5.2	Διακύμανση	215
5.3	Τυπική Τυχαία Μεταβλητή.....	219
5.4	Ανισότητα Chebyshev	220
5.5	p -Ποσοστιαίο Σημείο, Διάμεσος, Επικρατέστερη Τιμή	222
5.6	Άλλες Παράμετροι και Ροπές	224
5.7	Περίληψη Κεφαλαίου	226
	<i>Λυμένες Ασκήσεις.....</i>	227
	<i>Ασκήσεις για Λύση.....</i>	231
	<i>Λυμένα Προβλήματα Μηχανικού.....</i>	233
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	241
6	Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.....	245
6.1	Η Κατανομή Bernoulli.....	248
6.2	Η Διωνυμική Κατανομή	250
6.3	Η Γεωμετρική Κατανομή.....	256
6.4	Η Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (Pascal).....	261
6.5	Η Υπεργεωμετρική Κατανομή	264
6.6	Διαδικασία Poisson.....	268
	6.6.1 Κατανομή Poisson	268
	6.6.2 Η Poisson σαν μία Προσέγγιση στην Διωνυμική Κατανομή	274
6.7	Πολυωνυμική Κατανομή	278
6.8	Σχέσεις μεταξύ Διακριτών Κατανομών.....	280
6.9	Περίληψη Κεφαλαίου	284
	<i>Ασκήσεις για Λύση.....</i>	285
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	290

7	Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Συνεχή Τυχαία Μεταβλητή	301
7.1	Ομοιόμορφη Κατανομή	304
7.2	Εκθετική Κατανομή	309
7.3	Κατανομές Erlang και Γάμμα	316
7.4	Κανονική Κατανομή (Normal ή Gauss)	320
7.4.1	Τυπική Κανονική Κατανομή	325
7.4.2	Κανονική Προσέγγιση στην Διωνυμική και Poisson Κατανομή	329
7.5	Λογαριθμο-Κανονική Κατανομή	331
7.6	Βήτα Κατανομή	336
7.7	Περίληψη Κεφαλαίου	337
	Ασκήσεις για Λύση	338
	Προβλήματα Μηχανικού για Λύση	346
8	Εκτίμηση Παραμέτρων	361
8.1	Ο Ρόλος της Συμπερασματικής Στατιστικής	363
8.2	Τυχαία Δειγματοληψία	367
8.2.1	Δειγματικές Παρατηρήσεις – Τυχαίο Δείγμα	367
8.2.2	Στατιστικό Δείγματος	370
8.3	Εκτιμητήρια Συνάρτηση – Εκτιμητές	371
8.3.1	Σημειακή Εκτίμηση	372
8.3.2	Μέθοδοι Σημειακής Εκτίμησης	376
8.4	Εκτίμηση Διαστήματος Εμπιστοσύνης	380
8.4.1	Δειγματικό Λάθος	380
8.4.2	Διάστημα Εμπιστοσύνης	381
8.4.3	Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Μέση Τιμή μ	384
8.4.4	Μονόπλευρο Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Μέση Τιμή μ	393
8.4.5	Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Διακύμανση σ_X^2	394
8.4.6	Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Αναλογία p	396
8.5	Περίληψη Κεφαλαίου	398
	Προβλήματα Μηχανικού για Λύση	399
9	Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων	409
9.1	Εισαγωγή	411
9.1.1	Υποθέσεις	411
9.1.2	Στατιστικό Ελέγχου και Σφάλματα Απόφασης	412
9.1.3	Επίπεδο Σημαντικότητας και Περιοχή Απόρριψης	413

9.1.4	Σχέσεις Σφαλμάτων Ι και ΙΙ.....	415
9.1.5	Διαδικασία Στατιστικού Ελέγχου.....	417
9.2	Έλεγχος Υποθέσεων για την Μέση Τιμή	417
9.2.1	Γνωστή η Διακύμανση	418
9.2.2	Έλεγχος σημαντικότητας, p -τιμή.....	427
9.2.3	Χαρακτηριστική Λειτουργική Συνάρτηση και Δύναμη Ελέγχου ...	430
9.2.4	Άγνωστη η Διακύμανση – Το t -test.....	436
9.3	Έλεγχος Ισότητας Μέσων Τιμών	441
9.3.1	Γνωστή Διακύμανση, Κανονική Κατανομή.....	441
9.3.2	Άγνωστη η Διακύμανση, Κανονική Κατανομή.....	446
9.3.3	Ο Ζευγαρωτός t -έλεγχος.....	451
9.4	Στατιστικός Έλεγχος για την Διακύμανση	454
9.4.1	Έλεγχος Ισότητας Διακυμάνσεων δύο Πληθυσμών.....	456
9.5	Στατιστικός Έλεγχος Αναλογίας (Bernoulli Κατανομή).....	459
9.5.1	Έλεγχος Διαφοράς Αναλογιών (Πληθυσμών Bernoulli).....	462
9.6	Περίληψη Κεφαλαίου	464
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	467

10 Γραμμική Παλινδρόμηση 473

10.1	Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση	476
10.2	Εκτίμηση των Συντελεστών Παλινδρόμησης.....	481
10.2.1	Δειγματική Διακύμανση της Παλινδρόμησης.....	488
10.3	Εξαγωγή Στατιστικών Συμπερασμάτων για τους Συντελεστές Παλινδρόμησης.....	490
10.3.1	Ιδιότητες των εκτιμητών ελαχίστων Τετραγώνων.....	490
10.3.2	Εκτίμηση Διαστημάτων Εμπιστοσύνης και Στατιστικός Έλεγχος	493
10.4	Συντελεστής Προσδιορισμού και Ανάλυση Διακύμανσης στην Γραμμική Παλινδρόμηση	506
10.5	Συσχέτιση.....	509
10.6	Μετασχηματισμός σε Γραμμική Παλινδρόμηση.....	512
10.7	Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση	520
10.7.1	Ιδιότητες των Εκτιμητών Ελαχίστων Τετραγώνων	524
10.7.2	Διαστήματα Εμπιστοσύνης για την Πρόβλεψη.....	527
10.7.3	Έλεγχος για την Σημαντικότητα Παλινδρόμησης	530
10.8	Κριτήρια για Επιλογή Μεταβλητών	538
10.9	Συμπερασματικά Σχόλια.....	541
	<i>Προβλήματα Μηχανικού για Λύση</i>	543

Παράρτημα**Πίνακες Στατιστικής..... 549**

1. Διωνυμικοί πίνακες..... 551
2. Πίνακες Poisson..... 555
3. Αθροιστική Τυπική Κανονική Κατανομή 562
4. Αθροιστική Τυπική Κατανομή 563
5. Ποσοστιαία Σημεία $\chi^2_{a,v}$ της χ -τετραγώνου Κατανομής..... 564
6. Ποσοστιαία Σημεία $t_{a,v}$ της t -student Κατανομής..... 565

Λύσεις**των Ασκήσεων και των Προβλημάτων 567**

Ελληνική βιβλιογραφία 627

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία..... 628

Ευρετήριο όρων..... 629

1 Περιβάλλον Αβεβαιότητας και ο Ρόλος των Πιθανοτήτων και Στατιστικής στις Εφαρμογές Μηχανικού

Περιγραφή Κεφαλαίου

- 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ
 - 1.2 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ
 - 1.3 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ
 - 1.4 ΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ
 - 1.4.1 Μετρήσεις Κεντρικής Τάσης
 - 1.4.2 Μετρήσεις Διασποράς και Ασυμμετρίας
 - 1.5 ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕΝΑ ΚΑΤΑ ΖΕΥΓΗ
 - 1.6 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ
 - 1.7 ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ
-

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γενικά η **στατιστική** σχετίζεται με διάφορες μεθόδους για την διεξαγωγή πληροφοριών από δεδομένα τα οποία εμπεριέχουν στοιχεία τύχης. Σε όλες τις δραστηριότητες, οι μηχανικοί έχουν να αντιμετωπίσουν αβεβαιότητες. Αντοχή πίεσης τσιμέντου, ισχύς ατσαλιού, πυκνότητα κυκλοφορίας, βροχόπτωση, ροή ποταμού, πίεση λαδιού, τάση ρεύματος, καθίζηση εδάφους, και πολλά άλλα μεταβάλλονται από περίπτωση σε περίπτωση για άγνωστους λόγους ή προέρχονται από παράγοντες που δεν μπορούν να προσδιορισθούν με ακρίβεια. Παρόλα αυτά, τα σχέδια και οι κατασκευές πρέπει να ολοκληρωθούν λαμβάνοντας υπόψη την **τυχειότητα** της φύσης.

Οι καταλληλότερες μέθοδοι για να αντιμετωπίσουμε την αβεβαιότητα ποικίλουν με την περίπτωση. Εξαρτάται κυρίως από την διασπορά των διαθέσιμων δεδομένων. Μερικά φαινόμενα μπορεί να έχουν αμελητέα ή χαμηλή μεταβλητότητα. Στην περίπτωση αυτή, η μέση τιμή από τις παρατηρήσεις του παρελθόντος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένας κανόνας, για παράδειγμα, η ελαστικότητα σιδηροδοκών. Όμως, συχνά, η μεταβλητότητα στις παρατηρήσεις είναι πολύ ουσιώδης. Μερικές φορές, ο μηχανικός για λόγους ασφαλείας στα σχέδιά του χρησιμοποιεί τις ακραίες τιμές για ασφάλεια, την μέγιστη απορροή σε μία καταιγίδα, την συμπιεστική αντοχή του τσιμέντου, την μέγιστη καθίζηση σε ένα τόπο. Με άλλα λόγια, στην πράξη εκφράζει την ικανότητα του κάθε εξαρτήματος στο σύστημα κατασκευής έτσι ώστε το σύστημα να αντέχει σε ένα προκαθορισμένο βάρος που είναι γνωστό σαν **συντελεστής ασφάλειας** (factor of safety), και τον καλύπτει σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, η **καθοριστική** (deterministic) αντιμετώπιση μπορεί να οδηγήσει σε απρόβλεπτες και δυσάρεστες καταστάσεις, διότι υπάρχουν αμφιβολίες ως προς την μέγιστη απορροή της καταιγίδας, την μέγιστη καθίζηση, την ελάχιστη αντοχή του τσιμέντου, κ.τ.λ., ανάλογα με την περίπτωση. Αυτά δεν μπορούμε εύκολα να τα παρακάμψουμε όταν υπάρχει μεταβλητότητα που θα μπορούσε να αποβεί καταστροφική. Επί πλέον, μια καθοριστική αντιμετώπιση, λαμβάνοντας υπόψη τους συντελεστές ασφάλειας, δεν είναι οικονομικά αποδεκτή. Γι' αυτό είναι φανερό ότι, ο μηχανικός όταν παίρνει αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας πρέπει να ζυγοσταθμίσει το ρίσκο με το οικονομικό όφελος που μπορεί να προκύψει. Προφανώς, το μέγεθος του **ρίσκου** και το **ισοζύγισμα** με το οικονομικό όφελος σε τέτοιες περιπτώσεις εκτιμάται με την μεθοδολογία των πιθανοτήτων και στατιστικής.

Εκτός από την μεταβλητότητα των χαρακτηριστικών των υλικών, του εδάφους, και έντασης καιρικών φαινομένων, υπάρχουν και πολλά στοχαστικά φαινόμενα ή γεγονότα, των οποίων η εξέλιξη είναι απρόβλεπτη και ενδεχομένως να επιδράσει καταστροφικά σε ένα σύστημα υπό κατασκευή. Όπως, σεισμός, τυφώνας, ελαττωματικά υλικά απεργία εργαζομένων, και άλλα. Η **ποσιτοκοποίηση** της αβεβαιότητας και η εκτίμηση των επιδράσεων της στις μελέτες και σχέδια του μηχανικού πρέπει να περιλαμβάνει έννοιες και μεθόδους των πιθανοτήτων. Επί πλέον λήψη αποφάσεων κάτω από κίνδυνο περιλαμβάνουν την χρήση εφαρμοσμένης πιθανότητας.

Ειδικά για τους μηχανικούς η μοντέρνα στατιστική έχει μία ειδική σημασία. Ο όρος στατιστική σχετίζεται με την διεξαγωγή αριθμητικής μαρτυρίας που βοηθά στην λήψη απόφασης σε συνθήκες αβεβαιότητας. Έτσι, η στατιστική για τους μηχανικούς ακολουθεί εκείνες τις μεθόδους και διαδικασίες οι οποίες επιτρέπουν την ερμηνεία αριθμητικών δεδομένων σε δράση. Ένας ορισμός του όρου στατιστική, στον μηχανικό χώρο, είναι η ανάλυση αριθμητικών δεδομένων με σκοπό την **λήψη απόφασης** ή διεξαγωγή πληροφορίας κάτω από **συνθήκες αβεβαιότητας**.

Ένας τομέας της στατιστικής είναι η περιγραφική στατιστική. Η **περιγραφική στατιστική** σχετίζεται με την συλλογή αριθμητικών δεδομένων και διεξαγωγή πληροφοριών με την περιληπτική παρουσίασή τους, με γραφικές παραστάσεις ή εκτίμηση σημαντικών παραμέτρων κεντρικής τάσης και διασποράς. Αλλά κύριος σκοπός της στατιστικής εδώ είναι η **γενίκευση** των συμπερασμάτων του **δείγματος** στον **πληθυσμό**, και ο τομέας αυτός είναι γνωστός σαν **συμπερασματική στατιστική**.

Λογικά, οι δειγματικές εκτιμήσεις ή πληροφορίες από την περιγραφική στατιστική διαφέρουν από αυτές του πληθυσμού. Η συμπερασματική στατιστική επικεντρώνεται στην ποιότητα της γενίκευσης των συμπερασμάτων για τον πληθυσμό χρησιμοποιώντας δειγματικά δεδομένα. Καμία δειγματική εκτίμηση ή πληροφορία δεν ταυτίζεται με τις αντίστοιχες του πληθυσμού, αλλά η τεχνική της στατιστικής συγκεντρώνεται να διατηρήσει το **δειγματικό σφάλμα** σε ανεκτά όρια. Οι μέθοδοι της στατιστικής που συντελούν στην τυχαιότητα του δείγματος και την ποσοτικοποίηση του δειγματικού σφάλματος στηρίζονται στις έννοιες της πιθανοθεωρίας. Γι' αυτόν τον λόγο, αυτό το βιβλίο επικεντρώνεται κυρίως στην πιθανοθεωρία και τις εφαρμογές της. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι, όλα τα στατιστικά συμπεράσματα από το δείγμα στον πληθυσμό και ο κίνδυνος και η αξιοπιστία της λήψης απόφασης κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας αξιολογούνται ή εκτιμούνται δια μέσου της εφαρμοσμένης πιθανότητας.

1.2 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Μία φυσική διαδικασία, καθώς και πειραματικές διαδικασίες ενδέχεται να περιέχουν μεταβλητότητα. Για παράδειγμα στις πειραματικές παρατηρήσεις τα αποτελέσματα διαφέρουν από παρατήρηση σε παρατήρηση παρόλα που το πείραμα επαναλαμβάνεται πάντα κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Υπάρχει διακύμανση στις παρατηρούμενες τιμές, ενώ μερικές μπορεί να εμφανίζονται συχνότερα, άλλες σπανιότερα κ.τ.λ.. Οι πολιτικοί μηχανικοί για παράδειγμα γνωρίζουν ότι οι τιμές των **χαρακτηριστικών** όπως η καθίζηση του εδάφους, η αντοχή θραύσης του τσιμέντου, η αντοχή των συγκολλήσεων, η ροή αυτοκινήτων σένα δρόμο, το μέγεθος της πλημμύρας και πολλά άλλα έχουν μία πλατιά διακύμανση. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε μία φυσική αλλαγή των ιδιοτήτων, διαφορές στην αλληλοεπίδραση των συστατικών ενός υλικού, περιβαλλοντικούς παράγοντες, ή άλλες αιτίες.

Για να αντιμετωπίσει την αβεβαιότητα ο μηχανικός πρέπει πρώτα να πάρει για το **χαρακτηριστικό** που τον ενδιαφέρει ένα τυχαίο **δείγμα** τιμών. Με βάση το δείγμα και την εφαρμογή των πιθανοτήτων και στατιστικής σε περιγραφικό στάδιο, παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες. Όμως, για την λήψη απόφασης απαιτούνται συμπεράσματα ή πληροφορίες σχετικά με τον **πληθυσμό**, δηλαδή το ευρύτερο σύνολο απ' όπου πάρθηκε το δείγμα. Για παράδειγμα, όταν παίρνετε ένα **δείγμα** σιδηροδοκών και δοκιμάζετε την αντοχή τους, σας ενδιαφέρει κυρίως η διεξαγωγή συμπερασμάτων για την αντοχή του μεγαλύτερου συνόλου (**πληθυσμού**) σιδηροδοκών που θα χρησιμοποιήσετε σε ένα κατασκευαστικό έργο.

Ένα δείγμα τιμών ή **σύνολο δεδομένων** αποτελείται από ένα σύνολο **παρατηρήσεων** ή μετρήσεων του **χαρακτηριστικού** που διερευνούμε. Οι ποσότητες που μετράμε καλούνται **μεταβλητές**, επειδή η τιμή του χαρακτηριστικού μεταβάλλεται από στοιχείο σε στοιχείο του πληθυσμού. Ακόμη, επειδή αυτή η μεταβλητότητα είναι τυχαία οι μεταβλητές αναφέρονται ως **τυχαίες μεταβλητές**. Για παράδειγμα, η κάθε σιδηροδοκός είναι ένα **στοιχείο** (μονάδα) του πληθυσμού, η **αντοχή** της είναι ένα από τα χαρακτηριστικά της που ενδιαφέρει τον μηχανικό και επειδή η τιμή της αντοχής δεν είναι σταθερή από δοκό σε δοκό αναφέρεται σαν **τυχαία μεταβλητή**. Η μορφή της μεταβλητότητας καλείται **κατανομή**.

Έχοντας ένα δείγμα τιμών για κάποιο χαρακτηριστικό, ο μηχανικός δεν μπορεί να βγάλει άμεσα συμπέρασμα για την κατανομή των τιμών. Για παράδειγμα, από ένα δείγμα 100 τιμών για την αντοχή ενός τύπου δοκών, χωρίς άλλη επεξεργασία του δείγματος δεν είναι εύκολη η διεξαγωγή πληροφοριών για την

μέση αντοχή των δοκών, την ομοιογένεια των δοκών, την μεταβλητότητα και άλλα. Για να διεξάγει κανείς χρήσιμες πληροφορίες ή άλλα χαρακτηριστικά για την αντοχή των δοκών πρέπει να τα οργανώσει σε μία περιληπτική αλλά πληροφοριακά περιεκτική φόρμα.

1.3 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Οι γραφικές τεχνικές παρέχουν μία πολύ καλή μέθοδο για να αντιληφθούμε την μεταβλητότητα και τις ιδιότητες ενός συνόλου δεδομένων. Η διαδικασία ακολουθεί τα εξής βήματα:

- προσδιορισμός του **πεδίου τιμών** και **εύρους** αυτού, [ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή],
- διαμέριση του εύρους αυτού σ' ένα σχετικά μικρό αριθμό **κλάσεων** (ομάδων),
- και τέλος στον προσδιορισμό των **συχνοτήτων** των αντίστοιχων κλάσεων, δηλαδή το πλήθος των δεδομένων που ανήκουν σε κάθε κλάση.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι γραφικών παραστάσεων, **διαγράμματα** γραμμών, **ιστογράμματα** και **πολυγωνικές γραμμές**, η πιο αντιπροσωπευτική είναι το ιστόγραμμα των συχνοτήτων. Σε αυτό ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το πεδίο τιμών της μεταβλητής που διερευνά ο μηχανικός, το οποίο χωρίζεται σε τμήματα αντίστοιχα των κλάσεων. Ορθογώνια τμήματα σχεδιάζονται έχοντας σαν βάσεις τις αντίστοιχες κλάσεις και ύψος τις αντίστοιχες συχνότητες. Το πιο ψηλό τμήμα δείχνει σε ποια περιοχή συναντούμε τις περισσότερες τιμές (μεγαλύτερη συχνότητα) της μεταβλητής. Ακόμη, από τα ύψη των άλλων ορθογωνίων τμημάτων διαφαίνεται αν οι τιμές του δείγματος σκορπίζονται συμμετρικά στο πεδίο τιμών της μεταβλητής, καθώς και άλλα χαρακτηριστικά αυτής.

Παράδειγμα 1.1

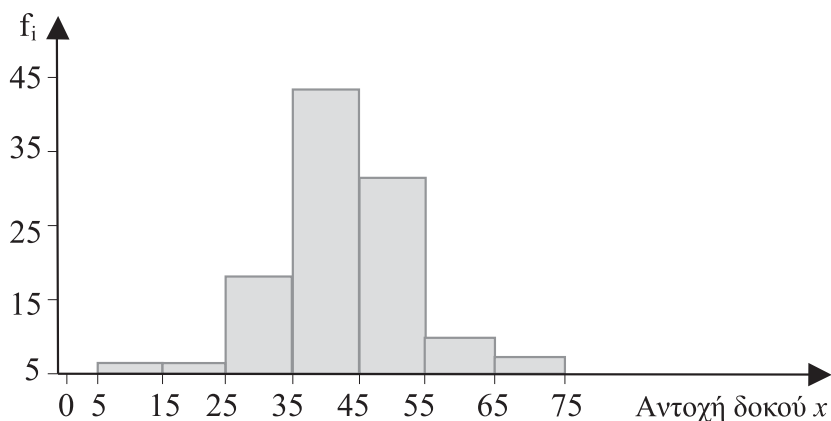
Για να διερευνήσουμε την αντοχή των σιδηροδοκών που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε ένα κατασκευαστικό έργο δοκιμάστηκε η αντοχή 100 δοκών. Τα δεδομένα των αντοχών αυτών τοποθετήθηκαν σε μία αύξουσα σειρά, και στην συνέχεια προσδιορίσαμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, Πίνακα 1.1

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το ιστόγραμμα, όπου ο οριζόντιος άξονας παριστάνει την αντοχή δοκών, χωρίζεται σε 7 ίσα τμήματα, όσες και οι κλάσεις του πίνακα κατανομής συχνοτήτων. Τα ύψη των επτά ορθογωνίων τμημάτων είναι ανάλογα με τις συχνότητες του Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1

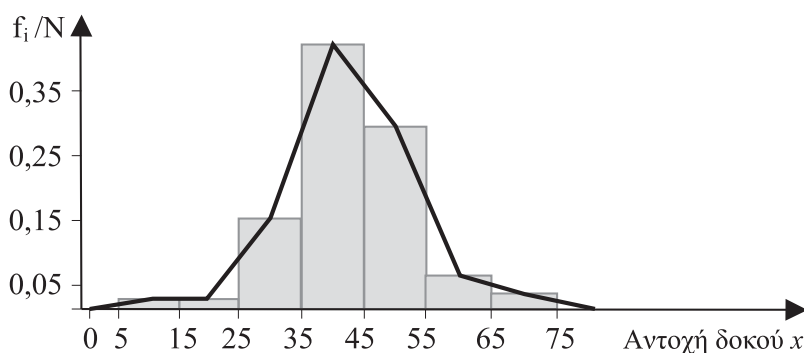
Κλάσεις Αντοχή δοκού (N/mm^2)	Κέντρο κλάσης X (N/mm^2)	Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i/100$
5-15	10	1	0,1
15-25	20	1	0,1
25-35	30	15	0,15
35-45	40	43	0,43
45-55	50	30	0,30
55-65	60	8	0,08
65-75	70	2	0,02

Το ιστόγραμμα στο Σχήμα 1.1 είναι σχεδόν συμμετρικό με την μεγαλύτερη συχνότητα στην κλάση κάτω από $43 N/mm^2$ και κάπως σταθερή ελάττωση προς τα δύο άκρα. Περισσότερη όμως διερεύνηση χρειάζεται για να καταλάβουμε περισσότερα χαρακτηριστικά του πληθυσμού.



Σχήμα 1.1 Ιστόγραμμα για τα δεδομένα αντοχής δοκού
με πλάτος κλάσης $10 N/mm^2$

Ένα άλλο χρήσιμο εργαλείο για να προσδιορίσουμε την κατανομή συχνότητας στην μεταβλητή είναι η πολυγωνική γραμμή. Μπορεί να σχεδιασθεί με την ένωση των ενδιάμεσων σημείων των επάνω πλευρών των ορθογωνίων τμημάτων του ιστογράμματος. Εάν η συχνότητα της κάθε κλάσης διαιρεθεί με τον αριθμό των δεδομένων τότε έχουμε την σχετική συχνότητα, και η πολυγωνική γραμμή εκφράζει την πιθανότητα η αντοχή της δοκού να βρεθεί στην αντίστοιχη κλάση. Το προκύπτον διάγραμμα λέγεται σχετική πολυγωνική γραμμή.



Σχήμα 1.2 Πολυγωνική γραμμή σχετικής συχνότητας για τα δεδομένα αντοχής δοκού με πλάτος κλάσης 10 N/mm^2

Αν ο αριθμός παρατηρήσεων μεγαλώσει, και αυξηθεί ο αριθμός κλάσεων, και το πλάτος ελαττωθεί αρκετά, η πολυγωνική γραμμή σχετικής συχνότητας γίνεται μία καμπύλη συχνότητας. Αυτή είναι και στην πράξη η καμπύλη πιθανότητας, η οποία παριστάνει την μαθηματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πληθυσμού, δηλαδή για όλες τις δοκούς που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στο έργο.

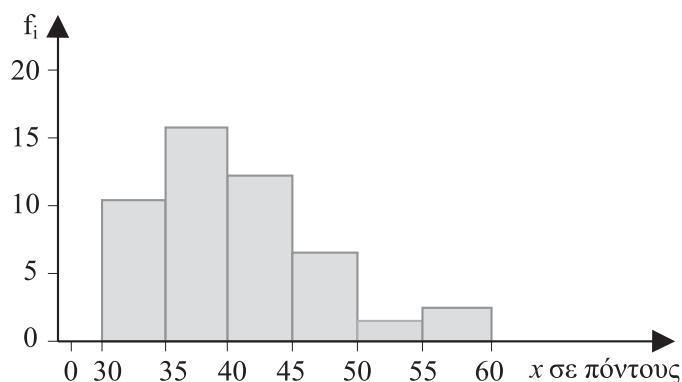
Παράδειγμα 1.2

Για να σχεδιάσει ένα αντιπλημμυρικό έργο ο μηχανικός πρέπει να διερευνήσει την ετήσια μέγιστη ένταση της βροχής. Για τον σκοπό αυτό έχει δεδομένα με την ετήσια μέγιστη ένταση από το 1953 έως το 2002. Ακολουθώντας την τυπική διαδικασία, τα δεδομένα μπαίνουν σε μία αύξουσα σειρά, και ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων για την μεταβλητή ετήσια μέγιστη ένταση βροχής είναι ο Πίνακας 1.2

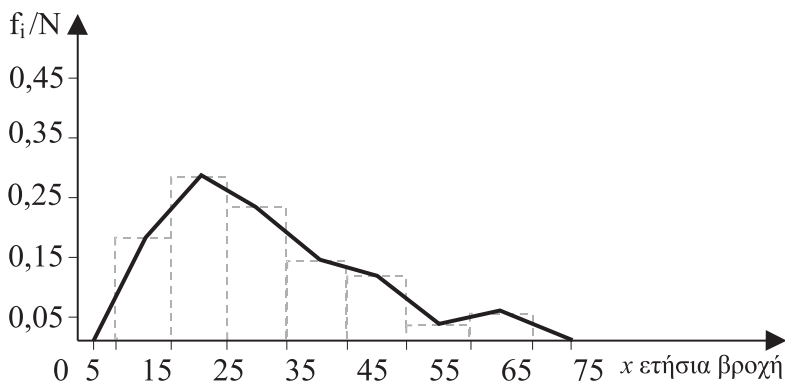
Πίνακας 1.2

Κλάσεις ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης	Κέντρο κλάσης $X(cm)$	Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i/100$
30-35	32,5	5	0,1
35-40	37,5	13	0,1
40-45	42,5	11	0,15
35-45	47,5	8	0,43
45-50	52,5	7	0,30
50-55	57,5	2	0,08
55-60	62,5	3	0,02

Το ιστόγραμμα στο Σχήμα 1.3 δείχνει οπτικά την κατανομή των συχνοτήτων για την ετήσια μέγιστη βροχόπτωση σε ένα τόπο.

**Σχήμα 1.3** Ιστόγραμμα για τα δεδομένα ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης σ'ένα τόπο

Μετά το ιστόγραμμα, στο Σχήμα 1.4 η πολυγωνική γραμμή δείχνει ότι η κατανομή των συχνοτήτων της ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης δεν είναι συμμετρική. Μεγαλύτερη συχνότητα παρατηρείται στην μέγιστη βροχόπτωση από 15 μέχρι 25 πόντους, υπάρχουν όμως και πολλές άλλες περιπτώσεις όπου η ετήσια μέγιστη βροχόπτωση ξεπερνά τους 35 και 45 πόντους.



Σχήμα 1.4 Πολυγωνική γραμμή σχετικής συχνότητας για τα δεδομένα ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης σε πόντους

1.4 ΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η γραφική διαδικασία στην παρουσίαση των δεδομένων είναι πολύ χρήσιμη στην διεξαγωγή γνώσης για την μεταβλητότητα και άλλων ιδιοτήτων. Ακόμη, υπάρχει και μία συμπληρωματική μέθοδος δια μέσου της οποίας μπορεί να αντληθεί περισσότερη πληροφορία που εμπεριέχεται στα δεδομένα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί ένα σύνολο από χαρακτηριστικούς αριθμούς για να παρουσιάσει περιληπτικά τα δεδομένα, τονίζοντας τα κυριότερα χαρακτηριστικά. Αυτή η περιληπτική αριθμητική παρουσίαση παριστάνει μερικές ιδιότητες του ιστογράμματος και της πολυγωνικής γραμμής. Βασικά, η περιληπτική αριθμητική περιγραφή του δείγματος διακρίνεται σε τρεις τύπους: μέτρηση της **κεντρικής τάσης**, της **μεταβλητότητας** και της **ασυμμετρίας** των τιμών.

1.4.1 Μετρήσεις κεντρικής τάσης

Μία συνοπτική έκφραση των μετρήσεων ενός δείγματος είναι οι μετρήσεις κεντρικής τάσης οι οποίες είναι αντιπροσωπευτικές του δείγματος. Αυτές είναι γνωστές και σαν κεντρικές τιμές επειδή οι διάφορες τιμές που παίρνει η μεταβλητή διασκορπίζονται γύρω από αυτές τις τιμές. Αυτές είναι τρεις, η **μέση τιμή**, η **διάμεσος** και η **επικρατέστερη τιμή**.

Η **δειγματική μέση τιμή** υπολογίζεται από τα δεδομένα του δείγματος x_1, x_2, \dots, x_n , όπως

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Εάν κάποιος ήθελε να χρησιμοποιήσει μόνο τιμή για τα δεδομένα, η μέση τιμή θα ήταν ιδανική για αυτόν τον σκοπό. Για θεωρητικούς σκοπούς η μέση τιμή εκφράζει την τοποθεσία πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών όπου η μεταβλητή παίρνει διάφορες τιμές. όπως αναφέραμε και παραπάνω, καθώς αυξάνει ο αριθμός παρατηρήσεων του δείγματος η πολυγωνική γραμμή των συχνοτήτων της μεταβλητής προσεγγίζει μία καμπύλη γραμμή. Η μέση τιμή μπορεί να χαρακτηριστεί σαν το κέντρο βάρους της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη και πάνω από τον οριζόντιο άξονα, ή το κέντρο ισορροπίας από την καμπύλη συχνότητας.

Η μέση τιμή του πληθυσμού συμβολίζεται ως γνωστόν με το γράμμα **μ**. Η μέση τιμή έχει ένα βασικό μειονέκτημα επειδή μερικές φορές επηρεάζεται υπερβολικά από τυχόν ακραίες τιμές (**outliers**) που υπάρχουν στο δείγμα παρατηρήσεων. Τέτοιες τιμές δεν φαίνεται να συμφωνούν με την κατανομή της πληθώρας των δεδομένων. Υπάρχουν διάφορες αιτίες στις οποίες οφείλεται η εμφάνιση των outliers, όπως διαφορετικές συνθήκες παρατήρησης απ' ότι υποθέσαμε, λάθος μέτρησης, πειραματικής παρατήρησης, κ.τ.λ.. Υπάρχουν διαθέσιμοι αλγόριθμοι ή προγράμματα στον υπολογιστή όπου τέτοιες παρακλήσεις στα δεδομένα ανιχνεύονται, και ο μηχανικός μπορεί να διερευνήσει τα αίτια ή και απορρίψει την παρατήρηση αυτή. Συνήθως, σε πολλά στατιστικά προγράμματα υπολογίζεται η μέση τιμή του δείγματος με βάρη, όπου σε μερικές παρατηρήσεις που δεν συμφωνούν με την πληθώρα των δεδομένων δίνεται λιγότερο βάρος (down-weighted).

Η **διάμεσος** είναι η κεντρική τιμή καθώς τα δεδομένα του δείγματος έχουν τοποθετηθεί σε μία αύξουσα σειρά. Η διάμεσος έχει ένα βασικό πλεονέκτημα έναντι της μέσης τιμής. Συνήθως, η διάμεσος δεν επηρεάζεται από τις τυχόν ακραίες τιμές (outliers) του δείγματος.

Μαζί με την διάμεσο μπορούμε να αναφέρουμε δύο άλλες παραμέτρους με χρήσιμη πληροφορία για την τυχαία μεταβλητή, όπως το **πρώτο τεταρτημόριο** και το **τρίτο τεταρτημόριο**, τα οποία είναι οι διάμεσοι του πρώτου ήμισυ και του δεύτερου ήμισυ των παρατηρήσεων, αντίστοιχα.

Η **επικρατέστερη τιμή** είναι η πιο συχνότερη τιμή του δείγματος. Μερικές φορές δύο ή και περισσότερες τιμές μπορεί να της συναντούμε το ίδιο συχνά μέσα στο δείγμα. Δηλαδή, η επικρατέστερη τιμή είναι περισσότερο από μία. Γι' αυτό συνήθως την επικρατέστερη τιμή την διακρίνουμε από το ιστόγραμμα της μεταβλητής ή την πολυγωνική της γραμμή.

Παράδειγμα 1.3

Στην διερεύνηση της αντοχής δοκού η δειγματική μέση τιμή είναι 45 Nn/mm^2 , η διάμεσος μπορεί να εκτιμηθεί και από τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων είναι 43 Nn/mm^2 . Η επικρατέστερη τιμή της αντοχής δοκού βρίσκεται, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1, στην κλάση με την μεγαλύτερη συχνότητα, και εκτιμάται ότι είναι 38 Nn/mm^2 . Δηλαδή, δοκός με αντοχή γύρω από την τιμή 38 Nn/mm^2 είναι η πιο συνηθισμένη δοκός. Με άλλα λόγια η επικρατέστερη τιμή είναι η πιο αντιπροσωπευτική του δείγματος.

1.4.2 Μετρήσεις διασποράς και ασυμμετρίας

Ενώ μία μέτρηση κεντρικής τάσης επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας μία κεντρική αντιπροσωπευτική τιμή, μία μέτρηση της διασποράς παριστάνει τον βαθμό διασκόρπισης των τιμών της μεταβλητής. Η διασπορά ακόμη δείχνει την ακρίβεια των δεδομένων. Ένας τρόπος ποσοτικοποίησης της διασποράς είναι το *εύρος*, δηλαδή, η απόσταση μεταξύ της παρατηρούμενης ελαχίστης και μεγίστης τιμής του δείγματος. Το εύρος όμως είναι μία όχι φθίνουσα συνάρτηση του μεγέθους του δείγματος, γι' αυτό δεν είναι από τις πιο χαρακτηριστικές του πληθυσμού. Επιπλέον το εύρος εξαρτάται πολύ μόνο από μερικές τιμές του δείγματος, στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο μερικές πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές ενώ η πληθώρα είναι συγκεντρωμένη γύρω από μία κεντρική τιμή. Γι' αυτό η απόσταση μεταξύ του πρώτου και τρίτου τέταρτο-μορίου θα ήταν ιδανικότερη από το εύρος, σαν μέτρηση της διασποράς των τιμών της μεταβλητής. Ένας κλασσικότερος τρόπος εκτίμησης της διασποράς είναι η *μέση απόλυτη απόκλιση D*, όπου προσδιορίζεται η μέση απόλυτη απόκλιση της κάθε τιμής x_i του δείγματος από την κεντρική τιμή μ . Αυτή η μέτρηση διασποράς είναι εύκολα κατανοητή και χρήσιμη. Παρόλα αυτά παραμένει χρήσιμη μόνο αν οι μεγάλες και οι μικρές αποκλίσεις είναι τόσο σημαντικές όσο και οι μέσες αποκλίσεις. Έτσι υπάρχουν θεωρητικές αιτίες για να εκτιμήσουμε την δειγματική διασπορά των δεδομένων με την *τυπική απόκλιση s*, η οποία είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (μέσο άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων),

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}.$$

Σε αντίθεση με την μέση απόλυτη απόκλιση *D*, η τυπική απόκλιση *s* επηρεάζεται πολύ από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής, μεγάλες ή μικρές. Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού δηλώνεται ως γνωστόν με το γράμμα σ .

Τέλος, μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα του ιστογράμματος ή της πολυγωνικής γραμμής των συχνοτήτων είναι κατά πόσο τα σχήματα αυτά είναι συμμετρικά. Ο **δειγματικός συντελεστής κυρτότητας** μετρά την ασυμμετρία από ένα σύνολο δεδομένων γύρω από την μέση τιμή του, όπως

$$g = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{ns^3}.$$

Ένα ιστόγραμμα λέγεται ότι έχει **θετική** κυρτότητα εάν έχει μακρύτερη ουρά προς τα δεξιά. Στην περίπτωση αυτή, τα δεδομένα του δείγματος που έχουν τιμές μικρότερες της μέσης τιμής είναι περισσότερα εκείνων που έχουν τιμές μεγαλύτερης της μέσης τιμής. Για ένα θετικά κυρτό ιστόγραμμα ισχύει

$$\text{Επικρατέστερη Τιμή} < \text{Διάμεσος} < \text{Μέση Τιμή}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι αντίστροφη όταν η κυρτότητα είναι αρνητική. Προφανώς, για ένα συμμετρικό ιστόγραμμα ο συντελεστής κυρτότητας είναι μηδέν.

Παράδειγμα 1.4

Εάν η ετήσια βροχόπτωση σε μία πόλη για μία περίοδο έξι ετών ήταν 50, 50, 56, 42, 53, και 49 πόντοι, η δειγματική **μέση τιμή** είναι

$$\bar{x} = \frac{50 + 50 + 56 + 42 + 53 + 49}{6} = 50 \text{ πόντοι},$$

Η διάμεσος, $M=50$, η επικρατέστερη τιμή, $T=50$, η τυπική απόκλιση

$$s = \sqrt{\frac{1}{6}((50 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (56 - 50)^2 + \dots + (49 - 50)^2)} = 4,69 \text{ πόντοι}.$$

1.5 ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕΝΑ ΚΑΤΑ ΖΕΥΓΗ

Μέχρι τώρα, διερευνήσαμε την συμπεριφορά μιας μεταβλητής. Μπορούμε όμως να επεκτείνουμε την διερεύνηση και στην συσχέτιση δύο μεταβλητών, παίρνοντας παρατηρήσεις κατά ζεύγη. Στην πράξη, ξεκινάμε με γραφικές παραστάσεις και στην συνέχεια αριθμητικές εκτιμήσεις περιγράφουν περιληπτικά την συσχέτιση των δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα σύνολο από n ζευγάρια παρατηρήσεων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, των δύο

μεταβλητών X και Y , μια αρχική ένδειξη της συσχέτισης επιτυγχάνεται διαμέσου του διαγράμματος σκεδασμού (scatter diagram). Εδώ οι άξονες του διαγράμματος παριστάνουν τα παρατηρούμενα ζεύγη τιμών.

Παράδειγμα 1.5

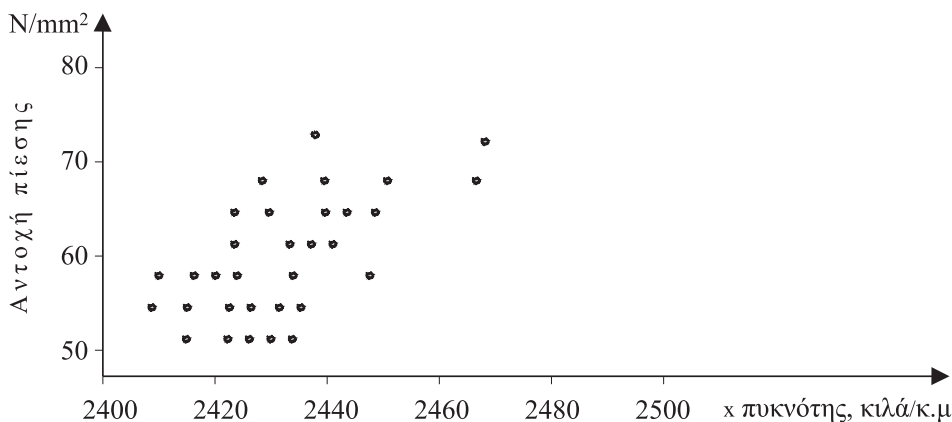
Το διάγραμμα διασποράς του Σχήματος 1.5 παριστάνει τα δεδομένα τσιμέντου, με την πυκνότητα x_i και την αντοχή πίεσης y_i , για 28 μέρες, πάνω στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα, αντίστοιχα. Με την πρώτη ματιά, δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρο ότι η πυκνότητα του τσιμέντου συσχετίζεται με την αντοχή πίεσης αυτού. Αν και κάποιος θα περίμενε μία πυκνότητα υψηλότερη ή χαμηλότερη από την μέση τιμή να συσχετίζεται με την αντοχή πίεσης του τσιμέντου, η οποία είναι αντίστοιχα υψηλότερη ή χαμηλότερη από την μέση της τιμή.

Η δειγματική συνδιακύμανση, $s_{X,Y}$, δίνει μία αριθμητική περίληψη του γραμμικού συσχετισμού μεταξύ των δύο ποσοτικών μεταβλητών. Αυτή είναι η μέση τιμή του γινομένου των αποκλίσεων τους από τις μέσες τιμές τους. Εάν η δειγματική συνδιακύμανση διαιρεθεί με τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις των δύο μεταβλητών, s_X και s_Y , επιτυγχάνουμε την άνευ διαστάσεων μέτρηση της γραμμικής σχέσης η οποία καλείται δειγματικός συντελεστής συσχέτισης

$$r_{X,Y} = \frac{1}{ns_X s_Y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Ο συντελεστής συσχέτισης περιορίζεται από τις τιμές -1 και 1 ,

$$-1 \leq r_{X,Y} \leq 1.$$



Σχήμα 1.5 Διάγραμμα σκεδασμού από δεδομένα τσιμέντου.

Εάν ο συντελεστής συσχέτισης πλησιάζει το μηδέν δεν υπάρχει σχέση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές. Ενώ, μία τιμή του συντελεστή πλησιέστερα προς το 1 ή -1 δείχνει ότι η αύξηση της μιας μεταβλητής θα προξενούσε κατά μέσο όρο αύξηση ή ελάττωση της άλλης, αντίστοιχα.

Οι δύο παραπάνω οριακές τιμές της ανισότητας είναι θεωρητικού ενδιαφέροντος και είναι εφαρμόσιμες όταν τα σημεία ενός διαγράμματος σκεδασμού βρίσκονται πάνω σε μία γραμμή τύπου

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i,$$

όπου β_0 και β_1 είναι σταθερές. Η σταθερά β_1 θα είναι θετική για όλες τις δυνατές συσχετίσεις συμπεριλαμβάνοντας την μέγιστη τιμή $r_{X,Y} = +1$. Στην αντίθετη περίπτωση, $r_{X,Y} = -1$, το β_1 θα είναι αρνητικό, δείχνοντας αρνητική συσχέτιση, δηλαδή, υψηλή τιμή της μεταβλητής X τείνει να σχετισθεί με χαμηλή τιμή της μεταβλητής Y .

Σε μερικές περιπτώσεις το διάγραμμα σκεδασμού μπορεί να δείχνει ότι υπάρχει εκθετικού ή άλλου τύπου μη γραμμική σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ακολουθούμε ειδικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε λογαριθμικούς, τετραγωνικούς ή άλλους μετασχηματισμούς στην μία ή και δύο μεταβλητές πριν την ανάλυση.

Παράδειγμα 1.6

Στον έλεγχο αντοχής τσιμέντου σε σχέση με την πυκνότητα του, Σχήμα 1.5 δεν φαίνεται δυνατή συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται αν υπολογίσουμε τον δειγματικό συντελεστή συσχέτισης έχουμε $r_{X,Y} = +0,44$. Όμως, η εισαγωγή στο γραμμικό μοντέλο και μιας άλλης μεταβλητής, όπως η επίδραση θερμοκρασίας ή υγρασίας στη περίοδο του ελέγχου, θα οδηγούσαν σε καλύτερη συσχέτιση για σκοπούς πρόβλεψης αντοχής τσιμέντου σε ένα πολύ-μεταβλητό μοντέλο παλινδρόμησης.

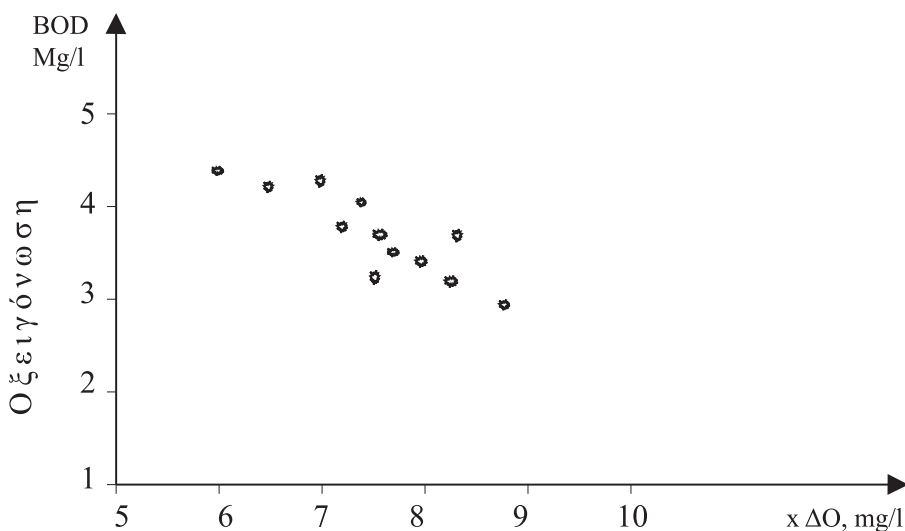
Εξισώσεις παλινδρόμησης όπως παραπάνω χρησιμοποιούνται συχνά για την πρόβλεψη της Y για μία γνωστή ή δεδομένη τιμή της X χωρίς να επικαλούμαστε την αιτία που προκαλεί την συσχέτιση.

Παράδειγμα 1.7

Ένα άλλο παράδειγμα με θετική ή αρνητική συσχέτιση είναι η σχέση μεταξύ των μεταβλητών που μετρούν την ποιότητα του νερού. Για την διερεύνηση της μόλυνσης του νερού ενός ποταμού, οι μεταβλητές που θα μπορούσαμε να μετρήσουμε μεταξύ άλλων είναι το **διαλυμένο οξυγόνο, DO**, και το **απαιτούμενο βιοχημικό οξυγόνο, BOD**, για την επιβίωση των ψαριών και άλλων οργανι-

σμών στο νερό του ποταμού. Έτσι υψηλή τιμή σε BOD δείχνει υψηλό επίπεδο μόλυνσης του νερού.

Το διάγραμμα σκεδασμού των δύο δεικτών της ποιότητας νερού, με βάση ένα δείγμα 30 παρατηρήσεων, φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Όπως αναμενότανε, φαίνεται μία δυνατή αρνητική συσχέτιση, με υψηλές τιμές της DO να σχετίζονται με χαμηλές τιμές της BOD και αντιστρόφως. Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται με βάση το δείγμα και είναι $-0,90$, και επιβεβαιώνει ότι η τιμή του BOD μπορεί να εκτιμηθεί από μετρήσεις του DO. Ο σκεδασμός στο διάγραμμα οφείλεται μερικώς στην ανεπάρκεια του ελέγχου BOD, και μερικώς σε άλλους παράγοντες όπως θερμοκρασία και το μέγεθος της ροής, η οποία επιδρά στο DO.



Σχήμα 1.6 Διάγραμμα σκεδασμού από δεδομένα ποιότητας νερού

1.6 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Η αβεβαιότητα στην μελέτη ενός έργου δεν οφείλεται μόνο στην μεταβλητότητα κάποιων παραμέτρων ή στην άγνωστη εξέλιξη κάποιων στοχαστικών γεγονότων, που μπορεί να μην έχουν καλές επιπτώσεις στο έργο. Αβεβαιότητα προέρχεται και από τον αριθμό παρατηρήσεων και τα μαθηματικά πρότυπα που επιλέγει ο μηχανικός για εκτιμήσεις ή προβλέψεις. Σε μία μελέτη ο μηχανικός πρέπει να κάνει την ανάλογη επιλογή τόσο των μηχανικών μοντέλων όσο και

των στατιστικών για προβλέψεις ή εκτιμήσεις των διάφορων μεγεθών. Όμως, μία αποτελεσματική επιλογή των στοχαστικών μοντέλων στηρίζεται σε συνθήκες, οι οποίες μερικές φορές είναι άγνωστες στον μηχανικό. Ως εκ τούτου τα στατιστικά μοντέλα δεν είναι τα ιδανικότερα στην κάθε μελέτη και γι' αυτό θα υπάρξουν μικρές αποκλίσεις στις εκτιμήσεις των παραμέτρων ή προβλέψεις άλλων ενδεχομένων. Τέτοιες αβεβαιότητες που προκαλούνται από την επιλογή και εφαρμογή των μοντέλων ίσως είναι σοβαρότερες και από την μεταβλητότητα κάποιων παραμέτρων.

Όλες οι αβεβαιότητες άσχετα με τα αίτια που τις προκαλούν μπορεί να εκτιμηθούν με τις έννοιες και μεθοδολογία των πιθανοτήτων, οι δε επιπτώσεις τους στα τεχνικά έργα μπορεί να αξιολογηθούν με τις στατιστικές μεθόδους.

Αν λοιπόν, οι διάφοροι παράμετροι στην μελέτη του μηχανικού είναι τυχαίες μεταβλητές, όπου είναι αβέβαιες οι τιμές τους, και αν τα διάφορα στατιστικά μοντέλα που επιλέγονται με βάση τα δείγματα και τις συνθήκες που επικρατούν δεν είναι τα ιδανικότερα, με ποιο τρόπο οι μέθοδοι πιθανοτήτων και στατιστικής βοηθούν ή συντελούν στην διαδικασία λήψης απόφασης;

Κάτω από το παραπάνω κλίμα αβεβαιότητας, θα μπορούσε ο μηχανικός να λαμβάνει υπόψη του τις χειρότερες τιμές των μεταβλητών, όπως την μέγιστη δυνατή βροχόπτωση, την ελάχιστη αντοχή του τσιμέντου, το μέγιστο δυνατό φορτίο, την μέγιστη δυνατή ένταση ενός πιθανού σεισμού, και να σχεδιάζει ανάλογα την ποσότητα των υλικών και την αντοχή των διαφόρων συστημάτων του έργου. Έτσι θα υπάρξει πολύ καλή αξιοπιστία στην κατασκευή αλλά το κόστος πολύ ασύμφορο.

Είναι απαραίτητο να επιτευχθεί κάποιο ζύγισμα ανάμεσα στην μείωση του κόστους κατασκευής και την ενδεχόμενη αύξηση των κινδύνων που διεγείρονται. Οι μέθοδοι των πιθανοτήτων και στατιστικής προσφέρουν πρότυπα στα οποία εμπλέκονται όλοι οι παράγοντες κόστους, αντοχής, ποιότητας, ασφάλεια, κ.τ.λ.. Βέλτιστη επιλογή θα είναι αυτή που επιτυγχάνει την καλύτερη επιθυμητή ισορροπία στους παράγοντες αυτούς. Η λήψη απόφασης διευκολύνεται και από το γεγονός ότι, οι μέθοδοι των πιθανοτήτων αντιστοιχούν στην κάθε επιλογή του μηχανικού μία πιθανότητα επιτυχίας του κατασκευαστικού έργου, ή την αξιοπιστία του όπως αλλιώς λέγεται.

1.6.1 Εφαρμογές των Πιθανοτήτων και Στατιστικής στα Τεχνικά Έργα

Στην συνέχεια αναφέρουμε περιληπτικά και παραδειγματικά μερικές εφαρμογές

των πιθανοτήτων και στατιστικής στα τεχνικά έργα ή άλλες μελέτες του μηχανικού, όπου παίρνει αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

- **Υδρολογικά συστήματα.** Για την προστασία μιας πόλης από μία πλημμύρα λόγω καταιγίδας, πρέπει να κατασκευαστεί αντιπλημμυρικό έργο. Ο μηχανικός πρέπει να αποφασίσει για το μέγεθος του οχετού. Αυτό βέβαια εξαρτάται κυρίως από δύο **στοχαστικά μεγέθη**, την ένταση της βροχόπτωσης και την ποσότητα απορροής προς τον οχετό. Με την μεθοδολογία των πιθανοτήτων θα μπορούσε να προσδιορίσει την **κατανομή συχνότητας** ή πιθανότητας των **τυχαίων μεταβλητών**, που αφορούν τις μεταβλητές μέγιστη ένταση βροχόπτωσης και μέγιστη απορροή προς τον οχετό. Στη συνέχεια στατιστικά μοντέλα μπορούν να προσδιορίσουν με κάποια εμπιστοσύνη ένα **διάστημα** εντός του οποίου βρίσκεται η μέγιστη βροχόπτωση ή η μέγιστη απορροή, με βάση των οποίων αποφασίζεται το μέγεθος του οχετού, έτσι ώστε να επιτευχθεί αξιόλογη αποστράγγιση με το μικρότερο δυνατόν κόστος.
- **Κατασκευή οδοστρώματος.** Συχνά από την αντοχή ενός οδοστρώματος εξαρτάται η ασφάλεια των αυτοκινήτων, ή των αεροπλάνων αν πρόκειται για διάδρομο προσγείωσης και πολλά άλλα. Η διάρκεια ζωής ενός οδοστρώματος είναι τυχαία μεταβλητή και εξαρτάται κυρίως από τέσσερις παράγοντες, όπως **βροχόπτωση, υπέδαφος, τυχαία ακραία γεγονότα (σεισμός, παγετός)**, και **πάχος** οδοστρώματος, εκ των οποίων οι τρεις πρώτοι είναι τυχαίες μεταβλητές. Σε μία μελέτη ο μηχανικός πρέπει να συγκεντρώσει στατιστικά δεδομένα για κάθε μία από τις τρεις μεταβλητές, ποσότητα βροχόπτωσης, πυκνότητα των εδαφικών υλικών του υποστρώματος, συχνότητα εμφάνισης παγετών ή σεισμών. Με την τεχνική της περιγραφικής στατιστικής έχει άμεσα πληροφορίες σχετικά με την μεταβλητότητα των τιμών των στοχαστικών παραγόντων, και με τις μεθόδους των πιθανοτήτων και στατιστικής μπορεί να γενικεύσει τα δειγματικά του συμπεράσματα με αρκετά υψηλή εμπιστοσύνη. Ακόμη, με βάση την πιθανοθεωρία εκτιμά την **πιθανότητα εμφάνισης ακραίων γεγονότων** στα επόμενα χρόνια. Η χρήση μοντέλων παλινδρόμησης, όπου στόχος είναι η **πρόβλεψη διάρκειας αντοχής** του οδοστρώματος, και η εκτίμηση των άλλων παραγόντων συντελούν στην καλή επιλογή του πάχους του οδοστρώματος, έτσι ώστε να επιτευχθεί αξιόλογη αξιοπιστία με το μικρότερο δυνατό κόστος.
- **Στατικά συστήματα.** Σε μία κατασκευή, ο μηχανικός μεταξύ των στοχαστικών παραγόντων πρέπει να λάβει υπόψη του και τις τυχαίες μεταβλητές όπως **φορτίο** πάνω στην κατασκευή, φορτίο από δυνατό άνεμο, φορτίο από

τυφώνα, δυνατός σεισμός και άλλα. Σύγχρονες μέθοδοι πιθανοτήτων και στατιστικής, με βάση τα στατιστικά δεδομένα, μπορούν να εκτιμήσουν τα διαστήματα μέσα στα οποία κινούνται αυτά τα στοχαστικά μεγέθη κατά την διάρκεια ζωής της κατασκευής, καθώς και την πιθανότητα να συμβούν διάφορα **καταστροφικά γεγονότα**. Έχοντας υπ' όψη αυτές τις εκτιμήσεις, ο μηχανικός διευκολύνεται στην επιλογή για την αντοχή και **ποιότητα των υλικών** που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή. Αλλά και η αντοχή των υλικών είναι επίσης μία τυχαία μεταβλητή. Σε μία τέτοια μελέτη με βάση την επιθυμητή διάρκεια ζωής του κτιρίου ο μηχανικός πρέπει να εξισορροπήσει το κόστος κατασκευής και το επίπεδο ασφάλειας.

- **Εδαφομηχανικά συστήματα.** Στη μελέτη των θεμελίων ενός μεγάλου κτιριακού συγκροτήματος πρέπει να υπολογιστεί η αντοχή του υπεδάφους. Όμως, η εκτίμηση της αντοχής του υπεδάφους είναι τυχαία μεταβλητή, διότι στο υπέδαφος υπάρχουν **ακανόνιστα στρώματα** διαφόρων υλικών με ανομοιογένεια στην πυκνότητα, υγρασία, και αρκετά άλλα. Τα δε δείγματα που βασίζονται οι εκτιμήσεις αυτών ενδέχεται να μην είναι επαρκή ή αντιπροσωπευτικά. Ακόμη, η επιλογή των μηχανικών πρότυπων για την εκτίμηση της αντοχής μπορεί να μην είναι η ιδανική για τις συνθήκες του συγκεκριμένου εδάφους. Συνεπώς, ο προσδιορισμός της αντοχής του υπεδάφους πρέπει να βασίζεται και σε πιθανοκρατικά πρότυπα. Διαφορετικά, υπερεκτίμηση της αντοχής του υπεδάφους εμπεριέχει κινδύνους, ενώ υποεκτίμηση της αντοχής συνεπάγεται μεγάλο κόστος κατασκευής.
- **Προγραμματισμός δραστηριότητων.** Η προσφορά που κάνει ο μηχανικός σε μια δημοπρασία προϋποθέτει εκτίμηση της μέσης διάρκειας του έργου καθώς και του ανθρώπινου, μηχανικού και χρηματικού **δυναμικού**. Σε ένα μεγάλο έργο υπάρχουν πολλοί αστάθμητοι παράγοντες. Ο αριθμός εργαζομένων, ο αριθμός μηχανημάτων, οι καιρικές συνθήκες, απεργίες εργαζομένων και άλλα. Συνεπώς, η διάρκεια της κάθε δραστηριότητας στο έργο είναι τυχαία μεταβλητή. Ο μηχανικός πρέπει να σχεδιάσει κατά τέτοιο τρόπο τις δραστηριότητες έτσι ώστε να ολοκληρωθεί το έργο στο συντομότερο δυνατό διάστημα με το ελάχιστο ανθρώπινο ή μηχανικό δυναμικό. Ο σχεδιασμός αυτός δεν είναι εύκολος αφού οι δραστηριότητες πρέπει να ακολουθούν μία σειρά, άλλες προηγούνται και άλλες εκτελούνται ταυτόχρονα, και ακόμη οι διάρκειες αυτών είναι στοχαστικά μεγέθη. Η τεχνική των **γραφημάτων (network)** διευκολύνει τον προγραμματισμό των δραστηριοτήτων, οπωσδήποτε όμως με συνδυασμό και πιθανοκρατικών πρότυπων. Γενικά ο προγραμματισμός δραστηριοτήτων εντάσσεται στα **Βιομηχανικά Συστή-**

ματα που αποτελούν μία μοντέρνα ειδικότητα του μηχανικού. Ο ρόλος των πιθανοτήτων και στατιστικής στην ειδικότητα αυτή είναι κάτι παραπάνω από βασικός.

- **Σφάλματα μετρήσεων.** Όλες οι μετρήσεις του μηχανικού εμπεριέχουν δύο ειδών σφάλματα, όπως τα **συστηματικά** και **στοχαστικά**. Τα συστηματικά μπορούν να διερευνηθούν τα αίτια που τις προκαλούν και να βελτιωθούν. Στα τυχαία όμως σφάλματα δεν γνωρίζουμε τα αίτια που τα προκαλούν, με την θεωρία πιθανοτήτων μπορούμε όμως να εκτιμήσουμε το μέγεθος και την διάδοσή τους.
- **Συγκοινωνιακή τεχνική.** Στη μελέτη κατασκευής ενός δρόμου ένας βασικός αστάθμητος παράγοντας είναι ο όγκος κυκλοφορίας αυτοκινήτων σε ώρα αιχμής. Μια πιθανοκρατική προσέγγιση του προβλήματος θα είχε ευεργετικά αποτελέσματα στον σχεδιασμό της χωρητικότητας του δρόμου έτσι ώστε με σχετικά χαμηλό κόστος να περιορίσουμε την συχνότητα συνωστισμού αυτοκινήτων ή **μποτιλιαρισμάτων** όπως λέγεται. Η διερεύνηση των ατυχημάτων στους δρόμους σχετίζεται με πολλούς παράγοντες όπως ταχύτητα αυτοκινήτων, συμπεριφορά οδηγών, ποιότητα οδοστρώματος, σήμανση και άλλα. Οι περισσότεροι από αυτούς τους παράγοντες είναι τυχαίες μεταβλητές και η διερεύνησή τους στηρίζεται στις έννοιες ειδικών κατανομών πιθανοτήτων όπως π.χ. **Poisson** κατανομή. Η επιτυχία σε ένα **σχεδιασμό αναχωρήσεων** λεωφορείων, τρενών, αεροπλάνων, πλοίων, ή και άλλων μεταφορικών μέσων στηρίζεται στον προσδιορισμό της συχνότητας άφιξης ταξιδιωτών και κατανομή πιθανότητας άλλων τυχαίων γεγονότων που θα καθυστερούσαν την συγκοινωνία. Γενικά, το πρόβλημα της συγκοινωνίας είναι σύνθετο με πολλούς αστάθμητους παράγοντες. Η βελτίωση της συγκοινωνίας στηρίζεται στα στατιστικά δείγματα πληροφοριών και προϋποθέτει γνώση των εννοιών πιθανότητας και πολλών άλλων στατιστικών μοντέλων.
- **Σημεία εξυπηρέτησης.** Σε πολλές μελέτες του ο μηχανικός προβληματίζεται με την επιλογή πλήθους σημείων εξυπηρέτησης. Ο **χρόνος εξυπηρέτησης** της κάθε περίπτωσης είναι τυχαία μεταβλητή, όπως και ο **αριθμός άφιξης** αυτών που επιθυμούν να εξυπηρετηθούν είναι στοχαστικό μέγεθος. Πολλά σημεία εξυπηρέτησης συνεπάγεται μεγάλο κόστος, ενώ λίγα σημεία εξυπηρέτησης θα προκαλούσε **μεγάλες ουρές** και πολύ **χρόνο αναμονής**. Αυτό το πρόβλημα συναντάται στην μελέτη κατασκευής αεροδρομίων, σταθμών, λιμανιών με γερανούς φόρτωσης-εκφόρτωσης, μεγάλων καταστημάτων και αλλού. Σε μία αποτελεσματική απόφαση σημείων εξυπηρέ-

τησης απαιτείται ο προσδιορισμός κατανομής πιθανότητας των αφίξεων και του χρόνου εξυπηρέτησης, καθώς και άλλων τεχνικών όπως προσομοίωση **Monte Carlo**, τεχνική η οποία ανήκει στην **εφαρμοσμένη πιθανότητα**. Με την τεχνική αυτή εκτιμάται ο ελάχιστος αριθμός σημείων εξυπηρέτησης για να διατηρηθούν το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής σε επιθυμητά επίπεδα. Έλλειψη γνώσης αυτών των τεχνικών ενδεχομένως να οδηγήσουν τον μηχανικό στην μέθοδο δοκιμής και λάθους που δεν είναι καθόλου ανταγωνιστική.

1.7 ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρθηκαν διάφορες γραφικές παραστάσεις για την παρουσίαση των δεδομένων, όπως διαγράμματα, ιστογράμματα, πολυγωνικές γραμμές, διαγράμματα σκεδασμού. Οι περισσότερες από τις αριθμητικές περιληπτικές περιγραφές των δεδομένων στους μηχανικούς είναι ουσιώδεις για την εφαρμογή των στατιστικών μεθόδων και πιθανοτήτων. Μεταξύ των πιο σπουδαίων είναι η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση, και ο συντελεστής συσχέτισης. Οι μηχανικοί διερευνούν συχνά μεταβλητές, οι οποίες εμπεριέχονται στα κατασκευαστικά τους μοντέλα ως διάφορα μεγέθη. Παίρνοντας δείγματα τιμών αυτών των μεταβλητών, απαιτείται η διερμήνευση αυτών και η διεξαγωγή επουσιωδών συμπερασμάτων. Οι γραφικές και αριθμητικές μέθοδοι εδώ αποτελούν το πρώτο βήμα για την λήψη απόφασης κάτω από αβεβαιότητες, πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή των πιθανοτήτων και των άλλων μεθόδων της στατιστικής.

Ακόμη, στο κεφάλαιο αυτό τονίζεται ο ρόλος και η σημασία των πιθανοτήτων και στατιστικής στην λήψη απόφασης του μηχανικού κάτω από αβεβαιότητες. Αναφέρθηκαν αρκετές εφαρμογές και υποδείχθηκε περιγραφικά ο τρόπος αντιμετώπισης των στοχαστικών παραμέτρων και γεγονότων που σχετίζονται με ένα έργο έτσι ώστε οι επιδράσεις αυτών να είναι μετρήσιμες σε πιθανοκρατική βάση. Αυτό διευκολύνει τον μηχανικό στο σωστό σχεδιασμό και ανάλογο επιλογή υλικών.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι μέθοδοι πιθανοτήτων και στατιστικής σε καμία περίπτωση δεν αντικαθιστούν την φυσική γνώση και εμπειρία του μηχανικού, ούτε μπορούν να απομακρύνουν την αβεβαιότητα. Διευκολύνουν όμως τον μηχανικό στις αποφάσεις του, αφού του παρέχουν την δυνατότητα εκτίμησης του κινδύνου και της αξιοπιστίας των έργων του για τις αντίστοιχες επιλογές του.

Ο μηχανικός ξεκινά την διερεύνηση της συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής, η οποία εμπλέκεται στην μελέτη του, με την περιγραφική στατιστική όπως περιληπτικά αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο. Βεβαίως, ο μηχανικός πρέπει να επεκτείνει τα δειγματικά του συμπεράσματα στον ευρύτερο πληθυσμό που σχετίζεται με το έργο του. Με αυτό ασχολείται το δεύτερο μέρος της στατιστικής, η **συμπερασματική στατιστική**, όπου τα συμπεράσματα συνοδεύονται και από μία πιθανότητα επιτυχίας. Αυτός είναι ένας ακόμη λόγος που ο μηχανικός πρέπει να καταλάβει πρώτα τις έννοιες των πιθανοτήτων και την μεθοδολογία τους πριν προχωρήσει στην συμπερασματική στατιστική. Στα επόμενα κεφάλαια αναπτύσσονται οι **έννοιες πιθανοτήτων** και τα βασικά εργαλεία της στατιστικής.

2 Βασικές Έννοιες Πιθανότητας

Περιγραφή Κεφαλαίου

- 2.1 ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ, ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ
ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.
 - 2.1.1 Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα
 - 2.1.2 Δειγματοχώρος και Δειγματοσημεία
 - 2.1.3 Σύνθετος Δειγματοχώρος
 - 2.1.4 Γεγονότα
 - 2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ
 - 2.2.1 Πράξεις Γεγονότων
 - 2.2.2 Ασυμβίβαστα Γεγονότα ή Αμοιβαίως Αποκλειόμενα
 - 2.2.3 Κανόνες Πράξεων Γεγονότων
 - 2.3 ΧΩΡΟΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ-ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ
 - 2.4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
 - 2.4.1 Κλασσική Θεωρία
 - 2.4.2 Θεωρία Σχετικής Συχνότητας
 - 2.4.3 Υποκειμενική Θεωρία
 - 2.5 ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
 - 2.6 ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ
 - 2.6.1 Ο Κανόνας του Γινομένου
 - 2.6.2 Μεταθέσεις
 - 2.6.3 Συνδυασμοί
 - 2.6.4 Μεταθέσεις (όταν όλα τα αντικείμενα δεν είναι ίδια)
 - 2.7 ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ
- ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ*
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ*
- ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ*
- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΓΙΑ ΛΥΣΗ*
-



Λυμένες Ασκήσεις

1) Ποιες από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς;

(α) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

(β) $(A \cup B) = (A \cap \bar{B}) \cup B$

(γ) $\bar{A} \cap B = A \cup B$

(δ) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

(ε) $(A \cap B) \cap (\bar{B} \cap C) = \emptyset$

Λύση

Αληθείς είναι μόνο οι (α), (β), (ε).

(α) Εφαρμόζοντας πρώτα την επιμεριστική ιδιότητα και μετά την προσεταιριστική έχουμε

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= [A \cap (A \cup C)] \cup [B \cap (A \cup C)] \\ &= [A] \cup [(B \cap A) \cup (B \cap C)] = [A \cup (B \cap A)] \cup (B \cap C) \\ &= A \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

(β) Παρόμοια με τις γνωστές ιδιότητες των πράξεων συνόλων,

$$(A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cup B) \cap S = (A \cup B)$$

(ε) Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα,

$$(A \cap B) \cap (\bar{B} \cap C) = A \cap (B \cap \bar{B}) \cap C = A \cap \{ \} \cap C = \{ \}$$

Ψευδείς οι (γ) και (δ).

(γ) $\bar{A} \cap B \neq A \cup B$

Διότι το αριστερό μέρος της ανίσωσης περιέχει δειγματοσημεία που δεν ανήκουν στο A ενώ το δεξιό μέρος περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν στο A .

(δ) Χρησιμοποιώ τον νόμο De Morgan,

$$\overline{(A \cup B) \cap C} = (\overline{A \cap B}) \cap C \neq \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

2) Ένα νόμισμα ρίχνεται μέχρι να εμφανισθεί η ένδειξη 'Γράμμα'. Να ευρεθεί ο Δειγματικός Χώρος του πειράματος.

Λύση

$$S = \{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma, KKK\Gamma, \dots\}$$

Ο δειγματικός χώρος είναι άπειρος αλλά αριθμήσιμος.

3) Θεωρούμε ότι η σειρά με την οποία αναφέρονται τα τέσσερα στοιχεία a , b , c , και d παριστάνουν το αποτέλεσμα ενός πειράματος. Αν A και B είναι τα γεγονότα που ορίζονται ως ακολούθως :

$$A = \{a \text{ είναι στην πρώτη θέση}\}, \quad B = \{b \text{ είναι στην δεύτερη θέση}\}$$

(α) Να καταγραφούν όλα τα δειγματοσημεία,

(β) Να καταγραφούν τα στοιχεία που ανήκουν στα γεγονότα $A \cap B$ και $A \cup B$.

Λύση

(α) Όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορώ να τοποθετήσω 4 διαφορετικά πράγματα στη σειρά είναι $4!=24$. Άρα ο δειγματικός χώρος περιέχει 24 δειγματοσημεία,

$$S = \{abcd, abdc, adbc, adcb, acbd, acdb, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba, bacd, badc, bcad, bcda, bdca, bdac, cbad, cbda, cdab, cdba, cabd, cadb\}$$

(β) $A = \{abcd, abdc, adbc, adcb, acbd, acdb\},$

$$B = \{abcd, abdc, dbac, dbca, cbad, cbda\},$$

$$A \cap B = \{abcd, abdc\},$$

$$A \cup B = \{abcd, abdc, adbc, adcb, acbd, acdb, dbac, dbca, cbad, cbda\}.$$

4) Ένα κουτί περιέχει N λάμπες από τις οποίες οι κ ($\kappa < N$) λάμπες είναι ελαττωματικές.

(α) Ελέγχονται οι λάμπες μία προς μία, μέχρι να βρεθεί μία ελαττωματική. Να αναγραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού.

(β) Υποτίθεται ότι οι λάμπες ελέγχονται μία προς μία, μέχρι να βρεθούν όλες οι ελαττωματικές. Να αναγραφεί ο νέος δειγματικός χώρος.

Λύση

Έστω το ενδεχόμενο $E_i = \{ \eta \text{ i λάμπα είναι ελαττωματική} \}$

$$(α) \quad S = \{ E_1, \overline{E_1} E_2, \overline{E_1} \overline{E_2} E_3, \dots, \overline{E_1} \overline{E_2} \dots \overline{E_{N-\kappa}} E_{N-\kappa+1} \}$$

$$(β) \quad S = \{ E_1 E_2 \dots E_\kappa, \overline{E_1} E_2 \dots E_{\kappa+1}, E_1 \overline{E_2} E_3 \dots E_{\kappa+1}, \dots, \overline{E_1} \overline{E_2} \dots \overline{E_{N-\kappa}} E_{N-\kappa+1} \dots E_N \}.$$

5) Κάλπη περιέχει έξι σφαίρες αριθμημένες με 1 έως 6. Στα πλαίσια τυχαίου πειράματος επιλέγονται τέσσερις σφαίρες και σημειώνεται η μέγιστη ένδειξη. Έστω A, B, Γ τα γεγονότα ότι η μέγιστη ένδειξη είναι 4, 5, 6 αντίστοιχα.

(α) Να αναγραφούν ο δειγματικός χώρος του πειράματος καθώς και τα σύνολα των γεγονότων A, B, Γ .

(β) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των γεγονότων A, B, Γ .

Λύση

(α) Θα μπορούσε κανείς να αναφέρει σαν δειγματικό χώρο το σύνολο όλων των δυνατών μέγιστων ενδείξεων του πειράματος $S = \{4, 5, 6\}$. Τα σημεία όμως του δειγματοχώρου αυτού δεν είναι ισοπίθανα, γι'αυτό μια λεπτομερέστερη καταγραφή των ενδεχομένων του πειράματος θα ήταν προτιμότερη:

$$S = \{(1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,3,4,5), (2,3,4,5), (1,2,3,6), (1,2,4,6), \dots, (2,4,5,6), (3,4,5,6)\}$$

Προφανώς τα γεγονότα A, B και Γ αντιστοιχούν στα ακόλουθα σύνολα,

$$A = \{(1,2,3,4)\},$$

$$B = \{(1,2,3,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5), (2,3,4,5)\},$$

$$\Gamma = \{(1,2,3,6), (1,2,4,6), \dots, (2,4,5,6), (3,4,5,6)\}.$$

(β) Όλα τα δειγματοσημεία του S είναι όλες οι διαφορετικές τετράδες, δηλαδή οι συνδυασμοί έξι πραγμάτων ανά τέσσερα,

$$C(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{30}{2} = 15$$

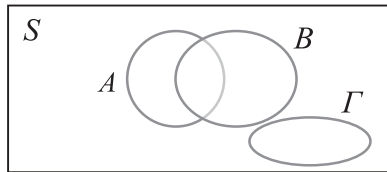
Αφού όλα τα δειγματοσημεία είναι ισοπίθανα, οι πιθανότητες των παραπάνω γεγονότων υπολογίζονται με βάση την κλασσική μέθοδο,

$$P(A) = \frac{1}{15} \quad P(B) = \frac{4}{15} \quad P(\Gamma) = \frac{10}{15}.$$



Ασκήσεις για λύση

- 1)** Τρία γεγονότα ενός δειγματικού χώρου φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα Venn.



Να αναπαράγεται το διάγραμμα σκιαγραφώντας τα ακόλουθα γεγονότα:

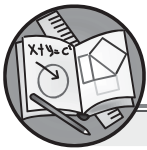
$$\bar{A}, (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}), (A \cap B) \cup \Gamma, \overline{B \cup \Gamma}.$$

- 2)** Έστω ότι με A συμβολίζω το γεγονός ότι ένα βάρος ξεπερνά τα 11 κιλά, έστω ότι B συμβολίζει το γεγονός ότι αυτό το βάρος είναι λιγότερο από 15 κιλά, και έστω ότι Γ συμβολίζει το γεγονός ότι το βάρος είναι μεταξύ 8 και 12 κιλά. Περιγράψατε τα ακόλουθα γεγονότα:

$$A \cup B, A \cap B, \bar{A}, A \cup B \cup \Gamma, \overline{A \cup \Gamma}, \\ A \cap B \cap \Gamma, \Gamma \cap \bar{B}, A \cup (B \cap \Gamma).$$

- 3)** Τρία γεγονότα A, B, Γ ανήκουν σε κάποιο δειγματοχώρο. Να συμβολίσετε με άλγεβρα γεγονότων τα γεγονότα,
- τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα
 - ακριβώς ένα από τα γεγονότα
 - το πολύ δύο από τα γεγονότα.
- 4)** Δύο σημεία επιλέγονται τυχαία στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r . Να βρεθεί η πιθανότητα ότι η χορδή που τα ενώνει έχει μήκος μικρότερο του r .
- 5)** Πόσες στήλες ΠΡΟΠΟ πρέπει να συμπληρώσει κανείς για να έχει σίγουρη επιτυχία;

- 6)** Σε ένα πάρτυ υπάρχουν 20 παιδιά. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτά έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;
- 7)** Ένα κουτί περιέχει 8 ζευγάρια παπούτσια. Επιλέγονται τυχαία έξι παπούτσια. Ποια η πιθανότητα να περιέχεται ένα σωστό ζευγάρι ανάμεσα στα έξι;
- 8)** Ένα τετράγωνο χωρίζεται με οριζόντιες γραμμές σε k ίσες ζώνες. Σε κάθε μία από αυτές τοποθετείται τυχαία ένα σημείο. Στη συνέχεια φέρονται κάθετες γραμμές έτσι ώστε το τετράγωνο χωρίζεται σε k ίσες στήλες. Ποιά η πιθανότητα ότι κάθε στήλη θα περιέχει μόνο ένα σημείο;



Λυμένα Προβλήματα

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

1) Καθυστέρηση έργου

Στην κατασκευή ενός δρόμου έχουμε τρεις φάσεις:

- α) εσκαφής,
- β) επίστρωση χαλικιού,
- γ) επίστρωση πίσσας.

Να εκφραστούν με συμβολισμό συνόλων τα γεγονότα ότι ο δρόμος ολοκληρώνεται

- (α) χωρίς καθυστέρηση,
- (β) με καθυστέρηση,
- (γ) χωρίς καθυστέρηση της εσκαφής και τουλάχιστον μία από τις άλλες δύο φάσεις καθυστερεί.

Λύση

Έστω τα γεγονότα

$$\begin{aligned} A &= \{\text{καθυστερεί η εσκαφή}\}, \\ B &= \{\text{καθυστερεί η επίστρωση χαλικιού}\}, \\ \Gamma &= \{\text{καθυστερεί η επίστρωση πίσσας}\}. \end{aligned}$$

Με τον νόμο De Morgan ή άλλες πράξεις προκύπτουν τα γεγονότα,

- (α) $\{\text{το οικοδομικό έργο συμπληρώνεται χωρίς καθυστέρηση}\} = \overline{(A \cup B \cup \Gamma)},$
- (β) $\{\text{το οικοδομικό έργο συμπληρώνεται με καθυστέρηση}\} = A \cup B \cup \Gamma,$
- (γ) $\{\text{το οικοδομικό έργο συμπληρώνεται χωρίς καθυστέρηση της εσκαφής και τουλάχιστον μία από τις άλλες δύο φάσεις καθυστερεί}\} = \overline{A} \cap (B \cup \Gamma).$

2) Μειοδοτικός διαγωνισμός

Ένας εργολάβος υποβάλλει προσφορές για τρία έργα A, B, και Γ. Να εκφραστούν με συμβολισμό συνόλων όλα τα δυνατά ενδεχόμενα του διαγωνισμού.

Λύση

Έστω τα γεγονότα

$$A = \{\text{ο εργολάβος αναλαμβάνει το Α έργο}\}$$

$$B = \{\text{ο εργολάβος αναλαμβάνει το Β έργο}\}$$

$$\Gamma = \{\text{ο εργολάβος αναλαμβάνει το Γ έργο}\}$$

$$E_k = \{\text{ο εργολάβος αναλαμβάνει κ έργα}\}.$$

Όλα τα δυνατά ενδεχόμενα του διαγωνισμού αντιστοιχούν στην ανάληψη 0, 1, 2 ή 3 έργα, δηλαδή,

$$E_0 = \overline{(A \cup B \cup \Gamma)}$$

$$E_1 = (A \cap \overline{B \cup \Gamma}) \cup (B \cap \overline{A \cup \Gamma}) \cup (\Gamma \cap \overline{A \cup B})$$

$$E_2 = (A \cap B \cap \overline{\Gamma}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \Gamma) \cup (\overline{A} \cap B \cap \Gamma)$$

$$E_3 = A \cap B \cap \Gamma$$

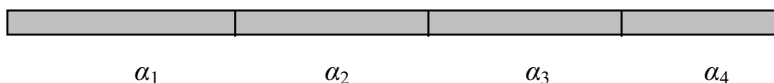
3) Τεμαχισμός ράβδου

Μια ράβδος μήκους α χωρίζεται τυχαία σε δύο κομμάτια. Υπολογίστε τις εξής πιθανότητες:

- (α) Το πρώτο κομμάτι να είναι μεγαλύτερο από $\alpha/4$.
- (β) Ένα από τα δύο κομμάτια να είναι μεγαλύτερο από $\alpha/4$.
- (γ) Ένα από τα δύο κομμάτια να είναι τουλάχιστον διπλάσιο του άλλου.

Λύση

- (α) Το σημείο χωρισμού της ράβδου μπορεί να βρίσκεται ισοπίθανα σε ένα από τα τέσσερα ίσα διαστήματά της, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.



Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του γεγονότος που μας ενδιαφέρει είναι ότι το σημείο χωρισμού βρίσκεται κάπου στα τρία τελευταία διαστήματα, $A = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Με την κλασσική μέθοδο η πιθανότητα είναι

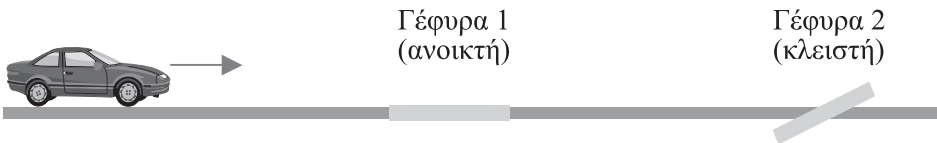
$$p = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Παρόμοια έχουμε,

- (β) πιθανότητα $p = 0,5$,
 (γ) πιθανότητα $p = 0,6666$.

4) Αστοχία γέφυρας από πλημμύρα

Σε μία σχετικά μικρή απόσταση ενός αυτοκινητόδρομου έχουμε δύο γέφυρες. Η κάθε γέφυρα, λόγω πλημμύρας, ενδέχεται να είναι κλειστή με πιθανότητα 0,3 ή 0,5 αντίστοιχα. Η πιθανότητα και οι δύο γέφυρες να είναι κλειστές είναι ως γνωστόν 0,1. Κάποια στιγμή ένα αυτοκίνητο ξεκινά να ταξιδέψει πάνω σε αυτόν τον αυτοκινητόδρομο. Να περιγραφεί με συμβολισμό συνόλων ο δειγματικός χώρος του πειράματος (σχετικά με την κατάσταση των γεφυρών ανοικτή-κλειστή) καθώς και το γεγονός ότι το αυτοκίνητο δεν θα μπορέσει να ταξιδέψει, λόγω πλημμύρας.



Λύση

Έστω το ενδεχόμενο $\Gamma_k = \{\eta \kappa \text{ γέφυρα είναι κλειστή}\}$. Ο δειγματοχώρος S είναι και αυτός ένα γεγονός (σίγουρο γεγονός) και μπορούμε να τον περιγράψουμε με άλγεβρα γεγονότων ως εξής:

$$S = (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\overline{\Gamma_1} \cap \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \cap \overline{\Gamma_2}) \cup (\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2})$$

Αν A είναι το γεγονός ότι έχουμε διακοπή στο ταξίδι, τότε

$$A = (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\overline{\Gamma_1} \cap \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \cap \overline{\Gamma_2}) \quad \text{ή} \quad A = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

$$P(A) = P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = P(\Gamma_1) + P(\Gamma_2) - P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0,3 + 0,5 - 0,1 = 0,7$$

Ακόμη παρατηρούμε ότι σε αυτή την άσκηση ο δειγματικός χώρος σαν σύνολο περιέχει τα δειγματοσημεία του προκύπτουν από το καρτεσιανό γινόμενο των

$$S_1 = \{\Gamma_1, \overline{\Gamma_1}\} \quad \text{και} \quad S_2 = \{\Gamma_2, \overline{\Gamma_2}\},$$

$$S = S_1 \times S_2 = \{(\Gamma_1, \Gamma_2), (\overline{\Gamma_1}, \Gamma_2), (\Gamma_1, \overline{\Gamma_2}), (\overline{\Gamma_1}, \overline{\Gamma_2})\}.$$



Προβλήματα για λύση

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

1) Ποιότητα τσιμέντου

Δείγματα τσιμέντου από τρεις βιομηχανίες ελέγχονται για να διαπιστωθεί η ποιότητά τους. Τα δείγματα ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες, σχετικά με το αν πληρούν ή όχι τις τεχνικές προδιαγραφές. Τα αποτελέσματα από 100 δείγματα έχουν ως εξής:

	Βιομηχανία 1	Βιομηχανία 2	Βιομηχανία 3
Δείγματα πληρούν τις προδιαγραφές	18	17	50
Δείγματα δεν πληρούν τις προδιαγραφές	2	3	10

Συμβολίζουμε με A το γεγονός ότι το δείγμα είναι από την βιομηχανία 1, και με B το γεγονός ότι το δείγμα πληροί τις προδιαγραφές. Να προσδιορίσετε τον αριθμό δειγμάτων που αντιστοιχούν στα γεγονότα $\bar{A} \cap B$, \bar{B} και $A \cup B$.

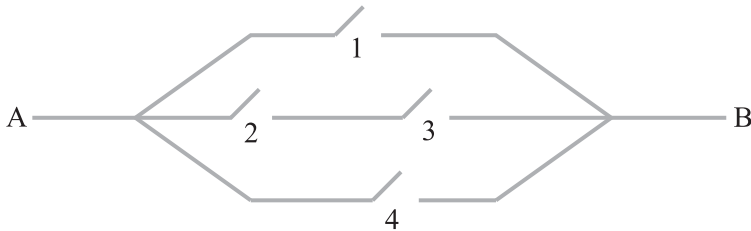
2) Διακόπτες εν σειρά

Σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα έχουμε δύο διακόπτες $\Delta 1$ και $\Delta 2$ εν σειρά. Ο κάθε διακόπτης ενδέχεται να είναι κλειστός ή ανοικτός. Κάποια στιγμή το κύκλωμα τίθεται σε λειτουργία. Να περιγραφεί με συμβολισμό συνόλων ο δειγματικός χώρος του πειράματος καθώς και το γεγονός ότι έχουμε διακοπή ρεύματος.

3) Μεταφορά ρεύματος

Στην γραμμή μεταφοράς ρεύματος συμβολίζουμε με Δ_k το γεγονός ότι ο k διακόπτης είναι ανοικτός.

- Να εκφράσετε με συμβολισμό γεγονότων το γεγονός $\{\text{τουλάχιστον ένας διακόπτης είναι ανοικτός}\}$.
- Να εκφράσετε με συμβολισμό γεγονότων το γεγονός μεταφοράς ρεύματος από το A στο B .



4) Διακοπή ύδρευσης

Το νερό στην πόλη φτάνει από τις δύο πηγές A και B, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δια μέσου του συστήματος των αγωγών 1, 2 και 3. Υποθέτουμε ότι η κάθε πηγή ξεχωριστά ικανοποιεί τις ανάγκες της πόλης. Έστω τα γεγονότα,

$$E_1 = \{\text{στερεύει η πηγή A}\},$$

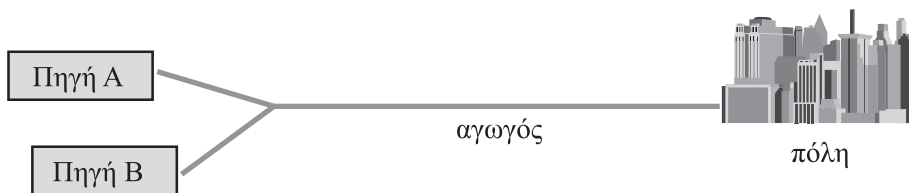
$$E_2 = \{\text{στερεύει η πηγή B}\}$$

$$E_3 = \{\text{διακοπή λόγω βλάβης στον αγωγό}\}.$$

Το γεγονός

$$E = \{\text{υπάρχει διακοπή νερού στην πόλη}\}$$

να το συμβολίσετε με άλγεβρα των γεγονότων E_1 , E_2 και E_3 .



5) Μειοδοτικός διαγωνισμός

Τρεις κατασκευαστικές εταιρείες, A, B και Γ κάνουν συχνά προσφορές σε μειοδοτικούς διαγωνισμούς για κατασκευή έργων. Έστω ότι A είναι το ενδεχόμενο η A εταιρία να κερδίσει ένα έργο, B το ενδεχόμενο η εταιρία B να κερδίσει ένα έργο, και Γ το ενδεχόμενο η εταιρία Γ να κερδίσει ένα έργο. Να δειχθούν τα διαγράμματα Venn που βασίζονται στις εξής περιπτώσεις:

- Οι εταιρίες A, B και Γ είναι οι μόνες που προσφέρονται για το ίδιο έργο.
- Οι εταιρίες A, B και Γ κάνουν προσφορά για το ίδιο έργο, για το οποίο υπάρχουν προσφορές και από άλλες εταιρίες.
- Οι εταιρίες A, B και Γ κάνουν προσφορά για διαφορετικά έργα.

6) Μπαλκόνι σε ποδοσφαιρικό γήπεδο

Σε ένα μηχανικό ανατίθεται η μελέτη της αξιοπιστίας του μπαλκονιού μιας πολυκατοικίας με θέα προς ένα ποδοσφαιρικό γήπεδο. Ο μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορούν να καθίσουν στο μπαλκόνι είναι 20. Το βάρος από κάθε άτομο μπορεί να είναι προσεγγιστικά 50 κιλά, 75 κιλά ή 100 κιλά.

- (α) Σχεδιάστε τον δειγματικό χώρο.
 (β) Δείξτε τα ακόλουθα γεγονότα σχετικά με τον αριθμό ατόμων και το συνολικό βάρος στο μπαλκόνι:

$A = \{\text{υπάρχουν περισσότερα από 16 άτομα στο μπαλκόνι}\},$

$B = \{\text{το ολικό βάρος στο μπαλκόνι είναι 150 κιλά}\},$

$\Gamma = \{\text{υπάρχουν περισσότερα από 15 άτομα με το μέγιστο βάρος}\}.$

7) Αντίσταση βάρους

Ένας βαρύς άνδρας 200 κιλών κινείται πάνω σε μία δοκό, όπως φαίνεται στο σύστημα του παρακάτω σχήματος. Στο σύστημα αυτό προκαλούνται αντιδράσεις στα ακραία σημεία της δοκού A και B αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$R_A + R_B = 200 \text{ κιλά.}$$

- (α) να ευρεθεί ο δειγματοχώρος όλων των δυνατών ζευγών (R_A, R_B) και να δοθεί μία γραφική του παράσταση με συντεταγμένες R_A και R_B .

Επίσης, στην περίπτωση που το βάρος του άνδρα είναι τυχαίο από 100 μέχρι 200 κιλά,

- (β) να ευρεθεί ο νέος δειγματοχώρος του πειράματος, και να δοθεί η γραφική του παράσταση,

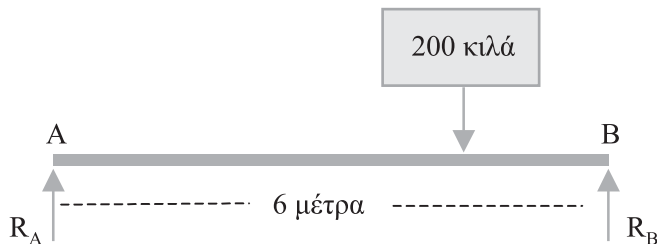
- (γ) να σχεδιαστεί στον δειγματοχώρο το γεγονός,

$E1 = \{\text{ο άνδρας βρίσκεται σε μία απόσταση 2 με 4 μέτρα από το σημείο A}\},$

- (δ) να σχεδιαστεί στον δειγματοχώρο το γεγονός,

$E2 = \{\text{ο άνδρας βρίσκεται σε μία απόσταση 3 με 5 μέτρα από το σημείο A}\}$

- (ε) να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(E1)$, $P(E2)$ και $P(E1 \cap E2)$



8) Καθίζηση σε γέφυρα

Οι πιθανότητες καθίζησης των στηριγμάτων a , b και c σε μία γέφυρα είναι

$$P(A) = 0.30, P(B) = 0.20 \text{ και } P(C) = 0.15 \text{ αντίστοιχα.}$$

Ακόμη είναι γνωστές οι πιθανότητες

$$P(A \cap B) = 0.08, P(A \cap C) = 0.05, P(B \cap C) = 0.05 \text{ και } P(A \cap B \cap C) = 0.03.$$

Να ευρεθούν οι πιθανότητες:

- μόνο ένα στήριγμα θα υποστεί καθίζηση,
- ακριβώς δύο στηρίγματα θα υποστούν καθίζηση,
- θα υπάρξει τουλάχιστον μία καθίζηση.

2

Βασικές Έννοιες Πιθανότητας**Λύσεις των Ασκήσεων και των Προβλημάτων****Λύσεις των Ασκήσεων**

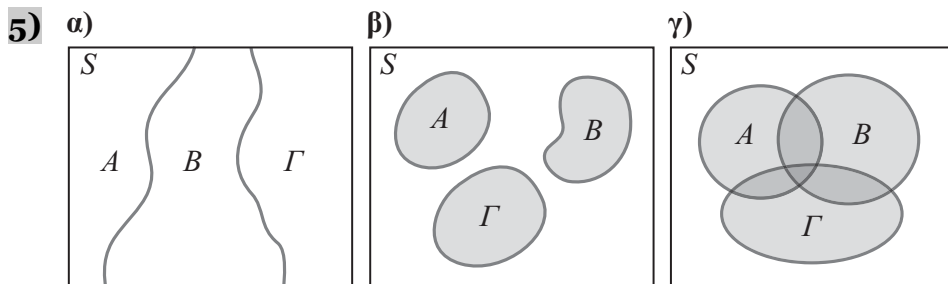
- 3)** $A \cup B \cup \Gamma, (A \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{\Gamma}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \Gamma), \overline{A \cap B \cap \Gamma}.$
- 4)** Έστω τα σημεία A, B . Αν το A κατέχει μια οιαδήποτε θέση στην περιφέρεια, τότε το B πρέπει να βρεθεί σε τόξο 60° εκατέρωθεν του A . Ο δειγματικός χώρος και οι ευνοϊκές περιπτώσεις εκφράζονται σε μοίρες, έτσι, σύμφωνα με την κλασσική μέθοδο έχουμε πιθανότητα $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.
- 5)** Όλες οι δυνατές $13^{\text{αδες}}$ στο ΠΡΟΠΟ δίνονται από το καρτεσιανό γινόμενο $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{13}$, όπου $S_1 = \{1, 2, x\}$. Άρα $n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{13} = 3^{13}$.
- 6)** Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{τουλάχιστον δύο από τα 20 παιδιά έχουν γενέθλια την ίδια μέρα}\}$ και $\bar{A} = \{\text{κανένα από τα 20 παιδιά δεν έχει γενέθλια την ίδια μέρα με κάποιο άλλο}\}$. Έτσι,
- $$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \dots \frac{346}{365}$$
- 7)** Όλες οι δυνατές εξάδες από 16 παπούτσια είναι οι συνδυασμοί $C(16, 6)$. Όλες οι ευνοϊκές περιπτώσεις όπου υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι είναι $C = (14, 4) \cdot 8 - 8$. Άρα, από την κλασσική μέθοδο προκύπτει η πιθανότητα
- $$\frac{C(14, 4) \cdot 8 - 8}{C(16, 6)} = \frac{1}{2}$$
- 8)** Ορίζουμε τα γεγονότα $A_1 = \{\text{στη ζώνη 1 το σημείο βρίσκεται σε μία στήλη}\}$, $A_i = \{\text{στη ζώνη } i \text{ το σημείο βρίσκεται σε στήλη διάφορη από την στήλη}\}$,

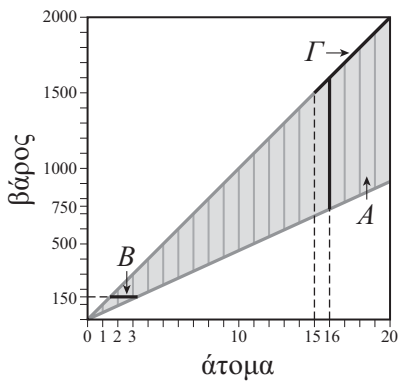
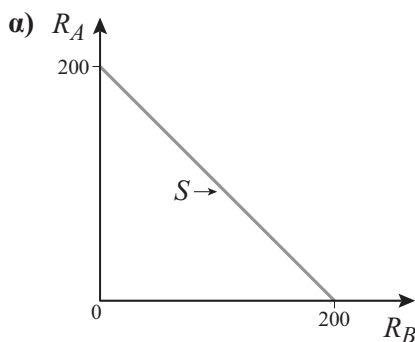
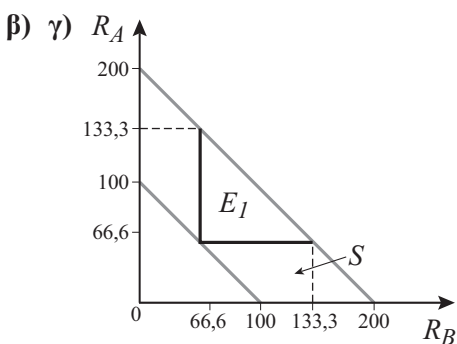
λη της $i-1, i-2, 1$ ζώνης} για $i = 2, 3, \dots, k$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) &= \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_k/A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) = \\ &= \frac{\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{\kappa-2}{\kappa} \dots \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa!}{\kappa^\kappa}. \end{aligned}$$

Λύσεις των Προβλημάτων

- 1)** $N(\bar{A} \cap B) = 67, \quad N(\bar{B}) = 15, \quad N(A \cup B) = 87.$
- 2)** $S = \{A_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\}$, όπου A_i είναι τα ενδεχόμενα ότι ο i διακόπτης είναι ανοικτός. Το γεγονός διακοπής ρεύματος, Δ , περιέχει τα ακόλουθα δειγματοσημεία,
 $\Delta = \{A_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2\}.$
- 3)** α) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$
 β) $\bar{A}_1 \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup \bar{A}_4.$
- 4)** $E = (E_1 \cup E_2) \cup E_3.$



6)**7)****β)**

δ) Παρόμοια με την γραφική παράσταση του ερωτήματος (γ).

ε) οι πιθανότητες προκύπτουν από τα σχηματικά εμβαδά της E_1 και E_2 .

8)

$$\alpha) P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2P(A \cap B) - 2P(A \cap \Gamma) - 2P(B \cap \Gamma) + 3P(A \cap B \cap \Gamma) = 0,3 + 0,2 + 0,15 - 0,16 - 0,10 - 0,10 + 0,09 = 0,38$$

$$\beta) P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - 3P(A \cap B \cap \Gamma) = 0,08 + 0,05 + 0,05 - 0,09 = 0,09.$$

$$\gamma) P(A \cup B \cup \Gamma) = 0,65 - 0,18 + 0,03 = 0,50.$$