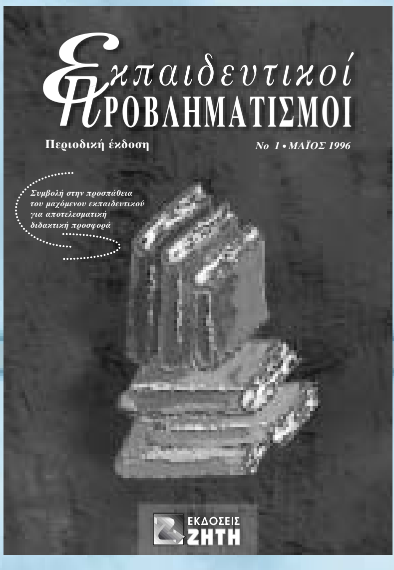
Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί

Περιοδική έκδοση

Νο 1 • ΜΑΪΟΣ 1996

*Συμβολή στην προσπάθεια
του μαχόμενου εκπαιδευτικού
για αποτελεσματική
διδακτική προσφορά*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ



Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί
Νο1 - Μάϊος 1996

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ • ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
Π. ΖΗΤΗ & Σια Ο.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ:
ΣΟΛΩΝΟΣ 79-81
Τηλ.- Fax: 031/825.453, 849.178
Θεσσαλονίκη 542 48

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Θεσσαλονίκης:
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
Τηλ.: 031/203.720 • Fax: 031/211.305
Θεσσαλονίκη 546 35

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Αθηνών:
«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»
Στοά του Βιβλίου (Πεσματζόγλου 5)
Αθήνα 105 64
Τηλ.-Fax: 01/32 11 097

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISSN 1106-9252

ΤΙΜΗ ΤΕΥΧΟΥΣ: 1.200 δρχ.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ - ΑΠΟΣΤΟΛΕΣ
ΑΝΝΗ ΖΗΤΗ
ΣΟΛΩΝΟΣ 79-81, 542 48 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
ΤΗΛ. 031. 864 961 - FAX: 031. 825 453

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

Χαιρετισμός

Ο** εκδοτικός μας οίκος, στην προσπάθειά του να συμβάλει στην εκπαιδευτική διαδικασία, αποφάσισε, εκτός από τις εκδόσεις των βοηθημάτων Γυμνασίου και Λυκείου και των Πανεπιστημιακών Συγγραμμάτων, να εκδίδει σε τακτά χρονικά διαστήματα το περιοδικό «Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ», που θα απευθύνεται στον εκπαιδευτικό αλλά και στο μαθητή και σπουδαστή. Η συμβολή αυτή θα επιδιώκεται με «συζήτηση» μέσα από τις σελίδες του περιοδικού. Θέλουμε να ελπίζουμε ότι θα αναπτυχθεί ένας εποικοδομητικός διάλογος, ο οποίος θα συμβάλει στην προσπάθειά μας αυτή. Για το σκοπό αυτό θα θέλαμε να σας παρακαλέσουμε να συμπληρώσετε και να μας επιστρέψετε το προσαρτημένο ερωτηματολόγιο, που θα βρείτε στην τελευταία σελίδα του περιοδικού.

Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 10.000 δρχ. για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.

Πελαγία Ζήτη

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. (031) 203.720, Fax: (031) 211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσματζόγλου 5)
  105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: (01) 32 11 097

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Η** έκδοση των «Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ», είναι μια σημαντική πρωτοβουλία του Εκδοτικού Οίκου ΖΗΤΗ στην προσπάθειά του να συμβάλει στην επιτυχία της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο.

Εμείς, οι επιστημονικοί υπεύθυνοι των «Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ», κατανοούμε τις δυσκολίες που έχει ένα τέτοιο εγχείρημα αλλά πιστεύουμε ότι με τη δική σας συμβολή θα μπορέσουμε να προσφέρουμε πολύτιμη βοήθεια στο μαχόμενο εκπαιδευτικό μας. Θα επιδιώξουμε:

- ***Οι «Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ» να αποτελέσουν στα χέρια σας ένα σημαντικό βοήθημα στην εκπαιδευτική πράξη και***
- ***να είναι ένας πρακτικός, χρήσιμος και σύντομος οδηγός, ο οποίος θα εξυπηρετεί καθαρά διδακτικούς σκοπούς, ενώ θα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και από τους μαθητές. Για το λόγο αυτό θα επιδιώκουμε τα παρουσιαζόμενα θέματα να προέρχονται, κατά προτεραιότητα, από ερεθίσματα και προτάσεις σας. Θεωρούμε αυτονόητο ότι οι προτάσεις σας, τις οποίες η Συντακτική Επιτροπή θεωρεί κατάλληλες, θα δημοσιεύονται επώνυμα.***

Για να γίνει πιο ευχάριστη η ενασχόλησή σας με τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα τους εμπλουτίσουμε με σύντομες αναφορές σε εντυπωσιακές επιστημονικές πληροφορίες, όπως π.χ. η απάντηση στην εικασία του Fermat, το πρόβλημα του όζοντος, τα CD στην εκπαιδευτική διαδικασία, το πρόβλημα της αυτόματης μετάφρασης κ. ά.

Περιμένοντας την ανταπόκρισή σας
Με εκτίμηση

Γεώργιος Παντελίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το "άμεσο περιβάλλον" της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,

- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

περιεχόμενα

Μαθηματικά

5	Γ. Παντελίδης	*Όριο συνάρτησης στο x_0 R*
7	Θ. Ξένος	*Γωνία δύο ευθειών*
8	Δ. Κραββαρίτης	*Εικασία Fermat*
9	Ε. Μπόρα-Σέντα	*Ομαδοποίηση - Ιστόγραμμα - Πολύγωνο Συχνοτήτων*
11	Χρ. Κουκουβίνος	*Συνδυαστική (Μεταθέσεις - Διατάξεις - Συνδυασμοί)*
13	Θ. Ξένος	*Μελέτη ύπαρξης ριζών με τη βοηθεία της ανάλυσης*
16	Γ. Παντελίδης	*Τύποι Cardano*
17	Δ. Παπακωνσταντίνου	*Ελκυστικότητα (Μια ελκυστική παρουσίαση των Μαθηματικών)*

Φυσική

19	Γ. Γιουβανούδης	*Η μεθοδολογία στις Ασκήσεις Φυσικής*
21	Π. Γιαννακουδάκης	*Αγωγοί σε γειτονία και η δράση τους σαν πυκνωτές*
23	Κ. Παπαστεφάνου	*Ραδόνιο: Μια ακόμη πυρηνική απειλή μέσα στα σπίτια μας*
25	Γ. Ατρείδης	*Μια απλή προσέγγιση στο έργο της Δύναμης Ελατηρίου*
28	Δ. Κυριάκος	*Μελανές Οπές*

Χημεία

29	Α. Γιαννακουδάκης	*Ελάττωση Τάσης Ατμών και Ανύψωση σημείου Ζέσης*
31	Γ. Μανουσάκης	*Στις Εξώθερμες Αντιδράσεις λέμε «ΝΑΙ» στις Ενδόθερμες τι λέμε;*
33	Κ. Τσίπης	*Το Γραμμομόριο (mole) - Μία θεμελειώδης χημική Μονάδα Μέτρησης*
37	Αικ. Γιούρη-Τσοχατζή	*Φυσικά και Χημικά Φαινόμενα*

Φιλολογικά

41	Δ. Φαρμάκης	*Θέμα Έκθεσης*
43	Ζ. Τσιρπανλής	*Η επικαιρότητα του Μεσαίωνα*
45	Κ. Κατσιμάνης	*Η κρίση*
36	Δ. Ψωϊνός	*Δομή και Διάρθρωση του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος* *Πηγή: Σ. Σταύρου, Η επαγγελματική εκπαίδευση στην Ελλάδα, CEDEFOP, 1994* *(Πίνακας Γενικού Ενδιαφέροντος)*

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0 R

Του **Γ. Παντελίδη,** Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Θα σχολιάσουμε τον ορισμό του πραγματικού ορίου συναρτήσεως σ' ένα σημείο x_0 R καθώς και την άρνησή του. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συναρτήσεως που δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $U(x_0, \alpha)$. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση f* ***έχει στο σημείο x_0 όριο λ*** **R** *και θα γράφουμε*

$$\lim_{x\ \ x_0} f(x) = \lambda,$$

όταν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε για κάθε x, με $0 < |x - x_0| < \delta$, *να ισχύει*

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Σχολιασμός του ορισμού:

- Η απαίτηση *«η συνάρτηση f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής*

$$U(x_0, \alpha) = (x_0 - \alpha, x_0) \cup (x_0, x_0 + \alpha)$$

(το οποίο ως εκ τούτου είναι υποχρεωτικά υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f) είναι απαραίτητη, για να υπάρχουν σημεία x του πεδίου ορισμού, διαφορετικά του x_0, ***οσοδήποτε κοντά στο x_0***. Π.χ. για τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{1 - x}$$

δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε το όριο στο σημείο $x_0 = 2$. Δεν πρέπει βέβαια να ξεχνάμε ότι το x_0 **δεν είναι απαραίτητα σημείο του πεδίου ορισμού της f**. Το πηλίκο διαφορών (βλ. Κεφάλαιο Διαφορικός Λογισμός), για παράδειγμα, δεν ορίζεται στο σημείο x_0, όπου εξετάζουμε την ύπαρξη της παραγώγου.

Σημείωση: Στη γενική περίπτωση, που στα πλαίσια του Λυκείου δεν εξετάζουμε, αρκεί να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της f οσοδήποτε κοντά στο σημείο x_0. Ένα τέτοιο σημείο ονομάζεται **σημείο συσσωρεύσεως** του πεδίου ορισμού της f.

- Ο ορισμός εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που ελέγχουμε αν ένας δοσμένος αριθμός λ είναι όριο της συναρτήσεως f στο σημείο x_0. Για τις περιπτώσεις που δε δίνεται ο αριθμός λ θα πρέπει να καταφύγουμε σε άλλες μεθόδους, π.χ. στη μελέτη περιπτώσεων (όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί), στη βοήθεια των ιδιοτήτων των ορίων κ.λπ.

- Η φράση:
  «για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε για κάθε x, με $0 < |x - x_0| < \delta$, *να ισχύει* $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$»

σημαίνει ότι: ο αριθμός λ είναι τέτοιος, ώστε ***οσοδήποτε κοντά του*** (που καθορίζεται από την έκφραση *«για κάθε* ε>0) βρίσκονται οι τιμές f(x) της συναρτήσεως για όλα τα x $U(x_0, \delta)$ (που καθορίζονται από τις σχέσεις $0 < |x - x_0| < \delta$).

Σημείωση: Επειδή στόχος μας είναι η αναζήτηση της ύπαρξης τιμών της συναρτήσεως f οσοδήποτε κοντά στο λ, για το λόγο αυτό το ε του ορισμού μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό.

- Επισημαίνουμε ότι η συνθήκη του ορισμού πρέπει να ικανοποιείται *για κάθε* ε>0. Ενώ για δοσμένο ε αρκεί να υπάρχει ένα δ, το οποίο εξαρτάται μόνο από το ε. Γι' αυτό πολλές φορές αντί δ γράφουμε δ(ε). Είναι φανερό ότι, αν η συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται για το δ(ε), τότε θα ικανοποιείται και για κάθε δ (ε) < δ(ε). Πράγματι, αφού κάθε x που ικανοποιεί την

$$0 < |x - x_0| < \delta\ (\varepsilon)$$

ικανοποιεί και την

$$0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

- Η λογική άρνηση του ορισμού είναι η εξής:
  Η συνάρτηση f δεν έχει στο σημείο x_0 όριο λ R, *όταν υπάρχει ένα ε>0 τέτοιο, ώστε για κάθε δ>0 να υπάρχει (τουλάχιστον) ένα x, με*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

για το οποίο να ισχύει

$$|f(x) - \lambda| \geq \varepsilon .$$

Σημείωση: Υπενθυμίζουμε ότι, η άρνηση μιας προτάσεως της μορφής *«για κάθε x ισχύει* p(x)» είναι *«υπάρχει (τουλάχιστον) ένα x για το οποίο δεν ισχύει* p(x)». Ενώ η άρνηση μιας προτάσεως της μορφής *«υπάρχει ένα x για το οποίο ισχύει* p(x)» είναι *«για όλα τα x δεν ισχύει* p(x)».

Το παράδειγμα που ακολουθεί βρίσκεται μέσα στο σχολικό βιβλίο και η μελέτη του γίνεται με τη βοήθεια των ακολουθιών (παράγρ. 5.2). Επειδή όμως το κεφάλαιο των ακολουθιών δεν περιέχεται στην εξεταστέα ύλη των Γενικών Εξετάσεων για το λόγο αυτό θα το μελετήσουμε με τη βοήθεια της αρνήσεως του ορισμού.

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = ημ\frac{1}{x}$$

δεν έχει όριο στο σημείο $x_0=0$.

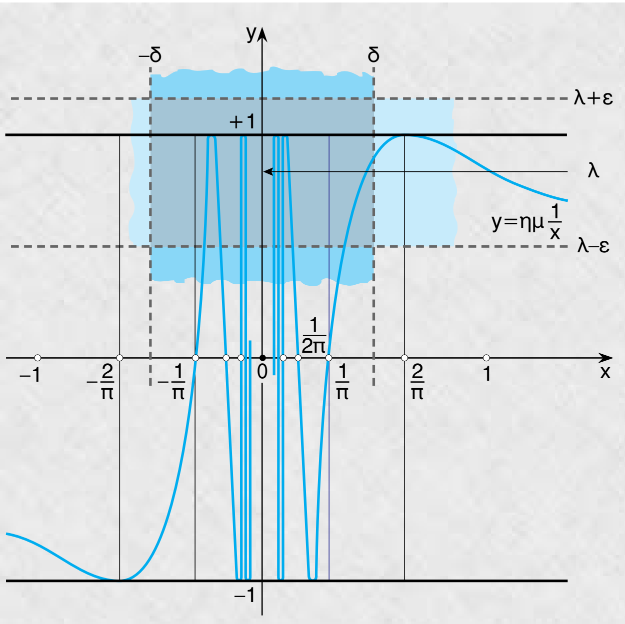
Απόδειξη: Το $x_0=0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f, η οποία ορίζεται στο σύνολο R*, δηλ. σε κάθε σύνολο της μορφής U(0, α), με $α>0$.
Επειδή δε γνωρίζουμε το όριο και η συνάρτηση είναι φραγμένη θα μελετήσουμε περιπτώσεις:
α) Αν μπορεί ένας αριθμός λπ0 να είναι όριο της f και
β) αν μπορεί ο $λ=0$ να είναι όριό της. (Μπορούμε, αν αυτό είναι απαραίτητο, να διακρίνουμε τις περιπτώσεις $λ>0$ και $λ<0$).

α) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει στο 0 όριο λπ0. Τότε για $0 < ε < \frac{|λ|}{2}$ και οποιοδήποτε $δ>0$ υπάρχει $x = \frac{1}{πκ}$, όπου κ είναι κατάλληλος φυσικός αριθμός, με

$$|x-0| = |x| = \frac{1}{πκ} < δ,$$

τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$\left|ημ\frac{1}{x} - λ\right| = |ημ(πκ) - λ| = |λ| > \frac{|λ|}{2} > ε.$$



Επομένως δεν είναι δυνατόν η συνάρτηση f να έχει στο σημείο 0 όριο λπ0

Σημείωση: Σύμφωνα με την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, για δύο θετικούς αριθμούς, εδώ ο $\frac{1}{π}$ και ο δ, υπάρχει πάντοτε φυσικός αριθμός κ τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{π} < κδ \text{ ή } \frac{1}{πκ} < δ,$$

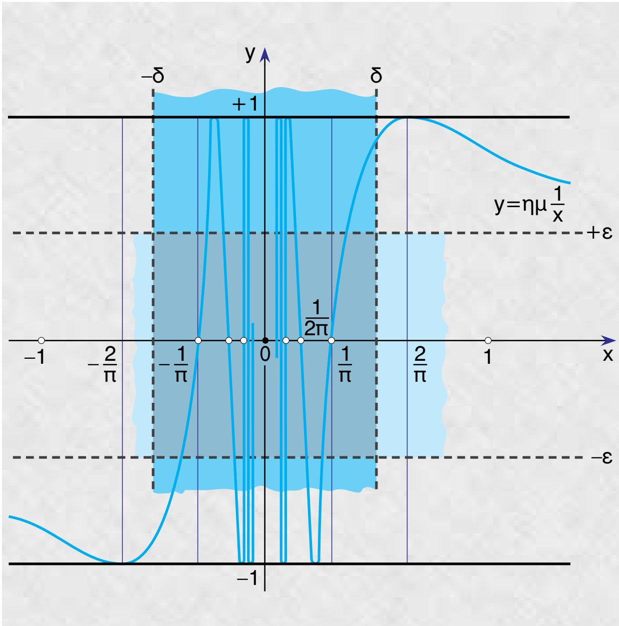
οπότε και για κάθε ν N, με $ν \geq κ$).

β) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει στο 0 όριο $λ = 0$. Τότε για $ε = \frac{1}{2} > 0$ και οποιοδήποτε $δ > 0$ υπάρχει $x = \frac{1}{(2κ+1)\frac{π}{2}}$, όπου κ είναι κατάλληλος φυσικός αριθμός, με

$$|x - 0| = |x| = \frac{1}{(2κ+1)\frac{π}{2}} < δ,$$

τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$\left|ημ\frac{1}{x} - 0\right| = \left|ημ\,(2κ+1)\frac{π}{2}\right| = 1 \geq \frac{1}{2} = ε\,.$$



Επομένως η συνάρτηση f δεν μπορεί στο σημείο 0 να έχει όριο το 0.

Εφαρμογή

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\,ημ\frac{1}{x}, & \text{αν } x \,π\, 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = ημ\frac{1}{x}$$

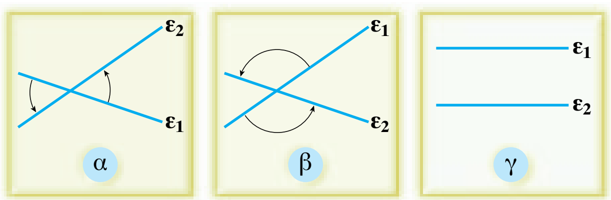
δεν έχει όριο στο σημείο αυτό.

ΓΩΝΙΑ δύο ΕΥΘΕΙΩΝ

Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία - Πιθανότητες

Του **Θ. Ξένου,** Καθηγητή Μαθηματικών Μ.Ε.

Ορισμός: *Ονομάζουμε* ***γωνία των ευθειών*** *ε_1 και ε_2, με τη σειρά που δίνονται, και τη συμβολίζουμε $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$ τη γωνία που διαγράφει η ε_1 αν στραφεί γύρω από το σημείο τομής τους A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε_2* (σχ. 1α, 1β). *Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, ως γωνία τους ορίζουμε την $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$* (σχ. 1γ).



Σχήμα 1

Επομένως ισχύουν οι

$$0 \le (\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_1}) < \pi$$

και

$$(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) + (\widehat{\varepsilon_2, \varepsilon_1}) = \pi,$$

όταν $\varepsilon_1 \# \varepsilon_2$.

Στο σχολικό βιβλίο αποδεικνύεται ότι:

Αν ε_1, ε_2 είναι δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2, που σημαίνει ότι **καμιά τους δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα** y y*, τότε η γωνία

$$\omega = (\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$$

δίνεται από την ισότητα.

$$(1) \qquad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}.$$

Δεν μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία ισότητα για να προσδιορίσουμε τη γωνία δύο ευθειών, από τις οποίες η μια είναι παράλληλη προς τον άξονα y y.

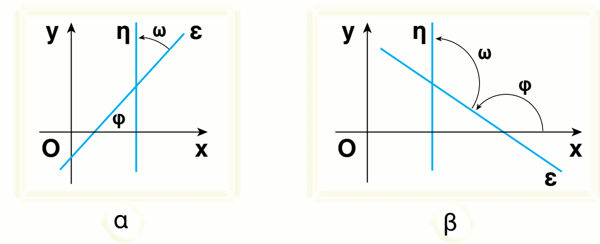
Θα μελετήσουμε εδώ την περίπτωση που μία από τις ευθείες είναι παράλληλη προς τον άξονα y y και θα δώσουμε μια ανάλογη με την (1) ισότητα για τις περιπτώσεις αυτές.

Ζητούμε λοιπόν τη γωνία $\omega = (\widehat{\varepsilon, \eta})$ των ευθειών ε και η, εκ των οποίων η η είναι παράλληλη προς τον άξονα y y, δηλ. ε # y y και η // y y.

Αν λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε και φ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x x, τότε είναι $\lambda = \varepsilon\varphi\varphi$ (σχ. 2).

Αν $\lambda > 0$ (σχ. 2α), που σημαίνει ότι $\varphi < \frac{\pi}{2}$, τότε η ζητούμενη γωνία ω είναι

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$



Σχήμα 2

Συνήθως εκείνο που μας ενδιαφέρει δεν είναι η γωνία ω, αλλά η εφαπτομένη της γωνίας αυτής, για την οποία (σε αναλογία με τον τύπο (1)) ισχύει:

$$(2) \qquad \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sigma\varphi\varphi = \frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi} = \frac{1}{\lambda}.$$

Αν $\lambda < 0$ (σχ. 2β), που σημαίνει ότι $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, τότε η ζητούμενη γωνία ω είναι

$$\omega = \frac{\pi}{2} + (\pi - \varphi).$$

Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει η ισότητα

$$(3) \qquad \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + (\pi - \varphi)\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = $$
$$= \sigma\varphi\varphi = \frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi} = \frac{1}{\lambda}.$$

Συμπέρασμα:

ε # y y **και** η // y y
$$\begin{cases} \text{για } \lambda > 0 \text{ είναι } \omega = \frac{\pi}{2} - \varphi \;\; \textit{και} \;\; \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\lambda} \\ \text{για } \lambda < 0 \text{ είναι } \omega = \frac{\pi}{2} + (\pi - \varphi) \;\; \textit{και} \;\; \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

* Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης ορίστηκε μόνο για ευθείες που δεν είναι παράλληλες προς τον άξονα y y.

Εφαρμογή

Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1: tx + 2(t-1)y - 1 = 0,$$
$$\varepsilon_2: (t-2)x - (3t-2)y + 3 = 0$$

σχηματίζουν σταθερή γωνία για κάθε πραγματική τιμή του t.

Απόδειξη:

- Αν $t \neq 1$ και $t \neq \frac{2}{3}$, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες προς τον άξονα y y και έχουν συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1 = -\frac{t}{2(t-1)} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{t-2}{3t-2}.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), για τη γωνία $\omega = (\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2} = (\text{μετά τις πράξεις}) = 1,$$

που σημαίνει ότι $\omega = \frac{\pi}{4}$.

- Αν $t = 1$, τότε η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη προς τον άξονα y y και ο συντελεστής της ε_2 είναι

$$\lambda_2 = \frac{t-2}{3t-2} = -1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την ισότητα (3), είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = -\frac{1}{\lambda_2} = 1,$$

που σημαίνει ότι $\omega = \frac{\pi}{4}$.

- Αν $t = \frac{2}{3}$, τότε η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς τον άξονα y y και ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_1 είναι

$$\lambda_1 = -\frac{t}{2(t-1)} = 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την ισότητα (2), είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\lambda_1} = 1,$$

που σημαίνει ότι $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η γωνία

$$\omega = (\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \frac{\pi}{4}.$$

ΕΙΚΑΣΙΑ FERMAT

Του **Δ. Κραββαρίτη,** Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ έχει άπειρες λύσεις (x, y, z) από φυσικούς αριθμούς, δηλ. από το σύνολο $\mathbb{N}^3$. οι οποίες ονομάζονται **Πυθαγόρειες τριάδες.**

Ο γάλλος μαθηματικός Pierre de **Fermat** (1601-1665) διετύπωσε το 1637 την εικασία ότι η ανάλογη εξίσωση

$$x^n + y^n = z^n$$

για $n \geq 3$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{N}^3$. Η εικασία, γνωστή ως "**τελευταίο θεώρημα Fermat**" προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών μεγάλων μαθηματικών, οι εργασίες των οποίων δεν έδωσαν απάντηση στην εικασία, άνοιξαν όμως το δρόμο για την ανάπτυξη νέων θεωριών. Η τελική απόδειξη της εικασίας δόθηκε πρόσφατα από τους μαθηματικούς **A. Wiles και R. Taylor** (1995) σε μια εργασία 128 σελίδων. Η πρώτη απόδειξη του A. Wiles, της οποίας η αναγγελία έγινε ακαριαία απ'όλα τα διεθνή πρακτορεία ειδήσεων, ήταν λάθος, ενισχύοντας έτσι την πεποίθηση ότι η απόδειξη της εικασίας είναι αδύνατη.

Ειδικές περιπτώσεις της εικασίας έχουν αποδειχθεί κατά καιρούς από μεγάλους μαθηματικούς, όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας:

1659	Fermat	για $n = 4$
1753	Euler	για $n = 3$
1825	Dirichler Legendre	για $n = 5$
1839	Lamé	για $n = 7$
1847	Kummer	για $n < 37$
1857	Kummer	για $n \leq 100$
1930-7	Vandiver	για $n < 617$

1954	D. Lehmer E. Lehmer Vandiver	για $n \leq 2500$
1976	Wagstaff	για $n \leq 125000$
1987	Tanner Wagstaff	για $n \leq 150000$
1991	Buhler Crandall Sompolski	για $n \leq 1000000$

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Της **Ε. Μπόρα-Σέντα,** Καθηγήτριας Μαθηματικών στο Α.Π.Θ.

Κατά την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, η οποία επιτυγχάνεται χωρίζοντας το διάστημα από τη μικρότερη μέχρι τη μεγαλύτερη παρατήρηση σε μικρότερα διαστήματα που λέγονται **κλάσεις**, εφαρμόζονται κάποιοι απλοί κανόνες για εξαγωγή καλύτερων συμπερασμάτων.

Κατ' αρχήν εκλέγεται ο αριθμός των κλάσεων· ο αριθμός αυτός συνήθως εκλέγεται αυθαίρετα, όμως ομαδοποίηση των ίδιων δεδομένων σε διαφορετικό αριθμό κλάσεων μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά συμπεράσματα [1].

Αφού ορισθεί ο αριθμός των κλάσεων, στη συνέχεια πρέπει να βρεθεί το πλάτος των κλάσεων και να ορισθούν οι κλάσεις, έτσι ώστε κάθε παρατήρηση να ανήκει σε μία και μόνο μία κλάση.

Όταν το πλάτος είναι το ίδιο για όλες τις κλάσεις, που είναι και η συνηθέστερη περίπτωση, υπολογίζεται διαιρώντας το εύρος του δείγματος που είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση δια του αριθμού των κλάσεων. Ο αριθμός που προκύπτει συνήθως στρογγυλεύεται προς τα επάνω σ' έναν ευκολόχρηστο αριθμό, ο οποίος θα είναι το κοινό πλάτος όλων των κλάσεων.

Το επόμενο βήμα, όπως αναφέρθηκε, είναι ο ορισμός των άκρων των κλάσεων.
Επιλέγεται ως αρχή της πρώτης κλάσης η μικρότερη παρατήρηση του δείγματος και ορίζεται η πρώτη κλάση έτσι ώστε η μικρότερη παρατήρηση να ανήκει σ' αυτήν ή σαν αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης ορίζεται μια τιμή λίγο μικρότερη της μικρότερης μέτρησης. Προσθέτοντας το πλάτος κάθε φορά, ορίζονται και οι υπόλοιπες κλάσεις μέχρις ότου συμπληρωθεί ο αριθμός των κλάσεων που επιλέχθηκε. Συνήθως χρησιμοποιούνται διαστήματα από αριστερά κλειστά και από δεξιά ανοικτά. Το τελευταίο διάστημα επειδή έχει γίνει μια στρογγύλευση του πλάτους προς τα πάνω, αν και ανοικτό από δεξιά, περιέχει τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού των κλάσεων είναι η χρησιμοποίηση για τον ορισμό των άκρων, αριθμών με δεκαδικά ψηφία μιας τάξεως μεγαλύτερης απ' αυτής των δεδομένων. Έτσι αν τα δεδομένα είναι δεκαδικοί με ένα δεκαδικό, τα άκρα των κλάσεων θα είναι αριθμοί με δύο δεκαδικά ψηφία.

Στην περίπτωση αυτή τα διαστήματα δε χρειάζεται να είναι κλειστά-ανοικτά, αφού δεν υπάρχει παρατήρηση που να συμπίπτει με τα άκρα των διαστημάτων.

Όλα τα παραπάνω διευκρινίζονται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Η περιεκτικότητα σε αλάτι gr/lt σε 24 διαφορετικά μέρη του Θερμαϊκού ήταν:

46	53	58	60	60	49	59	48	46	52	37	58
46	46	47	48	42	50	64	48	62	49	47	36

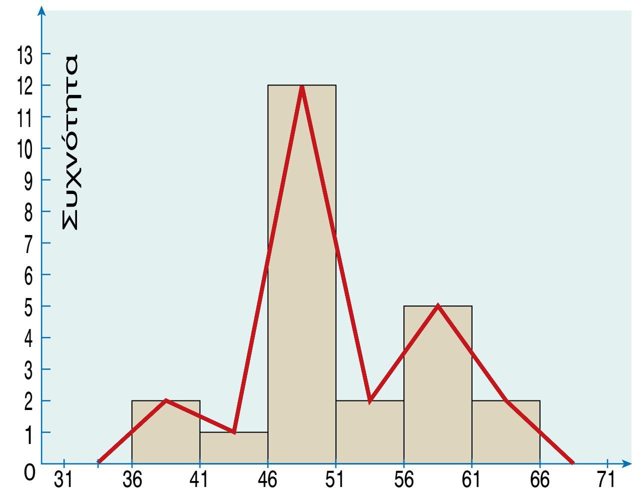
[2] Επιλέγεται ο αριθμός 6 σαν πλήθος κλάσεων. Το εύρος των κλάσεων υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{64-36}{6} = 4,66 \quad 5.$$

Οι 6 κλάσεις μπορούν να ορισθούν με πολλούς τρόπους: Ενδεικτικοί είναι οι παρακάτω:

α)

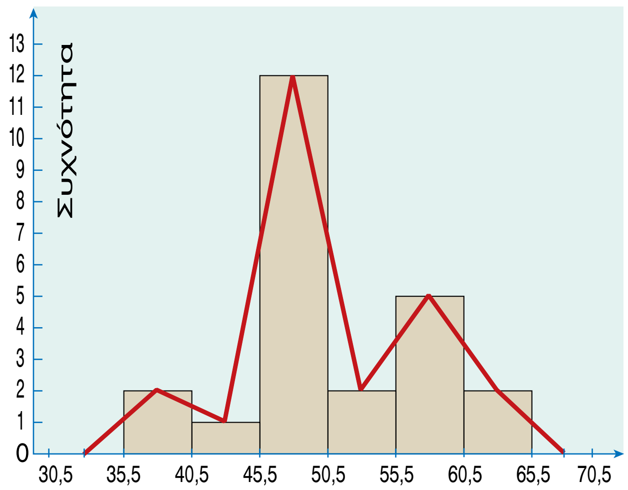
Κλάση	Συχνότητα κλάσης	Σχ. συχν. Κλάσης
[36, 41)	2	0,083
[41, 46)	1	0,042
[46, 51)	12	0,500
[51, 56)	2	0,083
[56, 61)	5	0,209
[61, 66)	2	0,083



[1] Ένας τύπος που δίνει έναν ενδεικτικό αριθμό κλάσεων, είναι ο: $k = 1 + 3,3 \log n$, όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος.
[2] Ο τύπος $k = 1+3,3 \log 24$, δίνει πλήθος κλάσεων 5,55.

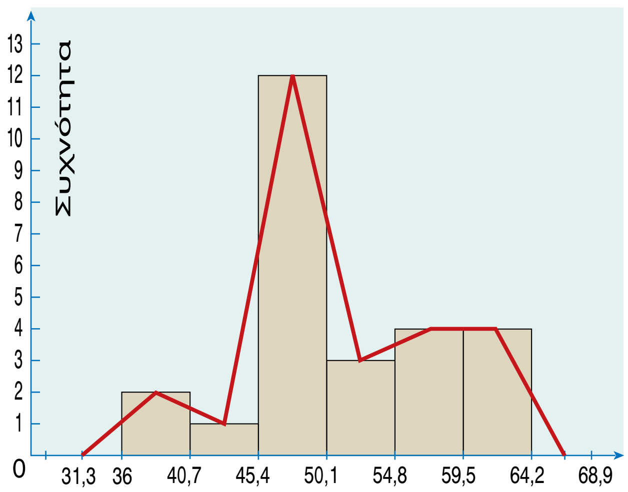
β)

Κλάση	Συχνότητα Κλάσης
35,5 - 40,5	2
40,5 - 45,5	1
45,5 - 50,5	12
50,5 - 55,5	2
55,5 - 60,5	5
60,5 - 65,5	2



Εάν ως εύρος κλάσεων οριζόταν ο αριθμός π.χ. 4,7, τότε οι κλάσεις στις οποίες θα ομαδοποιούνταν τα δεδομένα θα ήταν οι παρακάτω:

Κλάση	Συχνότητα Κλάσης
[36,0, 40,7)	2
[40,7 , 45,4)	1
[45,4 , 50,1)	12
[50,1 , 54,8)	3
[54,8 , 59,5)	4
[59,5 , 64,2)	4



Κάτω από κάθε ομαδοποίηση, παρατίθεται και το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων του οποίου η κατασκευή έχει γίνει όπως περιγράφεται στο βιβλίο της Γ γυμνασίου.

Από όσα αναφέρθηκαν, γίνεται φανερό ότι η ομαδοποίηση των δεδομένων εξαρτάται από αυτόν που κάνει τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων, όμως πρέπει να ακολουθούνται οι απλοί κανόνες που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Οι τρεις προηγούμενες ομαδοποιήσεις, αν και διαφορετικές, οδηγούν σε ιστογράμματα, από τα οποία μπορούμε να καταλήξουμε στα ίδια συμπεράσματα.

Τα συμπεράσματα που εξάγονται από ένα ιστόγραμμα δεν είναι αυστηρά στατιστικά, αλλά περισσότερο περιγραφικά. Έτσι σ' όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, αμέσως γίνεται αντιληπτό ότι στις περισσότερες περιοχές του Θερμαϊκού η περιεκτικότητα σε αλάτι είναι μεταξύ 46 και 50 gr/lt περίπου, ενώ η περιεκτικότητα μεταξύ 40 και 45 gr/lt περίπου, είναι η πιο σπάνια. Από το ιστόγραμμα μπορούν να ληφθούν και κάποιες άλλες πληροφορίες όπως οι παρακάτω.

Όταν έχει κατασκευαστεί ένα ιστόγραμμα **σχετικών** συχνοτήτων, με δεδομένα που έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις ίσου εύρους και θεωρώντας ότι το εμβαδόν όλων των ορθογωνίων μαζί είναι ίσο με 1, τότε το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με τη σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης και η κάθε παρατήρηση, έχει πιθανότητα να ανήκει στην επιμέρους κλάση, ίση με τη σχετική συχνότητα της κλάσης. Ακόμη, η κάθε παρατήρηση έχει πιθανότητα να ανήκει σε μία, δύο ή περισσότερες κλάσεις, ίση με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των κλάσεων αυτών.

Π.χ. για το παράδειγμα που αναφέρθηκε και για την πρώτη ομαδοποίηση, η πιθανότητα η περιεκτικότητα σε αλάτι μιας περιοχής του Θερμαϊκού να είναι μεταξύ 41 και 46 gr/lt είναι 0,042 όση η σχετική συχνότητα της κλάσης, ενώ η πιθανότητα η περιεκτικότητα σε αλάτι να είναι μικρότερη των 61 gr/lt είναι

$$0{,}083 + 0{,}042 + 0{,}500 + 0{,}083 + 0{,}209 = 0{,}917\cdot$$

ακόμη η πιθανότητα η περιεκτικότητα σε αλάτι να είναι μεταξύ 41 και 61 gr/lt είναι

$$0{,}042 + 0{,}500 + 0{,}083 + 0{,}209 = 0{,}834 \quad \text{κ.λπ.}$$

Όπως αναφέρεται στο βιβλίο της Γ Γυμνασίου σε κάθε ιστόγραμμα, ενώνοντας τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, λαμβάνεται μια τεθλασμένη γραμμή που λέγεται **πολύγωνο συχνοτήτων.** Για να κλείσει όμως το πολύγωνο συχνοτήτων στον οριζόντιο άξονα, προστίθενται δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, δεξιά και αριστερά των πραγματικών, με συχνότητα μηδέν.

Έτσι τα κέντρα αυτών των δύο υποθετικών κλάσεων, είναι τα σημεία που τέμνει το πολύγωνο συχνοτήτων τον οριζόντιο άξονα, όπως φαίνεται και στα παραπάνω σχήματα.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μεταθέσεις - Διατάξεις - Συνδυασμοί

Του **Χρ. Κουκουβίνου,** Επ. Καθηγητή στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

Δίνεται ένα σύνολο Α με ν διαφορετικά στοιχεία, έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Τότε ονομάζεται:

Μετάθεση των στοιχείων του Α, κάθε κατάταξή τους σε μια σειρά. Το πλήθος των μεταθέσεων ν διαφορετικών στοιχείων είναι

(1) $$P_\nu = \nu!$$

Διάταξη των ν στοιχείων του Α ανά κ, όπου $\kappa \leq \nu$, κάθε κατάταξη σε μια σειρά κ διαφορετικών στοιχείων που πήραμε από τα ν. Το πλήθος των διατάξεων ν στοιχείων ανά κ είναι

(2) $$\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

Διάταξη με επανάληψη των ν στοιχείων του Α ανά κ, κάθε κατάταξη κ στοιχείων που πήραμε από τα ν, όταν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι κ φορές (εδώ το κ μπορεί να είναι ίσο ή μικρότερο ή μεγαλύτερο του ν). Το πλήθος των διατάξεων αυτών είναι

(3) $$E_\kappa^\nu = \nu^\kappa.$$

Συνδυασμός των ν στοιχείων του Α ανά κ, κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία. Το πλήθος των συνδυασμών ν στοιχείων ανά κ είναι

(4) $$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!}$$

Θα σχολιάσουμε τους παραπάνω τύπους με παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε μια ομάδα ν ατόμων. Προκειμένου να σχηματίσουμε επιτροπή με κ από τα άτομα αυτά, ένα από τα οποία θα είναι πρόεδρος, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Επιλέγουμε πρώτα την επιτροπή με $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόπους και στη συνέχεια επιλέγουμε τον πρόεδρό της με κ τρόπους, οι δυνατοί τρόποι είναι $\binom{\nu}{\kappa}\cdot\kappa$.

2ος τρόπος: Επιλέγουμε πρώτα τον πρόεδρο της επιτροπής με ν τρόπους και στη συνέχεια επιλέγουμε από τα $\nu-1$ άτομα τα εναπομείναντα $\kappa-1$ μέλη της επιτροπής με $\binom{\nu-1}{\kappa-1}$ τρόπους, οι δυνατοί τρόποι είναι λοιπόν

$$\nu\cdot\binom{\nu-1}{\kappa-1}.$$

Εφαρμόζοντας κάθε φορά τη βασική αρχή απαρίθμησης, και επειδή οι δύο τρόποι πρέπει να δίνουν αναγκαστικά τον ίδιο αριθμό επιτροπών παίρνουμε

$$\binom{\nu}{\kappa}\cdot\kappa = \nu\cdot\binom{\nu-1}{\kappa-1} \quad \text{ή} \quad \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa}\cdot\binom{\nu-1}{\kappa-1}.$$

Η τελευταία ισότητα είναι αναγωγικός τύπος, που σε κ βήματα δίνει:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa}\cdot\binom{\nu-1}{\kappa-1} = \frac{\nu}{\kappa}\cdot\frac{\nu-1}{\kappa-1}\cdot\binom{\nu-2}{\kappa-2} = \ldots =$$
$$= \frac{\nu}{\kappa}\cdot\frac{\nu-1}{\kappa-1}\ldots\frac{\nu-\kappa+1}{1},$$

από την οποία παίρνουμε την ισότητα (4).

Παράδειγμα 2

Με πόσους τρόπους 9 άτομα μπορούν να χωριστούν σε τρεις ομάδες των τριών ατόμων;

Λύση:

Η πρώτη ομάδα μπορεί να επιλεγεί με $\binom{9}{3}$ τρόπους (συνδυασμοί 9 στοιχείων ανά 3), η δεύτερη με $\binom{6}{3}$ και η τρίτη με $\binom{3}{3} = 1$ τρόπο.

Εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα επιμέρους αυτά αποτελέσματα. Επειδή όμως δε μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα επιλεγεί η ομάδα πρέπει να διαιρέσουμε το προηγούμενο γινόμενο με 3! Επομένως υπάρχουν

$$\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 1}{3!} = 280 \quad \text{τρόποι.}$$

Μπορούμε ν' αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό και με διαφορετικό τρόπο σκέψης.

Παίρνουμε τυχαία ένα άτομο το οποίο επιλέγει τα άλλα δύο άτομα της ομάδας του με $\binom{8}{2}$ τρόπους. Από τα υπόλοιπα 6 παίρνουμε πάλι τυχαία ένα άτομο που επιλέγει τα άλλα δύο της ομάδας του με $\binom{5}{2}$ τρόπους. Τέλος είναι φανερό ότι τα υπόλοιπα 3 άτομα που απομένουν αποτελούν την τρίτη ομάδα. Επομένως υπάρχουν

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 1 = 280$$

τρόποι.

Ένας τρίτος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να ερ-

γαστούμε είναι ο εξής:
Έστω

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), (\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$$

ένας από τους x διαφορετικούς τρόπους χωρισμού των 9 ατόμων σε τριάδες.

Μεταθέτοντας τις τριάδες μεταξύ τους, παίρνουμε για τον τρόπο αυτό $3!$ διαφορετικές μεταθέσεις των 9 ατόμων.

Μεταθέτοντας τα άτομα σε κάθε τριάδα, παίρνουμε για τον ίδιο τρόπο $3!$ διαφορετικές μεταθέσεις για κάθε τριάδα, δηλ. συνολικά για τις τρεις τριάδες $3!\cdot3!\cdot3!$.

Έτσι από το συγκεκριμένο τρόπο παίρνουμε $3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!$ διαφορετικές μεταθέσεις των 9 ατόμων. Επομένως θα ισχύει

$$x\cdot3!\cdot3!\cdot3!\cdot3! = 9!\ ,$$

από όπου παίρνουμε

$$x = \frac{9!}{3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!} = 280 \text{ τρόπους.}$$

Παράδειγμα 3

Τρεις επιστολές τοποθετούνται τυχαία σε τρείς φακέλους. Καταγράψτε τα στοιχεία του δειγματικού χώρου. Ποιά είναι η πιθανότητα καμιά επιστολή να μην τοποθετηθεί στο σωστό φάκελο;

Λύση:

Αν η σειρά των φακέλων είναι 123, τότε η σειρά των επιστολών είναι μια **μετάθεση** των αριθμών 1, 2, 3 και επομένως ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$\Omega = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$, πλήθος στοιχείων $3! = 6$.

Αν συμβολίσουμε

A_i = {η επιστολή i τοποθετείται στον i φάκελο}, $i=1, 2, 3$, και

A = {καμιά επιστολή δεν τοποθετείται στο σωστό φάκελο}, τότε

A = {μια τουλάχιστον επιστολή τοποθετείται στο σωστό φάκελο} και ισχύει

$$P(A) = 1 - P(A\ )$$

Είναι όμως γνωστό ότι (βλ. βιβλίο σελ. 226, ασκ. 1, ομάδας Β).

$$P(A\ ) = P(A_1\ \ A_2\ \ A_3) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1\ \ A_2) - P(A_1\ \ A_3) -$$
$$- P(A_2\ \ A_3) + P(A_1\ \ A_2\ \ A_3).$$

Εξάλλου είναι

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{6}\ ,$$

$$P(A_1\ \ A_2) = P(A_1\ \ A_3) = P(A_2\ \ A_3) = \frac{1}{6}$$

και

$$P(A_1\ \ A_2\ \ A_3) = \frac{1}{6}\ .$$

Επομένως

$$P(A\ ) = 3\cdot\frac{2}{6} - 3\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}\ ,$$

που σημαίνει ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A) = 1 - P(A\ ) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = 0{,}333.$$

Πράγματι, από το δειγματικό χώρο διαπιστώνουμε ότι $A = \{231, 312\}$, που σημαίνει ότι δύο είναι οι ευνοϊκές περιπτώσεις.

Σημείωση: Στη γενική περίπτωση όπου ν επιστολές πρόκειται να τοποθετηθούν σε ν φακέλους, η πιθανότητα καμιά επιστολή να μην τοποθετηθεί στο σωστό φάκελο δίνεται από το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu} (-1)^{\kappa}\frac{1}{\kappa!}\ .$$

Για $\nu=3$ παίρνουμε πράγματι το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 4

Έστω ότι ανελκυστήρας (ασανσέρ) ν-όροφου κτιρίου ξεκινά από το ισόγειο με κ άτομα ($\kappa \le \nu$). Να υπολογιστεί η πιθανότητα αποβίβασης και των κ ατόμων σε διαφορετικούς ορόφους.

Λύση:

Σε κάθε αποβίβαση των κ ατόμων $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ στους ν ορόφους $\{o_1, o_2, ..., o_\nu\}$ αντιστοιχεί μια **διάταξη με επανάληψη** των ν ορόφων ανά κ

$$\{o_{j_1}, o_{j_3}, ..., o_{j_\kappa}\},$$

όπου o_{j_τ} είναι ο όροφος στον οποίο αποβιβάζεται το άτομο α_τ, $\tau=1, 2, ..., \kappa$.

Ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω, που περιλαμβάνει τις αποβιβάσεις των κ ατόμων στους ν ορόφους είναι

$$N(\Omega) = E^{\nu}_{\kappa} = \nu^{\kappa},$$

δηλ. ίσος με τον αριθμό των διατάξεων με επανάληψη των ν ανά κ. Αν τώρα συμβολίσουμε

A = {τα κ άτομα αποβιβάζονται σε διαφορετικούς ορόφους },

τότε ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχόμενου A είναι

$$N(A) = \Delta^{\nu}_{\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}\ ,$$

δηλ. ίσος με τον αριθμό των **διατάξεων** των ν ανά κ (χωρίς επανάληψη).
Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{\nu^{\kappa}}\cdot\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}\ .$$

Ειδική περίπτωση: Για $\nu=7$ και $\kappa=5$ παίρνουμε

$$P(A) = \frac{7!}{7^5\cdot2!}\quad 15\%$$

(βλ. βιβλίο, άσκ. 6 ομάδας Β, σελ 233). ◆

ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΡΙΖΩΝ
με τη βοήθεια της ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Του **Θ. Ξένου,** Καθηγητή Μαθηματικών Μ.Ε.

Σ τα Μαθηματικά της Γ Λυκείου οι μαθητές διδάσκονται πολλές νέες και "λεπτές" έννοιες. Για τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών αυτών μπορούμε να παρουσιάσουμε ομάδες από προβλήματα που ανήκουν σε διαφορετικά κεφάλαια και έχουν κάποια "συγγένεια" μεταξύ τους.

Στο σημερινό μας προβληματισμό θα ***μελετήσουμε την ύπαρξη και την εύρεση ριζών εξισώσεων με τη βοήθεια της Ανάλυσης****. Φυσικά μιλάμε για εξισώσεις των οποίων η λύση δεν επιτυχάνεται με τις γνωστές μεθόδους από προηγούμενες τάξεις. Θα στηριχθούμε κυρίως στα* ***Θεωρήματα Bolzano, Rolle*** *και* ***μέσης τιμής του Διαφορικού λογισμού, τα κριτήρια μονοτονίας*** *και ακροτάτων καθώς και την* ***κυρτότητα συνάρτησης****.*

● Ύπαρξη ρίζας

Θεώρημα Bolzano

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α, β).

Επισήμανση: Το διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, αρκεί να είναι υποσύνολό του.

Παράδειγμα 1

Ν' αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$(e^{\lambda} + 1)\xi^{15} = (\lambda - 3)\xi + 3$$

για κάθε πραγματική παράμετρο λ.

Απόδειξη

Αρκεί λοιπόν η εξίσωση

$$(e^{\lambda} + 1)x^{15} - (\lambda - 3)x - 3 = 0$$

να έχει μια ρίζα (όχι απαραίτητα μοναδική) $\xi \in (0, 1)$.

Η συνάρτηση $f(x) = (e^{\lambda} + 1)x^{15} - (\lambda - 3)x - 3$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και

$$f(0) = -3 < 0 \quad \text{και} \quad f(1) = e^{\lambda} - \lambda + 1 > 0,$$

που σημαίνει $f(0)\cdot f(1)<0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξισώσεως $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

Σημείωση 1: Η ύπαρξη λύσης είναι δεδομένη από την πρόταση *"Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα"* και για την περίπτωση εξισώσεων 3ου βαθμού υπάρχουν **οι τύποι G. Cardano** (βλέπε σε άλλη θέση του παρόντος τεύχους).

Σημείωση 2: Για την απόδειξη της ανισότητας

$$e^{\lambda} - \lambda + 1 > 0$$

πρέπει να καταφύγουμε στη μελέτη των ακροτάτων της συναρτήσεως

$$g(\lambda) = e^{\lambda} - \lambda + 1,$$

απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτή έχει ελάχιστο το $g(0) = 2$. Επομένως. για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(\lambda) \geq 2 > 0$.

➧ Με τη βοήθεια του θεωρήματος Bolzano μπορούμε να μελετήσουμε και τις περιπτώσεις όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διαστήματα της μορφής

$(\alpha, \beta]$ ειδικότερα της μορφής $(-\infty, \beta]$,
$[\alpha, \beta)$ ειδικότερα της μορφής $[\alpha, +\infty)$ και
(α, β) ειδικότερα της μορφής $(-\infty, +\infty)$.

Στις περιπτώσεις αυτές εργαζόμαστε σύμφωνα με τις ακόλουθες εφαρμογές:

Εφαρμογή 1: *Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα (α, β), υπάρχουν τα*

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x)$$

$$\text{και} \quad \left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x)\right) < 0,$$

τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α, β).

Σημείωση: Όταν για το όριο γράφουμε >0 (αντ. <0), τότε εννοούμε και τις περιπτώσεις που αυτά είναι $+\infty$ (αντ. $-\infty$).

Απόδειξη:

Θεωρούμε την περίπτωση

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) < 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) > 0.$$

Επειδή $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) < 0$, σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων, υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $f(\gamma) < 0$. Αντίστοιχα, επειδή $\lim_{x\to\beta^-} f(x)>0$, υπάρχει $\delta \in (\alpha, \beta)$ με $f(\delta) > 0$.

Επομένως, αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \delta]$ και ισχύει $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(\gamma, \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$.

Όμοια εργαζόμαστε και στην περίπτωση

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) < 0.$$

Σημείωση: Κατά την απόδειξη δεν έχει αναφερθεί ότι $\gamma<\delta$. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο (αν και πάντοτε είναι δυνατόν), γιατί και στην περίπτωση που είναι $\delta < \gamma$ η ρίζα θα ανήκει στο διάστημα $(\delta, \gamma) \subseteq (\alpha, \beta)$.

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^x = \alpha x + \beta, \quad (\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}),$$

έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη

Η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x - \alpha x - \beta$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ και επειδή $\pi > 1$, είναι

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^x = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^x = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, οπότε υπάρχει $x_1 < 0$ με $f(x_1) > 0$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, οπότε υπάρχει $x_2 > 0$ με $f(x_2) < 0$.

Επομένως ισχύει $f(x_1)f(x_2) < 0$, το οποίο εξασφαλίζει, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, την ύπαρξη ρίζας της εξισώσεως $f(x) = 0$ στο διάστημα $(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$.

Εφαρμογή 2:

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta)$, υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$ και

$$f(\alpha)\cdot\left(\lim_{x \to \beta^-} f(x)\right) < 0,$$

τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο διάστημα (α, β).

Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνη της εφαρμογής 1, όπου το $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$ είναι ίσο με $f(\alpha)$ και αυτό γιατί η f είναι συνεχής στο α.

Ανάλογη είναι και η περίπτωση που αναφέρεται στο διάστημα $(\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(e^\lambda + 1)x^{15} - \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[1, 2)$.

Απόδειξη:

Η συνάρτηση

$$f(x) = (e^\lambda + 1)x^{15} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2)$ και ισχύει

$$f(1) = e^\lambda + 1 - 1 = e^\lambda > 0.$$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (1, 2)$ με $f(x_1) < 0$.

Επειδή $f(1)\cdot f(x_1) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, x_1) \subseteq [1, 2)$.

- Μπορούμε να μελετήσουμε την ύπαρξη ρίζας της εξισώσεως $f'(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) με τη βοήθεια του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, εφόσον ισχύουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις.

Θεώρημα Rolle: *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α, β).*

Σημείωση: Η ρίζα αυτή δεν είναι δυνατόν πάντοτε να υπολογιστεί.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = (x-1)e^x - (3-e)x^2 + (2-e)x$$

έχει τοπικό ελάχιστο στο διάστημα (0, 1).

Απόδειξη:

Για τον προσδιορισμό των στάσιμων σημείων της $F(x)$, θα αναζητήσουμε τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου:

$$F'(x) = xe^x + 2(e-3)x + 2 - e.$$

Δεν υπάρχει δυνατότητα επίλυσης της εξισώσεως $F'(x) = 0$ και η συνάρτηση $F'(x)$ δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, ώστε να διαπιστώσουμε την ύπαρξη ρίζας της στο διάστημα αυτό.

Ισχύει όμως

$$F(0) = F(1) = -1$$

και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ για το οποίο ισχύει

$$F'(\xi) = \xi e^\xi - 2(e-3)\xi + 2 - e = 0.$$

Η δεύτερη παράγωγος της $F(x)$, η $F''(x) = e^x(1+x)+2e-6$, είναι θετική για κάθε $x \in [0, 1]$, αφού

$$e^x(1+x) + 2e - 6 > 1 + 2e - 6 = 2e - 5 > 0.$$

Έτσι έχουμε $F'(\xi) = 0$ και $F''(\xi) > 0$, που σημαίνει ότι στο σημείο $\xi \in (0,1)$ η $F(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο.

- Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων μπορούμε να εντοπίσουμε διαστήματα στα οποία είναι δυνατόν να υπάρχει ρίζα εξισώσεως και να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξή της με μια από τις προηγούμενες μεθόδους.

Για παράδειγμα, αν κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \varepsilon\varphi x$ (υπάρχουν πρότυπα για τη συνάρτηση αυτή στο εμπόριο) και την ευθεία $y = \frac{3}{2}x$, εντοπίζουμε στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ μια ρίζα της εξισώσεως $\varepsilon\varphi x = \frac{3}{2}x$. Πράγματι, για τη συνάρτηση

$$f(x) = \varepsilon\varphi x - \frac{3}{2}x$$

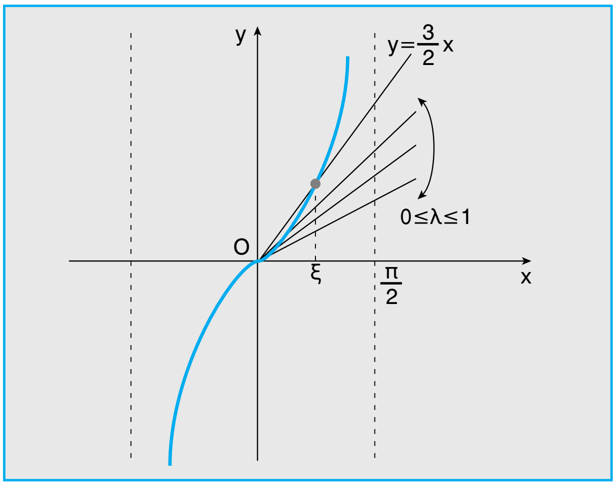
έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{3\pi}{8} < 0$$

και

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty - \frac{3}{2} = +\infty,$$

που σύμφωνα με την εφαρμογή 2 και το παραδ. 3, σημαίνει ότι η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \frac{3}{2}x$ έχει μια ρίζα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Τι θα συνέβαινε, αν η ευθεία ήταν η $y = \lambda x$ με $0 \le \lambda \le 1$; Η ευθεία $y = \lambda x$ τέμνει τη γραφική παράστασης της y=εφx μόνο στο σημείο $(0, 0)$ και δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής τους στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (βλ. σχ.). Δεν μπορούμε άλλωστε να χρησιμοποιήσουμε την εφαρμογή 2.

Μοναδικότητα ρίζας

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η ρίζα είναι μοναδική. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι "ένα προς ένα" και κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x x, εδώ ο άξονας x x, τέμνει τη συνάρτηση το πολύ σ' ένα σημείο.

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x + \ln(x^2 + 1) = 0$$

έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη:

Η εξίσωση έχει την προφανή ρίζα $x = 0$. Η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f\ (x) = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} > 0$$

για κάθε x $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και γι' αυτό έχει τη μοναδική ρίζα $x = 0$.

- Αν η συνάρτηση f έχει στο διάστημα I ολικό ακρότατο μόνο στο σημείο x_0 I, τότε η εξίσωση

$$f(x) = f(x_0)$$

έχει στο I μοναδική ρίζα το x_0, αφού για κάθε άλλο x I θα ισχύει $f(x) > f(x_0)$ (αντ. $f(x) < f(x_0)$) αν πρόκειται για ελάχιστο (αντ. για μέγιστο).

Σημείωση: Όταν το διάστημα I δεν είναι ανοιχτό, ο έλεγχος για ολικό ακρότατο, εφόσον αυτός γίνει με την βοήθεια των παραγώγων, πρέπει να λάβει υπόψη τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος.

Παράδειγμα 6

Να λύσετε την εξίσωση $e^{\frac{x}{e}} = x$.

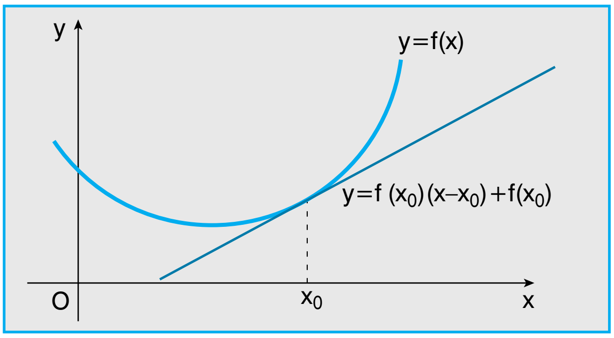
Λύση:

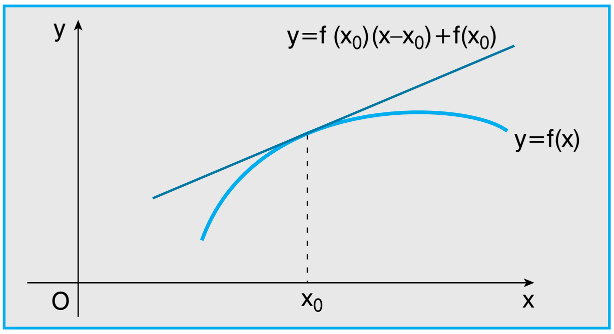
Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{x}{e}} - x$ έχει, κατά τα γνωστά, στο σημείο $x=e$ ολικό ελάχιστο $f(e) = 0$. Ο e είναι, σύμφωνα με το παραδ. 5, η μοναδική ρίζα της παραγώγου $f\ (x) = \frac{1}{e}e^{\frac{x}{e}} - 1$, δηλ. της εξίσωσης $\frac{1}{e}e^{\frac{x}{e}} - 1 = 0$ $e^{\frac{x}{e}} = e$ (γιατί η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα). Επομένως, ο e είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $e^{\frac{x}{e}} = x$.

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και x_0 (α, β), τότε η εξίσωση

$$f(x) = f\ (x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

έχει μοναδική ρίζα το x_0 στο $[\alpha, \beta]$.





Το x_0 είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης, αφού η ευθεία

$$y = f\ (x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

είναι η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Η συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - f\ (x_0)(x–x_0) - f(x_0)$$

έχει στο x_0 το μοναδικό ολικό ακρότατο στο $[\alpha, \beta]$, αφού για την παράγωγό της $F\ (x) = f\ (x)–f\ (x_0)$ ισχύει

- $F\ (x) > 0$ για x (α, x_0) και $F\ (x) < 0$ για x (x_0, β), όταν η f είναι κυρτή και
- $F\ (x) < 0$ για x (α, x_0) και $F\ (x) > 0$ για x (x_0, β), όταν η f είναι κοίλη. (Κριτήριο 1ης παραγώγου).

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Παράδειγμα 7

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ είναι κυρτή στο διάστημα $[-1, +\infty)$.
Στη συνέχεια να βρείτε τις πραγματικές λύσεις της εξίσωσης

$$x^2\sqrt{x+3} = \frac{17}{4}(x-1) + 2.$$

Απόδειξη:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3, +\infty)$ με παραγώγους

$$f'(x) = \frac{x}{2}\,\frac{5x+12}{\sqrt{x+3}} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{3}{4}\,\frac{5x^2+24x+24}{\sqrt{x+3}^{\,3}}.$$

Οι ρίζες της f'' είναι $\rho_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12}}{5} < -1$, οπότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ (γιατί τα x αυτά είναι εκτός των ριζών του τριωνύμου). Επομένως η συνάρτηση

$$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$$

είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

Η εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{17}{4}(x-1) + 2$. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια, η εξίσωση έχει μια μοναδική πραγματική ρίζα την $x_0 = 1$.

Σημείωση: Η μελέτη που παρουσιάσαμε εδώ αναφέρεται στην κυρτότητα, ό**πως αυτή ορίζεται στο σχολικό βιβλίο** της Αναλύσεως. Σε ορισμένα συγγράμματα Αναλύσεως η **κυρτότητα** ορίζεται ως εξής: Μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) λέμε ότι είναι **αυστηρώς κυρτή** (αντ. **κυρτή**) στο $[\alpha, \beta]$, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα (αντ. αύξουσα) στο (α, β).

Στο σχολικό βιβλίο (χάριν απλότητας) ονομάζουμε κυρτή εκείνη που εδώ ονομάζεται αυστηρώς κυρτή. **Προσοχή στη χρήση του όρου αυτού.** ◆

ΤΥΠΟΙ CARDANO

Του **Γ. Παντελίδη,** Καθηγητή στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

(Το περιεχόμενο αυτού του άρθρου δεν ανήκει στη διδακτέα ούτε και στην εξεταστέα ύλη του Λυκείου)

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας εξασφαλίζει την ύπαρξη των λύσεων εξισώσεων της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$

για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$.

Για τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, 4$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις της εξισώσεως με τη βοήθεια κάποιου τύπου. Είναι, όπως λέμε **επιλύσιμοι με ριζικά.** Έτσι για **n = 3** ο τύπος έχει τη μορφή

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}},$$

ενώ για $n = 4$ έχει τη μορφή

$$\sqrt{A + \sqrt[3]{B + \sqrt{\Gamma + \sqrt{\Delta}}}}$$

Η υπόθεση ότι με έναν κατάλληλο συνδυασμό διαδοχικών ριζικών θα μπορούσαμε να πάρουμε τις λύσεις εξισώσεων βαθμού $n > 4$ δεν είναι αληθής: **Είναι αδύνατον να επιλύσουμε μια γενική αλγεβρική εξίσωση βαθμού n > 4 με ριζικά .** Αυτό σημαίνει ότι, ενώ οι λύσεις των εξισώσεων μέχρι και 4ου βαθμού έχουν, γενικά, περίπλοκη αλγεβρική έκφραση, οι λύσεις των εξισώσεων ανωτέρου βαθμού ανήκουν σε ουσιωδώς περιπλοκότερες κατηγορίες αριθμών. Θα παραθέσουμε τη λύση της τριτοβάθμιας αλγεβρικής εξισώσεως:

Η **κανονική μορφή** της τριτοβάθμιας εξισώσεως

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

με το μετασχηματισμό $x = y - \frac{\alpha}{3}$ παίρνει την **ανηγμένη μορφή**

$$y^3 + py + q = 0,$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Τύποι Cardano	$D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$ μια πραγματική λύση και δύο μιγαδικές συζυγείς.	$y_1 = u + v$ $y_{2,3} = -\left(\frac{u+v}{2}\right) \pm i\left(\frac{u-v}{2}\right)\sqrt{3}$ όπου u είναι η πραγματική κυβική ρίζα της $-\frac{q}{2} + \sqrt{D}$ *) και v είναι η πραγματική κυβική ρίζα της $-\frac{q}{2} - \sqrt{D}$ *)
	$D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$ τρεις πραγματικές λύσεις, οι δύο ίσες.	$y_1 = 2u$ $y_2 = y_3 = -u$ όπου u είναι η πραγματική κυβική ρίζα της $-\frac{q}{2}$
Περίπτωση μη αναγωγής	$D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$ τρεις, διαφορετικές μεταξύ τους, πραγματικές λύσεις.	$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\text{συν}\frac{\varphi}{3}$, $y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\text{συν}\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ $y_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\text{συν}\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$, όπου $\text{συν}\varphi = \frac{q}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}$

*) Δε γράφουμε $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ επειδή επικράτησε στο Λύκειο το σύμβολο της ρίζας να χρησιμοποιείται όταν το υπόριζο είναι μη αρνητικός αριθμός.

ΕΛΚΥΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Μια ελκυστική παρουσίαση των Μαθηματικών

Του **Δ. Παπακωνσταντίνου,** Σχολικού Σύμβουλου Μαθηματικών

*Η διδασκαλία πρέπει να έχει πρωταρχικό σκοπό την ανάπτυξη του ενδιαφέροντος των μαθητών για το (διδασκόμενο) αντικείμενο. "**Διδάσκω**" σημαίνει "δημιουργώ ενδιαφέρον". Έτσι είναι ανάγκη, λογικά, η παρουσίαση και η επεξεργασία του γνωστικού αντικειμένου να γίνεται με ειδικές τεχνικές ώστε να δημιουργηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών.*

*Μια πολύ γόνιμη τεχνική και μάλιστα πρόσφορη σε όλες τις τάξεις και σε όλες τις βαθμίδες είναι η **ελκυστική** παρουσίαση του γνωστικού αντικειμένου, με τρόπο που να προκαλεί την περιέργεια, το θαυμασμό και το φιλοσοφικό στοχασμό.*

Με τα Μαθηματικά μπορούμε όχι μόνο απλώς να μεταφέρουμε γνώσεις, αλλά να εντυπωσιάσουμε, να φιλοσοφήσουμε, να ζωντανέψουμε και πολύ συχνά να ψυχαγωγίσουμε τους μαθητές μας.

Εξίσωση δευτέρου βαθμού

Ας πάρουμε για παράδειγμα ένα απλό θέμα (αντικείμενο) "Λύση εξίσωσης δευτέρου βαθμού" και ας δούμε τους διάφορους τρόπους παρουσίασής της, δηλ. τους διδακτικούς μετασχηματισμούς. Στο τέλος θα μιλάμε γι' αυτό χωρίς αυτό.

Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 32x + 256 = 0$

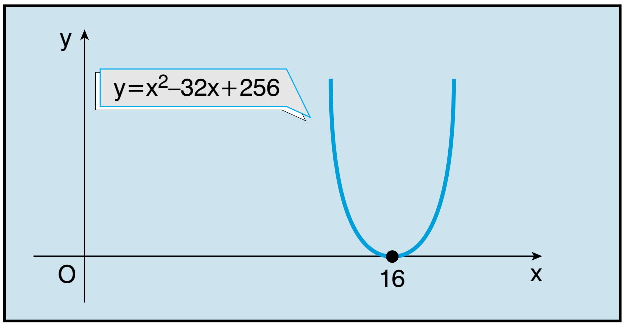
Ασφαλώς ο τρόπος αυτός δε δημιουργεί κανένα ενδιαφέρον. Γνωρίζουν οι μαθητές τους τύπους της διακρίνουσας και των ριζών και αγανακτούν όταν στην εφαρμογή τους έχουν μεγάλα νούμερα 32 και 256.

Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 32x + 256 = 0$ χωρίς να γίνει χρήση των σχετικών τύπων.

Εδώ δημιουργείται ενδιαφέρον και προβληματισμός. Γιατί «χωρίς τους τύπους»; τι συμβαίνει; Ο καθηγητής προχωρεί με διαδοχικές παρατηρήσεις, όπως π.χ. το 256 γράφεται 16^2, στη συνέχεια διαπιστώνουν οι μαθητές ότι έχουμε τέλειο τετράγωνο $(x-16)^2 = 0 \quad x=16$.

Να λυθεί με γραφική παράσταση η εξίσωση:

$x^2 - 32x + 256 = 0$.



Είναι ένας ασυνήθιστος τρόπος αλλά στις οθόνες των ηλεκτρονικών υπολογιστών έτσι εντοπίζουμε τις ρίζες. Γνωρίζουν οι μαθητές να κάνουν τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 - 32x + 256$. Έτσι στα τετράδιά τους διαπιστώνουν ότι έχουμε $y = 0$ στο σημείο που η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x x. Βρίσκουν την τετμημένη του σημείου αυτού $x = 16$ και έχουν τη ρίζα της εξίσωσης. Γραφικά διαπιστώνουμε την ύπαρξη ριζών δύσκολων εξισώσεων, όπως π.χ.

$e^x = x - 1, \quad συν = x^2 - 1, \quad e^x + 1 = \ln x,$ κ.λπ.

Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου για ν' αποφύγει τη σύγκρουση με μια μοτοσυκλέτα πάτησε φρένο τη στιγμή που έτρεχε με ταχύτητα 32 m/sec. Το αυτοκίνητο σύρθηκε σε απόσταση 256 m με επιβράδυνση 2 m/sec². Να βρεθεί επί πόσο χρόνο ο οδηγός πατούσε το φρένο του αυτοκινήτου.

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι πρόκειται για βιωματική παρουσίαση του προβλήματος. Η ταχύτητα, η μοτοσυκλέτα, η σύγκρουση και ο ρεαλισμός αναμφίβολα δημιουργούν ενδιαφέρον. Οι εξισώσεις της κίνησης είναι γνωστές:

$$S = u_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2: \qquad 256 = 32t - \frac{1}{2}2t^2$$

$$t^2 - 32t + 256 = 0$$

$$t = 16.$$

Στο ξέφωτο μια ζούγκλας ένα κοπάδι πιθήκων διασκέδαζε την ομορφιά της φύσης. Το τετράγωνο του ογδόου αυτών πηδούσε από δέντρο σε δέντρο, οι μισοί απ' αυτούς τσαλαβουτούσαν ζωηρά στα νερά μιας λίμνης και τέσσερις γκρινιάρηδες γρύλιζαν απόμακρα στην κορυφή ενός χλοερού λόφου. Να βρεθεί πόσο μεγάλη ήταν αυτή η τρελοπαρέα.

Η παρουσίαση είναι ελκυστική, ποιητική ευχάριστη, ψυχαγωγική και ασφαλώς το ενδιαφέρον όλης της τάξης δεδομένο. Στο τετράδιό τους οι μαθητές θα μαθηματικοποιήσουν όλη αυτή τη βιωματική κατάσταση της παρέας των πιθήκων και θα γράψουν:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + \frac{x}{2} + 4 = x \qquad x^2 - 32x + 256 = 0$$

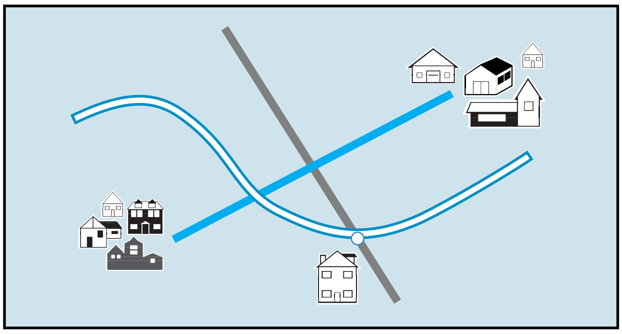
$$x = 16$$

Γίνεται αντιληπτό ότι το $x = 16$ δεν είναι εδώ ο κεντρικός στόχος. Αυτό που κατορθώσαμε με την παρουσίαση είναι ότι ενεργοποιήσαμε τη συναισθηματικότητα του παιδιού, την περιέργεια, τη φαντασία, το ενδιαφέρον και τελικά πετύχαμε αυτό που λέμε *«το τερπνόν μετά του ωφελίμου»*.

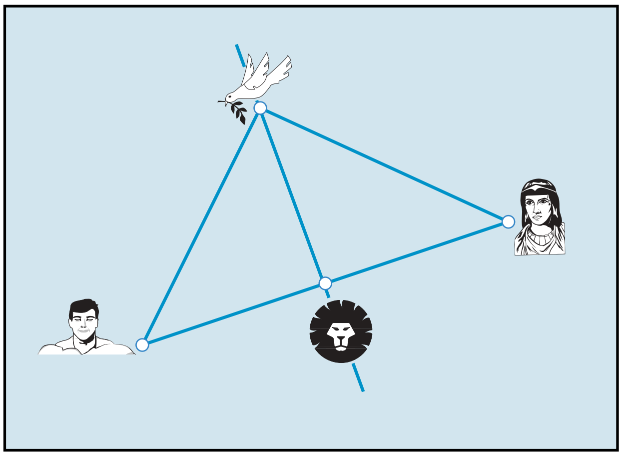
Μεσοκάθετος

Το να διδάξεις για τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι απλό. Ενδέχεται όμως να κοιμηθεί όλη η τάξη στα θρανία. Τι ενδιαφέρον μπορεί να δημιουργήσει μια ευθεία; Να όμως δύο παρουσιάσεις πολύ ενδιαφέρουσες:

Μεταξύ δύο χωριών περνά μια σιδηροδρομική γραμμή. Σε ποιο σημείο αυτής πρέπει να γίνει ο σταθμός ώστε οι κάτοικοι και των δύο χωριών να έχουν να διανύσουν την ίδια απόσταση για να φθάσουν στο σταθμό;



Αν πάρουμε τη θέση του αγάλματος της θεάς Αθηνάς στην Ακρόπολη (που εκφράζει τη δύναμη του πνεύματος και της σοφίας) και τη θέση του αγάλματος του Απόλλωνα στην Ολυμπία (που εκφράζει το σωματικό κάλλος και την ανδρεία) στο μέσον αυτής της απόστασης υπάρχει το ιερόν της Νεμέας. Αν φέρουμε τη μεσοκάθετη τότε αυτή θα περάσει από τον τρίποδα της Πυθίας του μαντείου των Δελφών (που εκφράζει το πνεύμα της ειρήνης και της συναδέλφωσης των λαών).



Μη ξεχνάτε ότι ξεκινήσαμε για γεωμετρία και την παράσταση την έκλεψε η Αθηνά και ο Απόλλωνας. Ποιος μαθητής δε θα το θυμάται ή δε θα το αναφέρει σε κάποια ευκαιρία...

Πρόβλημα ελαχίστου:

Το να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x) = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}$$

είναι ένα κοινό πρόβλημα για διδάσκοντα και διδασκόμενο. Αν όμως το ίδιο αντικείμενο το διατυπώσουμε με τον εξής ελκυστικό τρόπο:

Να βρεθεί τι σχέση πρέπει να έχει η ακτίνα και το ύψος ενός κυλινδρικού κουτιού κονσέρβας χωρητικότητας ενός κιλού, ώστε να κοστίσει λιγότερο.

τότε οδηγούμαστε στη μελέτη της ίδιας συνάρτησης, αλλά το αντικείμενο αποκτά ενδιαφέρουσες διαστάσεις. Ο μαθητής ενδιαφέρεται, γιατί βλέπει ότι το μάθημα που διδάσκεται έχει άμεσες εφαρμογές σε πολλές ανάγκες της ζωής.

Η ελκυστική παρουσίαση του γνωστικού αντικειμένου δημιουργεί άμεσο ενδιαφέρον στο μαθητή, αρχίζει να αγαπά το μάθημα, το βιβλίο, τον καθηγητή και γενικότερα το σχολείο.

Αν αυτό το ενδιαφέρον αναπτυχθεί σε περισσότερα μαθήματα αντιλαμβάνεται κανείς ότι η μόρφωσή του αποκτά πραγματικό ενδιαφέρον. Η σκέψη και η δραστηριότητα του μαθητή οδηγείται σε ενδιαφέροντα που, μέσα στα σχολικά πλαίσια, είναι τα γράμματα, οι τέχνες και με απώτερο σκοπό η επιστημονική εξέλιξη. Με τον τρόπο αυτό θα αποφύγει ο μαθητής τις άκαιρες και επικίνδυνες για το μέλλον του δραστηριότητες.

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ στις ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Του **Γ. Γιουβανούδη,** Φυσικού

Ενα από τα σπουδαιότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει κάθε εκπαιδευτικός και κυρίως οι των θετικών επιστημών, που διδάσκουν μαθήματα δέσμης, είναι η μεθοδολογία με την οποία θα λύνουν τις ασκήσεις. Η μέθοδος επίλυσης ασκήσεων Φυσικής –και όχι μόνο– πρέπει να έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

α) Να είναι ελκυστική στους μαθητές, δηλαδή απλή και εύκολα κατανοητή.

β) Να είναι «λογική».

γ) Να εφαρμόζεται όσο το δυνατόν σε περισσότερες κατηγορίες ασκήσεων, σε περισσότερα κεφάλαια, ώστε να μην αλλάζει κάθε τόσο ο εκπαιδευτικός μεθοδολογία και μπερδεύει το ακροατήριο.

δ) Να είναι προέκταση της θεωρίας, ώστε οι μαθητές να «δένουν» θεωρία και άσκηση.

ε) Να περιορίζει όσο είναι δυνατόν την απομνημόνευση τύπων.

στ) Να δίνει έμφαση στα φυσικά φαινόμενα.

Η Φυσική είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο μάθημα γιατί θέλει πολύ καλή θεωρητική κατάρτιση, έχει δύσκολες έννοιες και επιπλέον έχει μια πολύ μεγάλη ποικιλία ασκήσεων. Θα ’θελα λοιπόν, να προτείνω και στους συναδέλφους Φυσικούς αλλά και στους μαθητές –κυρίως υποψηφίους Α.Ε.Ι– μια συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης ασκήσεων Φυσικής. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως στα κεφάλαια της Μηχανικής, δηλαδή στα κεφάλαια 1, 2, 3, 4 και 11 της Δέσμης.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Κάθε άσκηση Φυσικής, στη Μηχανική, είναι μια μικρή «ιστορία», ένα «σενάριο» διαφόρων συμβάντων, δηλαδή διαφόρων φυσικών φαινομένων. Αν λοιπόν κάποιος μελετήσει ένα προς ένα όλα τα φυσικά φαινόμενα που συμβαίνουν σε μια άσκηση τότε λογικά θα πρέπει να βρει οτιδήποτε του ζητάνε.

Ένα πρώτο ερώτημα που προκύπτει είναι: «Με ποια σειρά θα πρέπει να μελετηθούν τα φαινόμενα»; Κάποιος έμπειρος βλέποντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης, πιθανόν θα μπορούσε να ορίζει σε κάθε άσκηση διαφορετική σειρά μελέτης των φαινομένων. Όμως αυτό δεν είναι καθόλου εύκολο και επιπλέον πρέπει να πάρουμε υπ’ όψιν μας ότι οι μαθητές δεν είναι καθόλου έμπειροι, μάλλον άπειροι είναι. Επομένως μία είναι η λογική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. «Με τη σειρά που συμβαίνουν, δηλαδή χρονολογικά».

Το δεύτερο ερώτημα που προκύπτει είναι: «Με ποιο τρόπο θα μελετάμε τα φαινόμενα, τι θα κάνουμε»; Η απάντηση κι εδώ είναι ομοίως απλή και λογική. «Χρησιμοποιώντας τους νόμους και τις αρχές της Φυσικής». Οι νόμοι και οι αρχές της Φυσικής αποτελούν «τα εργαλεία» μας για τη μελέτη των φυσικών φαινομένων.

Έτσι, η όλη μεθοδολογία συνοψίζεται σε τρεις προτάσεις.

1. Μελέτη των φυσικών φαινομένων.
2. Με τι σειρά; Με τη σειρά που συμβαίνουν, χρονολογικά.
3. Με τι τρόπο; Χρησιμοποιώντας «τα εργαλεία» της Φυσικής, δηλαδή νόμους, θεωρήματα και αρχές.

Για να μη νομίσει κανείς, ότι υπάρχουν πάρα πολλά «εργαλεία» και επομένως είναι δύσκολο να διαλέξει κανείς το ενδεδειγμένο –κατάλληλο– για κάθε φαινόμενο, αναφέρω παρακάτω, όλα τα «εργαλεία» που χρειάζονται για να λύσει κανείς ασκήσεις που αναφέρονται στα κεφάλαια 1, 2, 3, 4 και 11 της ύλης της Δέσμης.

1. Τύποι κινητικής και νόμοι του Νεύτωνα.
2. Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.).
3. Αρχή διατήρησης της ενέργειας (Α.Δ.Ε.).
4. Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.).
5. Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την καμπυλόγραμμη κίνηση ή όπως συνηθίζω να τον λέω «Συνθήκη καμπυλόγραμμης κίνησης» (Σ.Κ.Κ.).
6. Αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.).
7. Θεώρημα ώθησης - ορμής (Θ.Ω.Ο.).

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα, εφαρμογής της μεθόδου, ας δούμε μαζί την παρακάτω κλασική άσκηση, λυμένη συνοπτικά λόγω περιορισμών στο χώρο.

Δίσκος μάζας $m_\Delta = 200\,gr$ εξαρτάται από το άκρο ελατηρίου και ισορροπεί επιμηκύνοντας το ελατήριο κατά $x_1 = 10\,cm$. Κομμάτι πλαστελίνης μάζας $m_\pi = 200\,gr$ αφήνεται να πέσει στο δίσκο από ύψος h. Αν η μέγιστη απομάκρυνση του δίσκου από τη θέση ισορροπίας του είναι $x_2 = 30\,cm$, να βρεθεί το h. Δίνεται $g = 10\,m/sec^2$.

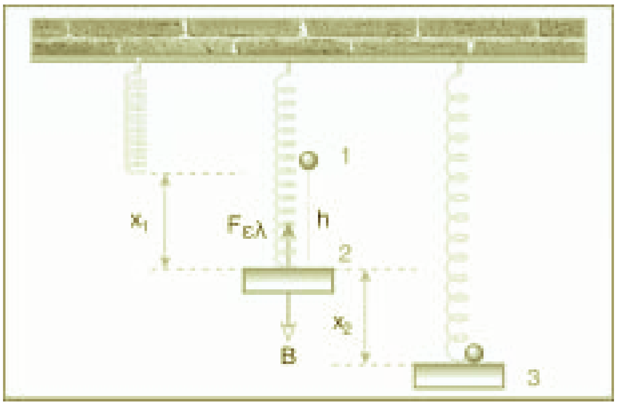
Λύση:

Όταν έχουμε κρούση, τα φαινόμενα χωρίζονται χρονολογικά σε τρία στάδια:

Α. ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ,

Β. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ,

Γ. ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ.



Α. Πριν την κρούση

1. Μελέτη της θέσης ισορροπίας του δίσκου, θέση 2.
   Εφαρμόζω 1ο Νόμο Νεύτωνα

$$\Sigma\vec{F} = 0 \qquad B = F_{\varepsilon\lambda} \qquad m_\Delta \cdot g = kx_1 \qquad k = 20N/m.$$

2. Μελέτη της κίνησης του m_π, θέσεις 1 και 2. Εφαρμόζω Α.Δ.Μ.Ε.

$$m_\pi gh = \frac{1}{2}m_\pi \upsilon^2 \qquad h = \frac{\upsilon^2}{2g} \qquad (1)$$

Β. Κατά την κρούση

Εφαρμόζω Α.Δ.Ο.

$$m_\pi \upsilon = (m_\Delta + m_\pi)\upsilon_\kappa \qquad (2)$$

Γ. Μετά την κρούση

Εφαρμόζω Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα $(m_\pi + m_\Delta)$ – ελατήριο, θέσεις 2 και 3

$$\frac{1}{2}(m_\pi + m_\Delta)\upsilon_\kappa^2 + (m_\pi + m_\Delta)gx_2 + \frac{1}{2}kx_1^2 =$$

$$\frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 \qquad \ldots \qquad \upsilon_\kappa = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,m/sec.$$

Άρα (2) $\upsilon = \sqrt{6}\,m/sec$ και (1) $h = 0{,}3\,m.$

Υ.Γ. Θα ήταν πάρα πολύ ενδιαφέρον οι συνάδελφοι Φυσικοί να στείλουν τις απόψεις τους για την προτεινόμενη μέθοδο ή ακόμη να προτείνουν δικές τους τεχνικές και μεθόδους οι οποίες έχουν εφαρμοστεί και λειτούργησαν αποδοτικά.

Στο επόμενο τεύχος θα αναπτυχθεί η σωστή εφαρμογή και χρήση κάθε «εργαλείου».

ΑΓΩΓΟΙ ΣΕ ΓΕΙΤΟΝΙΑ και η δράση τους σαν ΠΥΚΝΩΤΕΣ

Του **Π. Γιαννακουδάκη,** Αναπλ. Καθηγητή Φυσικής - Χημείας στο Α.Π.Θ.

Κατά τη διδασκαλία του ηλεκτρισμού σε μαθητές της Α ή της Β λυκείου τελειώνοντας με τη χωρητικότητα αγωγού έχει μάθει ο μαθητής ότι η χωρητικότητα του σφαιρικού αγωγού στο κενό δίνεται από τη σχέση C = R/k και επομένως εξαρτάται μόνο από την ακτίνα του και ότι γενικά η χωρητικότητα κάθε αγωγού θα εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά και το μέσον που τον περιβάλλει (διηλεκτρικό). Φαντάζομαι ότι όλοι οι διδάσκοντες προσθέτουν στο σημείο αυτό (παρόλο που δεν αναφέρεται στο βιβλίο της Α Λυκείου) ότι τα παραπάνω ισχύουν στην περίπτωση που ο αγωγός είναι μεμονωμένος, δηλαδή μακριά από άλλους αγωγούς. Όταν, όμως, υπάρχουν και άλλοι αγωγοί σε γειτονία, τότε η χωρητικότητα θα εξαρτάται από τα φορτία και τις σχετικές θέσεις των άλλων αγωγών.

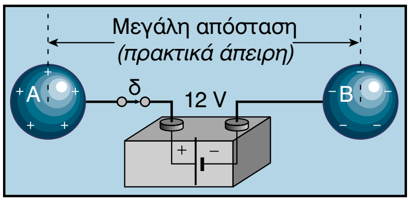
Δημιουργείται, έτσι, (σε όποιο μαθητή ενδιαφέρεται και θέλει να καταλάβει τι γίνεται) η απορία: "γιατί και πώς οι αγωγοί επηρεάζουν ο ένας τη χωρητικότητα του άλλου"; Η εξήγηση στον προβληματισμό αυτό (εάν και εφόσον δίνεται) είναι συνήθως ποιοτική και δύσκολα πειστική.

Μετά τη χωρητικότητα διδάσκεται ο πυκνωτής και συνήθως το μάθημα αρχίζει με την περιγραφή του επίπεδου πυκνωτή, συνεχίζεται με τους παράγοντες που καθορίζουν την χωρητικότητά του και συνήθως τελειώνει με τη χρήση του πυκνωτή σαν αποθήκη φορτίου στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Συνήθως η μετάβαση αυτή από σφαιρικούς φορτισμένους αγωγούς σε επίπεδους πυκνωτές γίνεται στα βιβλία (αλλά και στο μυαλό των μαθητών) σαν αλλαγή κεφαλαίου ή παραγράφου. Με τον τρόπο αυτό η προσπάθεια των καθηγητών να εξηγήσουν (αλλά και των μαθητών να κατανοήσουν) τις ομολογουμένως δύσκολες έννοιες δυναμικό, διαφορά δυναμικού και χωρητικότητα εμφανίζει ασυνέχεια τη στιγμή ακριβώς που με την εφαρμογή τους στην πράξη τα πράγματα γίνονται πιό απτά. (Το "παιχνίδι" στο σχολικό εργαστήριο με πυκνωτές αντί για σφαιρικούς αγωγούς είναι και πιο εύκολο και πιο ανέξοδο).

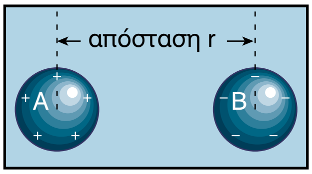
Με τα παρακάτω θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα τρόπο, με τον οποίο να φαίνεται αφενός η επίδραση των γειτονικών αγωγών στην χωρητικότητα κάποιου αγωγού και αφετέρου η ομαλή μετάβαση από τους σφαιρικούς αγωγούς στους πυκνωτές.

Διαθέτουμε δύο ίδιους σφαιρικούς αγωγούς Α και Β με ακτίνα R = 9 cm (περίπου σαν μπάλλες του μπάσκετ) και θέλουμε να τους φορτίσουμε με αντίθετα φορτία, έτσι ώστε κάποια στιγμή που χρειαζόμαστε ηλεκτρικό φορτίο για να φορτίσουμε κάποιον άλλο αγωγό Γ να το πάρουμε ακουμπώντας το Γ στον Α ή στο Β. Θα μπορούμε επίσης συνδέοντας τους δύο αγωγούς με ένα σύρμα να πάρουμε (έστω και για μικρό χρονικό διάστημα) ηλεκτρικό ρεύμα. Συνδέουμε τους δύο αγωγούς Α και Β με σύρματα με τους δύο πόλους μιάς μπαταρίας με διαφορά δυναμικού $V_{πηγ}$ = 12 V (μπαταρία αυτοκινήτου) όπως φαίνεται στο σχήμα, και φροντίζουμε να βρίσκονται όσο είναι δυνατό μακρύτερα ο ένας από τον άλλο. (Θεωρούμε ότι η πηγή αυτή έχει μηδενική εσωτερική αντίσταση).



Η μπαταρία φορτίζει τον Α με θετικό φορτίο $Q_A = +Q$ και τον Β με αρνητικό φορτίο $Q_B = –Q$. (Τα δύο φορτία είναι ίσα και αντίθετα γιατί η πηγή παίρνει ηλεκτρόνια από τον Α και τα μεταφέρει στο Β) . Επειδή οι δύο αγωγοί βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους δεν αλληλεπιδρούν και έτσι το δυναμικό του καθένα θα καθορίζεται από το φορτίο του και την χωρητικότητά του. Επειδή όμως έχουν ίσα και αντίθετα φορτία και ίδιες ακτίνες, θα έχουν και ίσα και αντίθετα δυναμικά. Έτσι αν το δυναμικό του Α, V_A, είναι V, τότε το δυναμικό του Β, V_B, θα είναι –V. Επειδή $V_A – V_B$ = 12V, βρίσκουμε V_A = 6V και V_B = – 6V. Η χωρητικότητα των δύο αγωγών (όπως προκύπτει από τον τύπο C= R/k) είναι 10^{-11} F ή 10 pF. Για τα φορτία Q_A και Q_B βρίσκουμε τις τιμές $6{\cdot}10^{-11}$ C και $–6{\cdot}10^{-11}$ C, αντίστοιχα. Δηλαδή εφαρμόσαμε διαφορά δυναμικού 12V και το φορτίο του συστήματος είναι $6{\cdot}10^{-11}$ C. Η χωρητικότητα του συστήματος των αγωγών είναι επομένως 5 pF.

Ανοίγουμε το διακόπτη δ, έτσι ώστε τα φορτία των αγωγών να μη μεταβάλλονται, και πλησιάζουμε τους αγωγούς, ώστε η απόσταση των κέντρων τους να γίνει r.



Το δυναμικό κάθε αγωγού, τώρα, θα είναι το άθροισμα του δυναμικού που έχει λόγω του φορτίου του, και του δυναμικού που έχει επειδή βρίσκεται μέσα στο πεδίο του άλλου αγωγού. Τα δυναμικά των δύο αγωγών θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_A = k\frac{Q_A}{R} + k\frac{Q_B}{r} \quad \text{και} \quad V_B = k\frac{Q_B}{R} + k\frac{Q_A}{r}.$$

$[Q_A = +Q \quad \text{και} \quad Q_B = –Q \quad (Q = 6{\cdot}10^{-11}\ C)]$

Από τον τύπο του V_A προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

i) Το V_A, όταν ο Α ήταν σε μεγάλη (πρακτικά άπειρη) απόσταση από τον Β, έχει κάποια θετική τιμή επειδή έχει θετικό φορτίο.

ii) Όταν οι δύο αγωγοί πλησιάσουν σε κάποια απόσταση r η επίδραση του Β έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός δεύτερου όρου στον τύπο του δυναμικού, ο οποίος, επειδή το φορτίο του Β είναι αρνητικό, έχει αρνητική τιμή. Αποτέλεσμα της προσέγγισης των δύο αγωγών είναι, επομένως, η ελάττωση της τιμής του δυναμικού του Α.

Για τον Β προκύπτει, με ίδιους συλλογισμούς, ότι το δυναμικό του αυξάνεται.

Επειδή όμως το V_B παραμένει πάντα αρνητικό, ή απόλυτη τιμή του ελαττώνεται.

Η χωρητικότητα όμως ενός αγωγού, ανεξάρτητα από το πρόσημο του φορτίου και του δυναμικού του, δίνεται από τη σχέση:

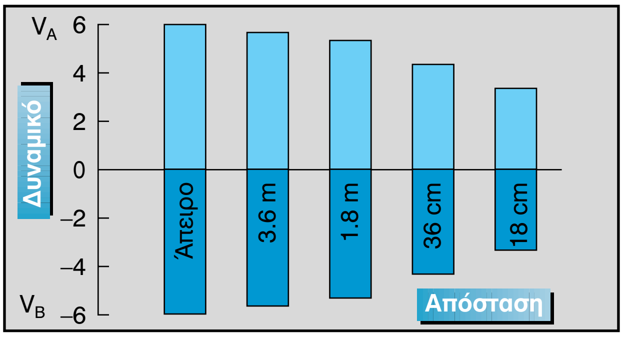
$$C=\frac{\Omega Q\Omega}{\Omega V\Omega}$$

και αφού το φορτίο κάθε αγωγού παραμένει σταθερό (ενώ η απόλυτη τιμή του δυναμικού του μειώνεται) έπεται ότι με την προσέγγισή τους, αφενός αυξάνεται η χωρητικότητα του κάθε αγωγού και αφετέρου μειώνεται η διαφορά δυναμικού τους.

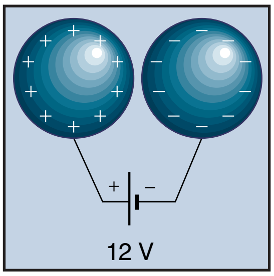
Αν διαμορφώσουμε έναν πίνακα με τιμές του δυναμικού, της διαφοράς δυναμικού και της χωρητικότητας για ενδεικτικές τιμές της απόστασης των δύο αγωγών θα έχουμε:

r	V_A [V]	V_B [V]	V_A–V_B [V]	C_A,C_B [pF]
άπειρο	6	-6	12	10
3.6 m	5.85	-5.85	11.7	10.25
1.8 m	5.7	-5.7	11.4	10.53
36 cm	4.5	-4.5	9	13.3
18.01 cm	3	-3	6	20

(Στην τελευταία γραμμή του πίνακα η απόσταση δεν έχει μπει 18 cm, αλλά 18.01cm για να δείξουμε ότι "παρά τρίχα" ακουμπούν). Από τον πίνακα κατασκευάζουμε το διάγραμμα δυναμικού-απόστασης:

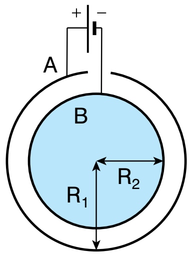


Αν ξανασυνδέσουμε τους δύο αγωγούς Α και Β, όταν αυτοί βρίσκονται στη μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ τους (ελάχιστα μεγαλύτερη από 18 cm), με τη μπαταρία με διαφορά δυναμικού $V_{πηγ}$=12 V, ο αγωγός Α θα έχει δυναμικό 6V και ο Β –6V .



Επειδή όμως η χωρητικότητά τους τώρα (λόγω της αλληλεπίδρασής τους) είναι 20 pF τα φορτία τους θα είναι $+12\cdot10^{-11}$ C και $-12\cdot10^{-11}$ C, αντίστοιχα. Δηλαδή εφαρμόσαμε διαφορά δυναμικού 12V και το φορτίο του συστήματος είναι $12\cdot10^{-11}$ C. Η χωρητικότητα του συστήματος είναι επομένως10 pF (διπλασιάστηκε σε σχέση με αυτήν που είχαν οι αγωγοί όταν ήταν σε άπειρη απόσταση).

Με την ίδια διαφορά δυναμικού της μπαταρίας, δηλαδή, έχουμε διπλάσιο φορτίο. Έχουμε όμως φτάσει και στη μεγαλύτερη δυνατή προσέγγιση των δύο αγωγών. Πώς μπορούμε να μειώσουμε παραπέρα την απόσταση των αγωγών,για να αυξήσουμε τη χωρητικότητα και άλλο; Με συμπαγείς αγωγούς δεν γίνεται. Γίνεται όμως αν κάνουμε τον ένα ή και τους δύο αγωγούς κοίλους, έτσι ώστε να έχουν μια πολύ μικρή διαφορά στις ακτίνες τους και βάλουμε το μικρό μέσα στο μεγάλο.



Τα δυναμικά των δύο αγωγών θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_A = k\frac{Q_A}{R_1} + k\frac{Q_B}{R_1}$$

και

$$V_B = k\frac{Q_A}{R_1} + k\frac{Q_B}{R_2}.$$

Επειδή όμως $Q_A = +Q$ και $Q_B = -Q$ παίρνουμε

$$\frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{R_1\cdot R_2}{R_1 - R_2}\right).$$

Η χωρητικότητα του συστήματος (πυκνωτή) δίνεται επομένως από τη σχέση

$$C = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{R_1\cdot R_2}{R_1 - R_2}\right).$$

Όσο πιο μεγάλες οι ακτίνες των δύο αγωγών και όσο πιο μικρή η διαφορά των ακτίνων τους , τόσο πιο μεγάλη θα είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Τελικά καταλήγουμε στο παρακάτω συμπέρασμα: αφού για να κάνουμε έναν πυκνωτή με μεγάλη χωρητικότητα πρέπει να πλησιάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο δύο αγωγούς, δεν είναι ανάγκη να είναι αυτοί σφαιρικοί και μεγάλοι. (Θα αγοράζαμε για παράδειγμα ένα walkman με πυκνωτές σε μέγεθος μπάλλας του μπάσκετ;). Μπορούμε αντί για σφαιρικούς αγωγούς να χρησιμοποιήσουμε επίπεδους αγωγούς από λεπτά μεταλλικά φύλλα που και κοντά μπορούν να πλησιάσουν, και να είναι μεγάλα , αλλά, και να τυλιχθούν μπορούν, για να καταλαμβάνουν μικρότερο όγκο. **ΔΗΛΑΔΗ: Επίπεδος πυκνωτής.**

ΡΑΔΟΝΙΟ:
μια ακόμη πυρηνική απειλή στα σπίτια μας

Του **Κ. Παπαστεφάνου,** Καθηγητή Πυρηνικής Φυσικής στο Α.Π.Θ.

Τελευταία γίνεται πολύς λόγος για το ραδόνιο στις κατοικίες, τη ραδιενέργεια που συνδέεται με αυτό, μια ακόμα πυρηνική(;) απειλή κοντά στις άλλες: τη βόμβα της Χιροσίμα, τις πυρηνικές κεφαλές (Πέρσινγκ, Κρούζ, Εμ Εξ, Ες Ες 20 και όλη η σειρά Ες Ες), του Τσερνόμπιλ τελευταία. Στις αρχές Αυγούστου, γύρω στις 6 (η γνωστή θλιβερή επέτειος του πρώτου πυρηνικού ολοκαυτώματος), όλα τα ραδιοτηλεοπτικά μέσα στις ΗΠΑ είχαν πρώτο θέμα τις αυξημένες στάθμες ραδονίου σε κατοικίες ορισμένων πολιτειών όπως π.χ. στο Μαίην και γίνονταν αναφορά στις επιπτώσεις στην υγεία του ανθρώπου. Ανέφεραν δε ακόμα ότι πολλοί αναζητούσαν τον τρόπο να μετρήσουν το ραδόνιο στο σπίτι τους αγοράζοντας κάποια συσκευή μέτρησης ή καλώντας κάποιον υπεύθυνο που θα μπορούσε να πραγματοποιήσει τέτοιες μετρήσεις και φυσικά να τους δώσει τις κατάλληλες συμβουλές (οδηγίες).

Τι είναι όμως το ραδόνιο και πως παρεισφρύει στις κατοικίες μας; Το ραδόνιο είναι αέριο αδρανές και ραδιενεργό. Παράγεται κατά τη ραδιενεργό διάσπαση του ραδίου (Σχ. 1) συστατικό της γης σε πολύ μικρή αναλογία ιχνοστοιχείο και συνεπώς και των οικοδομικών υλικών. Στη συνέχεια διαχέεται μέσα στην ύλη δια μέσου των πόρων και τελικά εκλύεται από την επιφάνεια στον ελεύθερο αέρα. Έτσι, στους κλειστούς χώρους (κατοικίες, γραφεία, σχολεία, εκκλησίες) συσσωρεύεται μετά την απορροή του από τους τοίχους, την οροφή και το δάπεδο (ιδιαίτερα, όταν αυτό έρχεται σε άμεση επαφή με τη γη ή είναι από μπετόν αρκετά πορώδες) κατά κυριότητα. Ο ατμοσφαιρικός αέρας περιέχει ραδόνιο που εκλύεται από το έδαφος, όμως σε πολύ μικρή συγκέντρωση. Έτσι, ο αέρας που εισέρχεται στις κατοικίες με το άνοιγμα των παραθύρων (εξαερισμός) ελάχιστα επιβαρύνει σε ραδόνιο τον αέρα εσωτερικών χώρων. Το ραδόνιο μπορεί ακόμα να παρεισφρύσει στις κατοικίες με το νερό της βρύσης, με τους αγωγούς φυσικού αερίου (γκάζι), τους αρμούς και τις διάφορες ρωγμές από σεισμούς ή άλλες αιτίες, τα φρεάτια (π.χ. ανελκυστήρων) και τις αποχετεύσεις, τις χαλαρές συνδέσεις των πάσης φύσεως σωληνώσεων (Σχ. 2).

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[4.5\ \ 10^9 y]{\alpha} \ldots\ldots\ ^{226}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow[1600y]{\alpha}$$

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow[3.824d]{\alpha}\ ^{218}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow[3.05m]{\alpha}$$

$$^{214}_{82}\mathrm{Pb} \xrightarrow[26.8m]{\beta^-}\ ^{214}_{83}\mathrm{Bi} \xrightarrow[19.8m]{\beta^-}$$

$$^{214}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow[163.7\mu s]{\alpha}\ ^{210}_{82}\mathrm{Pb} \xrightarrow[22.3y]{\beta^-}$$

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \xrightarrow[5.01d]{\beta^-}\ ^{210}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow[138.38d]{\alpha}$$

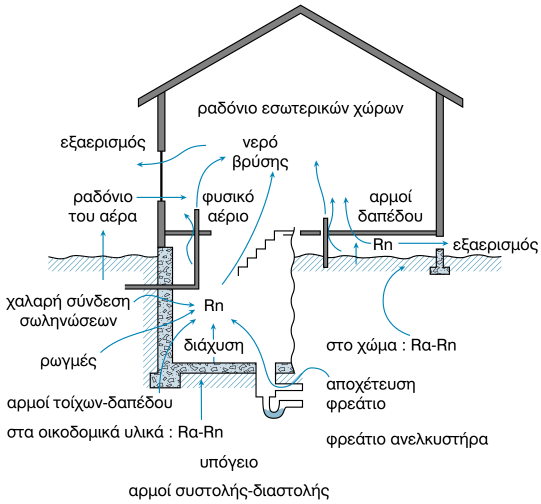
$$^{206}_{82}\mathrm{Pb}\ \text{(σταθ.)}$$

Σχ.1. Το ραδόνιο παράγεται από τη ραδιενεργό διάσπαση του ραδίου.

Η συσσώρευση του ραδονίου γίνεται ακόμη μεγαλύτερη όταν οι κατοικίες έχουν υψηλού βαθμού μόνωση που επιζητείται για λόγους εξοικονόμησης ενέργειας την χειμερινή περίοδο ή αιρ-κοντίσιονινγκ κατά την θερινή περίοδο, όπου δε γίνεται ο απαιτούμενος εξαερισμός των κατοικιών που θα έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της συγκέντρωσης του ραδονίου.

Πίνακας I
Ρυπαντές του αέρα εσωτερικών χώρων

Κατηγορία Α
Ραδόνιο
αμίαντος
φορμαλδεΰδη
εντομοκτόνα
καπνός τσιγάρου
μόλυβδος στο πόσιμο νερό
Κατηγορία Β (ήσσονος σημασίας)
ίνες υλικών κατασκευής ταπήτων
χρωστικές ουσίες
οικοδομικά υλικά
πτητικές ουσίες σε υγρά καθαρισμού
μικρόβια από τα κλιματιστικά μηχανήματα
χημικά των φωτοαντιγραφικών μηχανημάτων



Σχ.2. Σχηματικό διάγραμμα που εμφανίζει τις διόδους του ραδονίου σε τυπική κατασκευή κατοικίας

Σήμερα το ραδόνιο θεωρείται ο υπ' αριθμόν 1 ρυπαντής του αέρα εσωτερικών χώρων (Πίνακας 1). Έχουν γίνει πάρα πολλές (εκατοντάδες, χιλιάδες ίσως) μελέτες πάνω στο ραδόνιο στις κατοικίες και τις επιπτώσεις του στην υγεία του ανθρώπου σ' όλες τις χώρες του κόσμου, ιδιαίτερα στις ΗΠΑ, τη Σουηδία, τη Νορβηγία, τη Μεγάλη Βρετανία και την Ινδία. Στη χώρα μας κάπως περιορισμένα. Το εργαστήριο Πυρηνικής Φυσικής του Πανεπιστημίου Θεσ/νίκης κάνει συστηματικές μετρήσεις του ραδονίου στις κατοικίες από το 1983 στα πλαίσια σχετικής έρευνας.

Βέβαια, αρχικά το ενδιαφέρον περιορίστηκε στη Θεσσαλονίκη και στη συνέχεια σε άλλες πόλεις. π.χ. Πτολεμαΐδα. Έχουν γίνει ήδη επιστημονικές εργασίες που δημοσιεύθηκαν σε διεθνή

επιστημονικά περιοδικά ή παρουσιάστηκαν σε διεθνή συνέδρια. Παράλληλα έγινε μελέτη του ραδονίου και σε άλλους κλειστούς χώρους όπως είναι τα σπήλαια (Σπήλαιο Πετραλώνων Χαλκιδικής) ή διάφορα κτίσματα από γρανιτικούς λίθους που περιείχαν ουράνιο-ράδιο σε υψηλότερες συγκεντρώσεις από τις συνήθεις (τις φυσικές) στάθμες.

Το πρόβλημα του Ραδονίου δεν είναι άγνωστο στο Ελληνικό κοινό. Κατά καιρούς, και για δέκα περίπου χρόνια υπήρξαν αρκετά δημοσιεύματα.

Ποιες όμως είναι οι επιπτώσεις του ραδονίου στην υγεία μας; Υπάρχει πρόβλημα ραδονίου στη χώρα μας; Στα ερωτήματα αυτά θα αναφερθούμε στη συνέχεια και θα δοθούν, φαντάζομαι, οι απαντήσεις.

Οι επί δέκα και πλέον χρόνια μετρήσεις, μας έδειξαν ότι η συγκέντρωση του ραδονίου στις κατοικίες - κλειστούς χώρους στη Θεσσαλονίκη κυμαίνεται από 0.4 έως 6.7 πικοκιουρί ανά λίτρο αέρα. Η συγκέντρωση αυτή θεωρείται σχετικά χαμηλή, της ίδιας τάξης μεγέθους με τη συγκέντρωση του ραδονίου στον ελεύθερο αέρα, έξω στην ατμόσφαιρα - ανοιχτός χώρος που κυμαίνεται από 0.1 έως 0.5 πικοκιουρί ανά λίτρο αέρα. Στις ΗΠΑ πρόσφατα επιστημονική ανακοίνωση που δημοσιεύτηκε το Μάρτιο 1987 σε διεθνές περιοδικό και που παρουσιάζει κατά κάποιο τρόπο τον χάρτη του ραδονίου της χώρας αυτής, η συγκέντρωση του ραδονίου στις κατοικίες κυμαίνεται από 0,36 (στην Πολιτεία της Χαβάης) έως 4354.47 (στην Πολιτεία του Μαίην) πικοκιουρί ανά λίτρο αέρα. Η χαμηλότερη, εκείνη της Χαβάης, συγκέντρωση του ραδονίου συμπίπτει με τη δική μας χαμηλότερη. Στη Σουηδία, σε επιστημονική ανακοίνωση (1984) επί 32000 κατοικιών, σε 3348 κατοικίες το ραδόνιο ήταν πάνω από 10.8 πικοκιουρί ανά λίτρο αέρα, ενώ σε 78 κατοικίες ξεπερνούσε τα 54 πικοκιουρί ανά λίτρο αέρα.

Τι σημαίνει όμως για όλους εμάς, τον πλατύ πληθυσμό, η συγκέντρωση του ραδονίου στα επίπεδα αυτά; Εκείνο που έχει περισσότερη σημασία για την υγεία μας και αφορά ειδικότερα τους πνεύμονες και όλο το αναπνευστικό σύστημα δεν είναι αυτό καθεαυτό το ραδόνιο, αλλά τα θυγατρικά του ισότοπα: Πολώνιο-218 και 214, μόλυβδος-214 και βισμούθιο-214. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν το βαθμό ισορροπίας ανάμεσα στο ραδόνιο και τα θυγατρικά του (0,5 για την περίπτωση κλειστών χώρων-κατοικίες) και τον παράγοντα επικινδυνότητας (risk factor) όπως ορίζεται διεθνώς (200 - 400 10^{-6} ανά WLM*) μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αναμενόμενο αριθμό περιπτώσεων καρκίνου των πνευμόνων (η περίπτωση από το ραδόνιο) ανά έτος. Π.χ. για την Ελλάδα, πληθυσμός 10 εκατομμύρια περίπου και για τη μετρηθείσα ως τώρα συγκέντρωση του ραδονίου, δεχόμενοι το ίδιο εύρος διακύμανσης για όλη τη χώρα, καθόσον δεν πιστεύεται και δεν αναμένεται να διαφοροποιηθεί ριζικά όταν θα έχουν ολοκληρωθεί οι μετρήσεις σε όλη την έκταση της χώρας, ο αριθμός των αναμενόμενων περιπτώσεων καρκίνων από το ραδόνιο θα κυμαίνεται από περίπου 160 έως 6200 το χρόνο. Στις ΗΠΑ τα αντίστοιχα νούμερα όπως ήδη αναφέρονται σε επιστημονική ανακοίνωση του 1980, κυμαίνονταν από 9700 έως 21800 τον χρόνο. Με βάση τα στοιχεία του 1987 οι ανωτέρω αριθμοί αυξάνονται πολύ περισσότερο. Σε πρόσφατο δημοσίευμα στο Indoor Pollution News (ΗΠΑ) αναφέρεται ότι το ραδόνιο είναι η αιτία 5.000 έως 30.000 θανάτων από καρκίνο του πνεύμονα κάθε χρόνο στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής.

Σύμφωνα με τα στοιχεία της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδος (ΕΣΥΕ) του έτους 1983, νεοπλάσματα (καρκίνοι) της τραχείας, των βρόγχων, του πνεύμονος αναφέρονται 7235 επί συνόλου 52250 καρκίνων, εν γένει. Βέβαια, δεν πρέπει να αγνοηθεί ότι, ένας μεγάλος αριθμός των καρκίνων του αναπνευστικού συστήματος, το μεγαλύτερο ίσως ποσοστό, οφείλεται στο κάπνισμα, όπως λέγουν οι ειδικοί (επιδημιολόγοι).

Παρά ταύτα, το ραδόνιο μπορεί να είναι η αιτία γένεσης καρκίνων των πνευμόνων και στη χώρα μας (κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις), έστω και σε μικρό ποσοστό, κατά πολύ μικρότερο από το αντίστοιχο στις χώρες ΗΠΑ ή Σουηδία που έχουν έντονο το πρόβλημα του ραδονίου, όπως ήδη είναι γνωστό. Η μείωση του ραδονίου στις κατοικίες και ο περιορισμός των συνεπειών του στην ανθρώπινη υγεία επιτυγχάνεται ως εξής:

1) Καλός εξαερισμός των κατοικιών που σημαίνει πολλές αλλαγές αέρα την ημέρα.

2) Κατάλληλος συνδυασμός, τόσο της θερμομόνωσης, όσο και του αιρ-κοντίσιονιγκ (κλιματισμός) των κατοικιών με τον επαρκή εξαερισμό.

3) Επιλογή των οικοδομικών υλικών ύστερα από εξέταση της ραδιενέργειάς τους, καθόσον είναι δυνατόν η πρώτη ύλη από την οποία παρασκευάζονται να περιέχει ραδιενεργά της σειράς ουρανίου-ραδίου που παράγουν το ραδόνιο. Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι έχει γίνει ήδη επιστημονική ανακοίνωση σε διεθνή περιοδικά ή συνέδρια τόσο από το Εργαστήριο Πυρηνικής Φυσικής του Παν/μίου Θεσ/νίκης (1984, 1991,1994), όσο και από άλλους επιστήμονες, για τη ραδιενέργεια των οικοδομικών υλικών στη χώρα μας.

Όμως, επειδή η τεχνολογία των οικοδομικών υλικών προχωρεί αλματωδώς και νέα κάθε φορά οικοδομικά υλικά παράγονται, αφού νέες πηγές πρώτων υλών έρχονται στο φως της ημέρας, επιβάλλεται να γίνεται έλεγχος της ραδιενέργειας των προϊόντων της τεχνολογίας μας, ώστε να είναι σύμφωνα με τις διεθνείς προδιαγραφές, όπως αυτές καθορίζονται από τη Διεθνή Επιτροπή Ραδιο-προστασίας (ICRP). Στις ΗΠΑ ήδη οι αγοραστές κατοικιών ζητούν να προμηθευτούν το πιστοποιητικό ελέγχου του ραδονίου πριν από την υπογραφή του συμβολαίου αγοράς κατοικίας. Η αμερικανική Υπηρεσία Προστασίας Περιβάλλοντος - Environmental Protection Agency (EPA) έχει τυπώσει ειδικά φυλλάδια και τρικ για το ευρύ κοινό με τα οποία ενημερώνει για το ραδόνιο, τα προστατευτικά μέτρα που πρέπει να παίρνουν οι κατασκευαστές οικοδομών για τη μείωση του ραδονίου στον αέρα εσωτερικών χώρων, τον εξαερισμό, κ.τ.λ.

Ανακεφαλαιώνοντας, θα ήθελα να επισημάνω το συμπέρασμα που εξάγεται για τη χώρα μας ότι δε θα πρέπει να θεωρείται σήμερα ότι υπάρχει πρόβλημα ραδονίου στις κατοικίες με την έννοια που υφίσταται αυτό στις ΗΠΑ ή την Σουηδία. Αν ληφθεί δε υπ' όψιν ότι για πολλούς μήνες στην Ελλάδα έχουμε όχι μόνο τα παράθυρα, αλλά και τις πόρτες ανοιχτές [όχι μόνο στην περίπτωση του καύσωνα (1987)] και ότι είναι ελάχιστες οι περιπτώσεις υψηλού βαθμού θερμομόνωσης ή αιρ κοντίσιονιγκ στη χώρα μας, τότε ο αριθμός των περιπτώσεων καρκίνων του αναπνευστικού συστήματος που υπολογίστηκε με βάση την ισχύουσα θεωρία, γίνεται ακόμη πιο μικρός, όχι όμως μηδέν, όπως θα επιθυμούσαμε. Γιατί, για τη ραδιενέργεια και τη ραδιενεργό δόση ισχύει ότι δεν υπάρχει δόση καλή ή κακή, όσο μικρή και αν είναι.

* 1 WL (Working Level) είναι η συγκέντρωση του ραδονίου σε ισορροπία με τα θυγατρικά του ίση προς 100 πικοκιουρί ανά λίτρο αέρα και πιο συγκεκριμένα η συνολική ενέργεια που μεταφέρεται από την ακτινοβολία άλφα των θυγατρικών του ραδονίου που αντιστοιχεί στη συγκέντρωση αυτή, ενώ 1 WLM (Working Level Month) είναι η επίδραση στον ανθρώπινο οργανισμό από την έκθεση στην ανωτέρω ακτινοβολία.

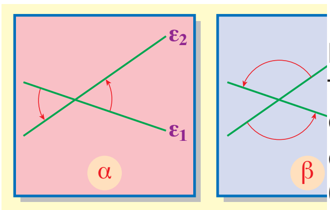
ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ στο ΕΡΓΟ της ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

Του **Γ. Ατρείδη**, Καθηγητή Φυσικής

Ο υπολογισμός του έργου της δύναμης ελατηρίου είναι από τα σημεία που δυσκολεύουν αρκετά τους μαθητές της τρίτης λυκείου.

Στο τμήμα αυτό θα ασχοληθούμε διεξοδικά με το παραπάνω θέμα έτσι ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε απόλυτα τα προβλήματα που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό του έργου της δύναμης ελατηρίου.

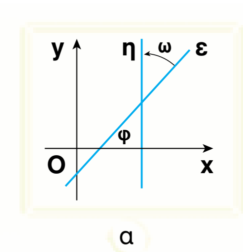
Με βάση το νόμο του Hooke, το μέτρο της δύναμης ενός ελατηρίου το οποίο έχει κάποια παραμόρφωση (σε σχέση με το φυσικό του μήκος) δίνεται από τη σχέση $F = K\cdot\Delta\ell$.



Σχήμα 1

Όπου $\Delta\ell$ είναι η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου. Βλέπουμε ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι μεταβλητή. Άρα θα υπολογίζουμε το έργο της όπως αυτό των μεταβλητών δυνάμεων.

Ξέρουμε από τη θεωρία ότι όταν επιμηκύνουμε ένα ελατήριο με σταθερή ταχύτητα κατά $\Delta\ell$, ώστε $F = F_{\varepsilon\lambda}$ συνεχώς, το έργο που δαπανάμε αποθηκεύεται σ' αυτό με τη μορφή δυναμικής ενέργειας.



Σχήμα 2

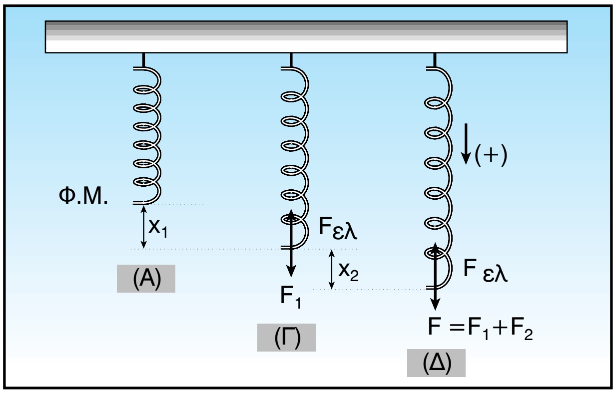
Από τη γραφική παράσταση του σχήματος 2 παίρνουμε ότι το έργο της δύναμης $F_{\varepsilon\lambda}$ (το οποίο είναι ίσο με το έργο της εξωτερικής δύναμης) που αποθηκεύεται σ' αυτό σα δυναμική ενέργεια είναι:

$$W = \frac{1}{2}\Delta\ell \cdot K\Delta\ell = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2 = E_\Delta$$

➩ **Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος είναι μηδέν.**

● Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης του ελατηρίου με δύο τρόπους

Α. *Σα μεταβολή δύο ενεργειακών θέσεων.* (Μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου).



Σχήμα 3

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου μεταξύ δύο θέσεων θα είναι ίσο με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου στις δύο αυτές θέσεις.

- Το έργο για τη μετακίνηση Α Γ θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} W_{\varepsilon\lambda.A\ \Gamma} = E_{\Delta(A)} - E_{\Delta(\Gamma)} \\ \text{Όμως } E_{\Delta(A)} = 0 \end{array}\right\}$$

$$W_{\varepsilon\lambda.A\ \Gamma} = -E_{\Delta(\Gamma)} = -\frac{1}{2}Kx^2{}_1$$

- Το έργο για τη μετακίνηση Γ Δ είναι:

$$W_{\varepsilon\lambda.\Gamma\ \Delta} = E_{\Delta(\Gamma)} - E_{\Delta(\Delta)}$$

$$W_{\varepsilon\lambda.\Gamma\ \Delta} = \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 + x_2)^2 < 0.$$

- Το έργο για τη μετακίνηση Α Δ είναι:

$$W_{\varepsilon\lambda A\ \Delta} = E_{\Delta(A)} - E_{\Delta(\Delta)} = 0 - \frac{1}{2}K(x_1 + x_2)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2$$

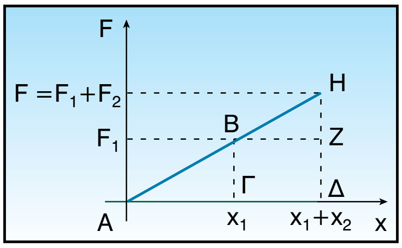
❖ ***Προσοχή***: για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε κάθε θέση, μετράμε τις αποστάσεις πάντοτε από το φυσικό μήκος.

❖ Στις παραπάνω μετακινήσεις το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι για τις παραπάνω μετακινήσεις πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια.

Β. *Υπολογισμός του έργου της δύναμης του ελατηρίου γραφικά.*

Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απόσταση

(F = Kx) με βάση το σχήμα 3 φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ εκφράζει το έργο της δύναμης του ελατηρίου για μετατόπιση x_1.

Επίσης εκφράζει τη δυναμική ενέργεια που έχει το ελατήριο όταν έχει την παραπάνω επιμήκυνση.

$$(ΑΒΓ) = E_1 = \frac{1}{2}Kx_1^2$$

- Το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΗΔ) εκφράζει το συνολικό έργο της δύναμης του ελατηρίου για τη συνολική επιμήκυνση x_1+x_2. Επίσης εκφράζει τη δυναμική ενέργεια που έχει το ελατήριο όταν έχει την παραπάνω επιμήκυνση.

$$(ΑΗΔ) = E_2 = \frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2$$

- Το εμβαδόν του τραπεζίου (ΒΗΔΓ) εκφράζει το έργο της δύναμης του ελατηρίου για τη μετατόπιση x_2, δηλαδή από το Γ στο Δ. Επίσης εκφράζει την επιπλέον δυναμική ενέργεια που απόκτησε το ελατήριο εξαιτίας της επιμήκυνσης x_2.

$$(ΒΗΔΓ) = E_3 = \frac{F_1+F}{2}\cdot x_2 = \frac{Kx_1+K(x_1+x_2)}{2}\cdot x_2 =$$
$$= \frac{1}{2}Kx_1x_2 + \frac{1}{2}K(x_1+x_2)x_2 =$$
$$= \frac{1}{2}Kx_1x_2 + \frac{1}{2}Kx_1x_2 + \frac{1}{2}Kx_2^2 =$$
$$= Kx_1x_2 + \frac{1}{2}Kx_2^2$$

Η παραπάνω σχέση είναι ίδια με τη σχέση που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τη διαφορά των ενεργειακών θέσεων.

Το προηγούμενο εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί και ως διαφορά των εμβαδών (ΑΗΔ) – (ΑΒΓ).

- Το εμβαδόν του ορθογωνίου (ΒΖΔΓ) εκφράζει το έργο μόνο της δύναμης F_1 για μετατόπιση x_2

$$(ΒΖΔΓ) = E_4 = Kx_1 \cdot x_2\,.$$

- Το εμβαδόν του τριγώνου (ΒΖΗ) εκφράζει το έργο μόνο της δύναμης F_2 για μετατόπιση x_2

$$(ΒΖΗ) = E_5 = \frac{1}{2}Kx_2^2.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Όταν υπολογίζουμε το έργο της δύναμης ελατηρίου με την παραπάνω μέθοδο (γραφικά), πρέπει να τοποθετούμε το σωστό πρόσημο μπροστά από τη σχέση που μας δίνει το έργο. Δηλαδή αν η δύναμη είναι αντίθετη στην κίνηση, όπως στην περίπτωσή μας (ανθιστάμενο έργο), πρέπει να βάλουμε το πρόσημο (–) στις σχέσεις του έργου. Αυτό συμβαίνει γιατί τα εμβαδά είναι πάντοτε θετικά και δίνουν την απόλυτη τιμή του έργου της δύναμης.

Παρατηρήσεις

- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι θετικό όταν η δύναμη έχει ίδια φορά με την κίνηση και αρνητικό όταν έχει αντίθετη φορά.
  Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν υπολογίζουμε το παραπάνω έργο.

Π.χ. Έστω ότι υπολογίζουμε το έργο της δύναμης του ελατηρίου σα διαφορά δύο ενεργειακών θέσεων για μετατόπιση από το σημείο Γ στο Δ με την παρακάτω μορφή (σχήμα 3)

$$W_{ελ.Γ\quad Δ} = \frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2\,.$$

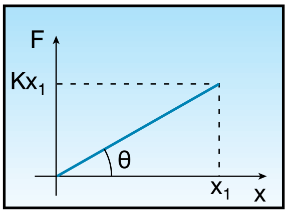
Επειδή το παραπάνω έργο είναι αρνητικό γράφουμε:

$$W_{ελ.Γ\quad Δ} = -\left[\frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2\right],$$

Αν όμως παίρναμε τη διαφορά αντίθετα δε θα έπρεπε να βάλουμε το μείον.

$$W_{ελ.Δ\quad Γ} = \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2\,.$$

Αν δεν προσέξουμε ότι η παραπάνω διαφορά είναι αρνητική και τοποθετήσουμε ένα μείον μπροστά στο έργο τότε μετατρέπουμε σε θετικό το έργο της δύναμης του ελατηρίου και επομένως κάνουμε λάθος.



Σχήμα 5

- Στο διάγραμμα F-x (σχήμα 5) η κλίση της ευθείας μας δίνει τη

  σταθερά του ελατηρίου

  $εφθ = \dfrac{Kx_1}{x_1} \qquad εφθ = K.$

- Ένα σώμα το οποίο είναι στερεωμένο στο άκρο ενός ελατηρίου και κινείται κατά μήκος του άξονά του αποκτά μέγιστη ταχύτητα όταν συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι ίση με μηδέν $ΣF=0$ (π.χ. απλός αρμονικός ταλαντωτής, που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας).

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο επόμενο παράδειγμα

Παράδειγμα

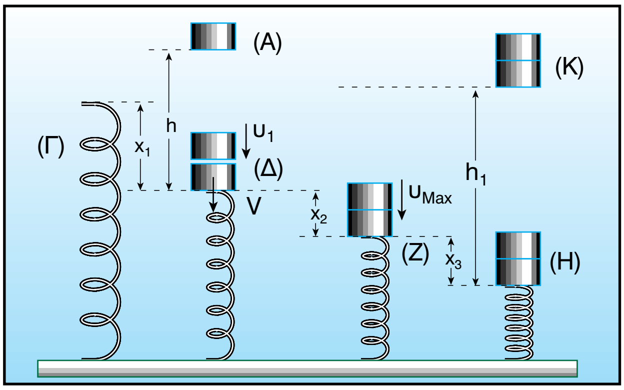
Σώμα μάζας $m_1=1$ kgr αφήνεται ελεύθερο να πέσει από ύψος $h=1{,}8$ m πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς K = 100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου βρίσκεται στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, ισορροπεί σώμα μάζας m_2 = 2kgr. Αν η κρούση των δυο σωμάτων είναι πλαστική να βρεθούν:

α) Η ταχύτητα του σώματος m_1 λίγο πριν την κρούση.
β) Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα στη διάρκεια της κίνησής του.
γ) Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.
δ) Το ύψος στο οποίο θα ανέβει το συσσωμάτωμα από τη θέση της μέγιστης συσπείρωσης.

ε) Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος m_1 που γίνεται θερμότητα κατά την κρούση.

στ) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας (πριν την κρούση) του σώματος m_1 που γίνεται δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα έχει τη μέγιστη ταχύτητα.

Λύση



Σχήμα 6

α) Το ελατήριο αρχικά θα είναι συσπειρωμένο εξαιτίας του βάρους της m_2. Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση (Δ) έχουμε

$$F_\Delta = 0 \qquad F_{\varepsilon\lambda} - B_2 = 0 \qquad F_{\varepsilon\lambda} = B_2 \qquad Kx_1 = m_2 g$$

$$x_1 = \frac{m_2 g}{K} = 0{,}2\text{m}.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για το σώμα m_1 στις θέσεις (Α) και (Δ) πριν την κρούση έχουμε

$$E_A = E_\Delta \qquad m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2$$

$$υ_1 = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/sec}.$$

β) Το συσσωμάτωμα θα αποκτήσει ταχύτητα V μετά την κρούση η οποία υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ορμής.

$$\vec{J}_{\alpha\rho\chi} = \vec{J}_{\tau\varepsilon\lambda} \qquad m_1 υ_1 = (m_1+m_2)V$$

$$V = \frac{m_1 υ_1}{m_1+m_2} = 2\text{m/sec}.$$

Το συσσωμάτωμα θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν (θέση Ζ).

$$F_Z = 0 \qquad B_{o\lambda} = F_{\varepsilon\lambda,\,1} \qquad (m_1+m_2)g = K(x_1+x_2)$$

$$x_2 = 0{,}1\text{m}.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση (Δ) (μετά την κρούση) μέχρι τη θέση (Ζ).

$$E_{K(\Delta)} + \quad W = E_{K(Z)}$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + W_B + W_{F\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_{max}^2$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + (m_1+m_2)gx_2 - \left[\frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_{max}^2 \qquad υ_{max} = 2{,}08\text{m/sec}.$$

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση (Δ) (μετά την κρούση) μέχρι τη θέση (Η).

$$E_{K(\Delta)} + \quad W = E_{K(H)} \qquad \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + W_B + W_{F\varepsilon\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + (m_1+m_2)g(x_2+x_3) -$$

$$-\left[\frac{1}{2}K(x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2\right] = 0 \qquad x_3 = 0{,}36 \text{ m}$$

Και $x_{max} = x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}66$m.

δ) Ελέγχουμε αν το συσσωμάτωμα περνάει το φυσικό μήκος του ελατηρίου

$$E_{\kappa(H)} + W_B + W_{F\varepsilon\lambda} = E_{\kappa(\Gamma)}$$

$$0 - (m_1+m_2)\cdot g(x_1+x_2+x_3) + \frac{1}{2}K(x_1+x_2+x_3)^2 = E_{\kappa(\Gamma)}$$

$$E_{\kappa(\Gamma)} = 1{,}98 > 0.$$

Άρα το συσσωμάτωμα θα αποχωριστεί από το ελατήριο και θα φτάσει στη θέση Κ. Παίρνουμε αρχή διατήρησης της ενέργειας για τις θέσεις (Η) και (Κ).

$$E_{(H)} = E_{(K)} \qquad \frac{1}{2}K(x_1+x_2+x_3)^2 = (m_1+m_2)gh_1$$

$$h_1 = 0{,}726\text{m}.$$

ε) Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος m_1 που γίνεται θερμότητα κατά την κρούση είναι

$$\alpha_1 = \frac{E_\theta}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\Delta E_\kappa}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} =$$

$$= 0{,}66 \quad 66\%.$$

στ) Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος m_1 που γίνεται δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα έχει τη μέγιστη ταχύτητα είναι

$$\alpha_2 = \frac{E_{\Delta,\,\varepsilon\lambda}}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2}K(x_1+x_2)^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} = 0{,}25 \qquad 25\%.$$

Στις ασκήσεις αυτού του τύπου ελέγχουμε αν το σώμα ξεπερνάει το φυσικό μήκος του ελατηρίου όταν ανέρχεται.

Ο έλεγχος αυτός γίνεται ως εξής: Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση της μέγιστης συσπείρωσης μέχρι το φυσικό μήκος.

Αν η κινητική ενέργεια που έχει το σώμα στο φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι θετική τότε αυτό αποχωρίζεται από το ελατήριο.

Αν είναι αρνητική δε φτάνει στο φυσικό μήκος. Και αν είναι μηδέν το σώμα μόλις φτάνει στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν το πρόβλημα αναφέρει ότι το σώμα είναι στερεωμένο στο ελατήριο, τότε και να περάσει αυτό από το φυσικό μήκος δεν αποχωρίζεται από το ελατήριο.

ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ

Του **Δ. Σ. Κυριάκου,** Αν. Καθηγητή στο Τμήμα Φυσικής του Α.Π.Θ.

*Πολλές φορές ακούμε από ραδιόφωνο ή τηλεόραση ή διαβάζουμε στις εφημερίδες για πράγματα και έννοιες που το λιγότερο μας φαίνονται ακατανόητες. Ίσως η κατανόησή τους απαιτεί ιδιαίτερες εξειδικευμένες γνώσεις, η απλουστευμένη παρουσίασή τους δεν μας είναι αρκετή και έτσι η απορία μας αλλά και η αδυναμία κατανόησης γίνονται μεγαλύτερες. Εδώ θα ασχοληθούμε με τις **μελανές οπές** (ή μαύρες τρύπες) που αναφέρονται ότι υπάρχουν στο αστρικό διάστημα.*

Οι μελανές οπές είναι μια δραματική πρόβλεψη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein, της οποίας ένα από τα κυριότερα συμπεράσματα είναι η καμπύλωση του χώρου και του χρόνου εξαιτίας της παρουσίας ύλης. Επιβεβαίωση αυτού του γεγονότος είναι η παρατηρηθείσα πειραματικά βαρυτική φασματική (ερυθρή) μετατόπιση και η κάμψη (λύγισμα) των φωτεινών ακτίνων που περνούν κοντά από τον Ήλιο. Σύμφωνα με την πρόβλεψη της θεωρίας, αστέρες που έχουν μεγαλύτερη μάζα από τον Ήλιο, αφού εξαντλήσουν τα καύσιμά τους, θα συμπυκνωθούν και θα παραμείνουν αιώνια μελανές οπές. Το βαρυτικό τους πεδίο είναι τόσο ισχυρό, ώστε ακόμη και τα φωτόνια δεν μπορούν να δραπετεύσουν από αυτό. Σε όλα αυτά τα φαινόμενα, καθοριστικό ρόλο έχει η τιμή της παραμέτρου

$$p = \frac{2GM}{rc^2},$$

όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο της μάζας M και c η ταχύτητα του φωτός. Ισχυρά σχετικιστικά φαινόμενα εμφανίζονται όταν η τιμή της p πλησιάζει τη μονάδα, ενώ η τιμή της στην επιφάνεια του Ήλιου είναι μόνον 10^{-5}. Τέτοιες περιοχές μπορούν να βρίσκονται στο κέντρο των γαλαξιών ή κοντά σε καταρρεύσαντα αστέρια. Επειδή η ισχυρή καμπύλωση απομονώνει αυτές τις περιοχές από το υπόλοιπο του Σύμπαντος δεν είναι δυνατόν να τις παρατηρήσουμε άμεσα.

Πρώτος ο J. Michell το 1784 επεσήμανε τις επιπτώσεις που έχει το βαρυτικό δυναμικό $-GM/r$ όταν γίνει αριθμητικά μεγάλο. Ας πάρουμε τη γνωστή μας περίπτωση, που ένα σώμα μάζας m αποκτά στην επιφάνεια της Γης αρχική ταχύτητα υ με σκοπό να διαφύγει στο αστρικό διάστημα (θεωρητικά στο άπειρο), όπου η δυναμική του ενέργεια μηδενίζεται, ενώ η κινητική του ενέργεια θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με το μηδέν. Επειδή η ολική ενέργεια διατηρείται, πρέπει στην επιφάνεια της Γης να ισχύει η συνθήκη

$$\frac{1}{2}mu^2 - G\frac{M_\Gamma m}{r_\Gamma} \geq 0,$$

από την οποία υπολογίζεται η ταχύτητα της διαφυγής. Γενικώς για οποιοδήποτε αστέρα η ταχύτητα διαφυγής είναι

$$\upsilon \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Καθώς η ακτίνα του αστέρα μειώνεται βαθμηδόν, η ταχύτητα διαφυγής αυξάνεται συνεχώς και προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός. Τότε η ακτίνα του αστέρα είναι

$$r_0 \int \frac{2GM}{c^2}$$

και είναι γνωστή σαν ακτίνα του Schwarzschild. O Michell υποστήριξε ότι ακόμη και το φως δεν μπορεί να διαφύγει από έναν τόσο και ακόμη περισσότερο συμπαγή αστέρα και συνεπώς ένας τέτοιος αστέρας καθίσταται αόρατος. Στην επιφάνεια της ακτίνας r_0 ο παράγοντας p γίνεται ίσος με τη μονάδα και όπως απέδειξε θεωρητικά ο Schwarzschild (1916) αν ένας αστέρας συρρικνωθεί σε ακτίνα μικρότερη από r_0, ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να αναδυθεί από τη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r_0 γίνεται άπειρος. Έτσι ένας παρατηρητής έξω από την ακτίνα r_0 όσο μακρό χρόνο και να περιμένει ποτέ δεν θα λάβει το φως που εκπέμπεται από πηγή μέσα από την ακτίνα r_0. Ο αστέρας είναι αόρατος και περιγράφεται ως μία μελανή οπή. Η επιφάνεια ακτίνας r_0 συνιστά αυτό που ονομάζεται *ορίζοντας γεγονότων*.

Η φύση των μελανών οπών καθιστά δύσκολη την ανίχνευσή τους και ό,τι έχουμε μέχρι τώρα είναι έμμεσες ενδείξεις για την ύπαρξή τους. Πάντως δύο είναι οι πιο πιθανές εξελικτικές πορείες για το σχηματισμό των μελανών οπών. Πρώτον, αστέρες με μάζα 20-60 M_H τερματίζουν τον κύκλο της θερμοπυρηνικής τους καύσης σε ένα πυρήνα σιδήρου ο οποίος είναι αρκετά συμπαγής, ώστε να καταρρεύσει κάτω από την ίδια βαρυτική του αυτοέλξη. Δεύτερον, οι αστέρες στο κέντρο των γαλαξιών είναι δυνατόν να συνενώνονται και να σχηματίζουν συμπαγείς αστέρες των οποίων το τελικό προϊόν θα ήταν μια υπερσυμπαγής μελανή οπή με μάζα $10^6 - 10^9\ M_H$. Με τον τρόπο αυτό εξηγείται και η μεγάλη ποσότητα ενέργειας που εκπέμπεται από τους πυρήνες ορισμένων ενεργών γαλαξιών. ◆

ΕΛΑΤΤΩΣΗ ΤΑΣΗΣ ΑΤΜΩΝ & ΑΝΥΨΩΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΖΕΣΗΣ

αραιών διαλυμάτων μη πτητικών υγρών και στερεών σε υγρά

Του **Α. Γιαννακουδάκη,** Αν. Καθηγητή Χημείας στο Α.Π.Θ.

Η διάλυση ενός συστατικού (**Α**) μέσα σε ένα υγρό (**Β**) έχει σαν αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις τη σημαντική αλλοίωση των δυνάμεων συνοχής μεταξύ των μορίων του κάθε συστατικού (F_{AA}, F_{BB}) και τη δημιουργία δυνάμεων συνάφειας μεταξύ των ετεροειδών μορίων των δυο συστατικών (F_{AB}).
Διακρίνονται τρεις περιπτώσεις:

- $F_{AB} \cong \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$ (ιδανική συμπεριφορά)
- $F_{AB} < \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$
- $F_{AB} > \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$

Η μέτρηση της τάσης των ατμών του διαλύματος, καθώς και οι μερικές τάσεις των ατμών των δυο συστατικών, δίνουν σημαντικές πληροφορίες για τη μελέτη των διαλυμάτων.
Γενικά για συστήματα δυο υγρών (**Α** και **Β**), που αναμιγνύονται πλήρως μεταξύ τους, ισχύει ο καλούμενος γενικός νόμος **της αμοιβαίας ταπείνωσης της τάσης των ατμών**: **Η μερική τάση των ατμών κάθε συστατικού (P_A και P_B) στην υπερκείμενη του υγρού διαλύματος αέρια φάση σε ορισμένη θερμοκρασία είναι πάντοτε μικρότερη της τάσης των ατμών του αντίστοιχου συστατικού σε καθαρή κατάσταση (P^0_A και P^0_B) στην ίδια θερμοκρασία.**

Σε ένα ιδανικά συμπεριφερόμενο διάλυμα δύο υγρών συστατικών ($F_{AB} \cong \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$, η παρουσία του ενός δεν επηρεάζει καθόλου τη συμπεριφορά του άλλου) η μερική τάση των ατμών κάθε ενός συστατικού (P_A, P_B) είναι απευθείας ανάλογη προς το γραμμομοριακό κλάσμα αυτού στο διάλυμα (νόμος ***Raoult*** για την τάση των ατμών).

Δηλαδή

$$P_A = N_A P^0_A, \quad P_B = N_B P^0_B$$

και

$$P = N_A P^0_A + N_B P^0_B .$$

- Για την περίπτωση π.χ. διαλύματος βενζολίου-τολουολίου 20% w/w σε τολουόλιο στη θερμοκρασία των 30 °C, στην οποία οι τάσεις των ατμών του καθαρού βενζολίου και του καθαρού τολουολίου είναι 118,2 mm Hg και 36,7 mm Hg, αντίστοιχα, η τάση των ατμών του διαλύματος θα είναι:

$$P = \frac{\frac{80}{78}}{\frac{80}{78}+\frac{20}{92}}\,118{,}2 + \frac{\frac{20}{92}}{\frac{80}{78}+\frac{20}{92}}\,36{,}7 = 103{,}9 \text{ mm Hg.}$$

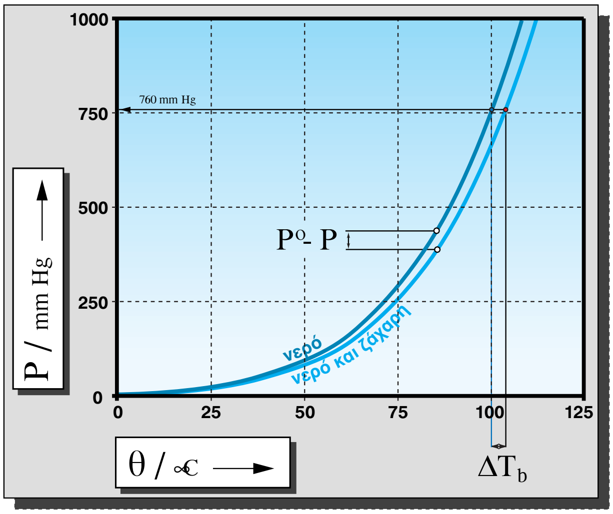
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι τέτοια ιδανική συμπεριφορά εμφανίζεται γενικά και στα **αραιά διαλύματα**. Όταν μάλιστα η διαλυμένη ουσία (**Β**) σε ένα αραιό διάλυμα είναι **υγρό με πολύ μικρή (αμελητέα) τάση ατμών** ($P^0_B \cong 0$) ή **στερεό** (τα στερεά έχουν πολύ μικρή τάση ατμών), τότε η τάση των ατμών του διαλύματος, που οφείλεται μόνο στο διαλύτη (**Α**), είναι

$$P = N_A P^0_A, \quad ή \quad P = N_A P^0,$$

(νόμος Raoult για τα αραιά διαλύματα).

- Για ένα διάλυμα νερού- ζάχαρης 5% w/w σε ζάχαρη στη θερμοκρασία των 100 °C, στην οποία η τάση των ατμών του καθαρού νερού είναι 760,0 mm Hg, η τάση των ατμών του διαλύματος θα είναι:

$$P = \frac{\frac{95}{18}}{\frac{95}{18}+\frac{5}{342}}\,760{,}0 = 757{,}9 \text{ mm Hg.}$$



Επομένως η τάση των ατμών αυτών των διαλυμάτων είναι μικρότερη από αυτή του καθαρού διαλύτη (στην ίδια θερμοκρασία), όπως φαίνεται και στο σχή-

μα για την περίπτωση του νερού σα διαλύτη και ενός διαλύματος αυτού με ζάχαρη. **Η ελάττωση της τάσης των ατμών ($P^0 - P$) αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Το πηλίκο όμως αυτής προς την τάση των ατμών του καθαρού διαλύτη, (δηλ. η σχετική ελάττωση της τάσης των ατμών) είναι ανεξάρτητο από τη θερμοκρασία** και δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta P_{\sigma\chi.} = \frac{P^0 - P}{P^0} = \frac{n_{\delta\iota\alpha\lambda\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma}}{n_{\delta\iota\alpha\lambda\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma} + n_{\delta\iota\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\eta}} .$$

Αν η διαλυμένη ουσία υφίσταται κατά την διάλυσή της **ηλεκτρολυτική διάσταση** ή **πολυμερισμό**, δηλαδή υφίσταται μοριακή μεταβολή, τότε πρέπει στους τύπους στη θέση του αριθμού των mol της διαλυμένης, που υπολογίστηκαν όπως ήταν αυτή πριν διαλυθεί, να τεθεί ο αριθμός των mol με τα οποία βρίσκεται αυτή στην κατάσταση της διάλυσής της στις συγκεκριμένες συνθήκες του διαλύματος.

Ένα υγρό που βρίσκεται κάτω από ορισμένη εξωτερική πίεση αρχίζει να βράζει, όταν η θερμοκρασία του ανέλθει τόσο, ώστε η τάση των ατμών του να γίνει ίση ή κατά τι μεγαλύτερη της πίεσης που επικρατεί πάνω στην επιφάνειά του.

- Όταν λέμε π.χ. ότι το σημείο ζέσεως του νερού είναι 100 °C εννοούμε και ότι στη θερμοκρασία αυτή η τάση των ατμών του νερού είναι 760 mm Hg.

Εξετάζοντας την καμπύλη τάσης ατμών - θερμοκρασίας του διαλύματος νερού-ζάχαρης παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία του διαλύματος πρέπει να ανέβει πάνω από τους 100 °C για να εξισωθεί η τάση των ατμών του με την εξωτερική πίεση και να **αρχίσει** έτσι ο **βρασμός**.

Στα αραιά λοιπόν διαλύματα η ανύψωση του σημείου ζέσης (ΔT_b) βρίσκεται σε άμεση σχέση με την αντίστοιχη ελάττωση της τάσης των ατμών του διαλύματος και μάλιστα είναι **ανάλογη** της σχετικής ελάττωσης της τάσης των ατμών. Επομένως αν **m** είναι η μοριακότητα κατά βάρος της διαλυμένης ουσίας θα έχουμε

$$\Delta T_b = \lambda \Delta P_{\sigma\chi.} = \lambda \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m} + \frac{1000}{MB_{\delta\iota\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\eta}}} \cong \lambda \frac{\mathbf{m}}{\frac{1000}{MB_{\delta\iota\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\eta}}}$$

και θέτοντας

$$\frac{\lambda \cdot MB_{\delta\iota\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\eta}}{1000} = k_b$$

προκύπτει $\Delta T_b = k_b \mathbf{m}$.

Η ανύψωση του σ.ζ. των αραιών διαλυμάτων είναι ανάλογη της μοριακότητας κατά βάρος της διαλυμένης ουσίας (νόμος ***Raoult*** για την ανύψωση του σ.ζ.). Η ζεσεοσκοπική σταθερά παριστάνει την ανύψωση του σ.ζ. όταν η συνολική μοριακότητα κατά βάρος των διαλυμένων ουσιών είναι 1. Αυτό όμως δεν εφαρμόζεται στην πράξη, γιατί για τέτοια συγκέντρωση οι υποθέσεις και οι νόμοι των **αραιών διαλυμάτων** παύουν να ισχύουν.

Στα διαλύματα που $F_{AB} > \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$ (π.χ. πυριδίνη-μυρμηκικό οξύ) ή $F_{AB} < \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$ (π.χ. βενζόλιο-αιθυλική αλκοόλη) δεν ισχύει για την τάση των ατμών τους ο νόμος του Raoult (που ισχύει όταν $F_{AB} \cong \sqrt{F_{AA}F_{BB}}$). Αυτά παρουσιάζουν πειραματικές τιμές τάσης ατμών μικρότερες και μεγαλύτερες αντίστοιχα από τις αναμενόμενες από το νόμο του Raoult. ◆

στις ΕΞΩΘΕΡΜΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ λέμε «ΝΑΙ» στις ΕΝΔΟΘΕΡΜΕΣ τι λεμε;

Του **Γ. Μανουσάκη**, Καθηγητή Χημείας στο Α.Π.Θ.

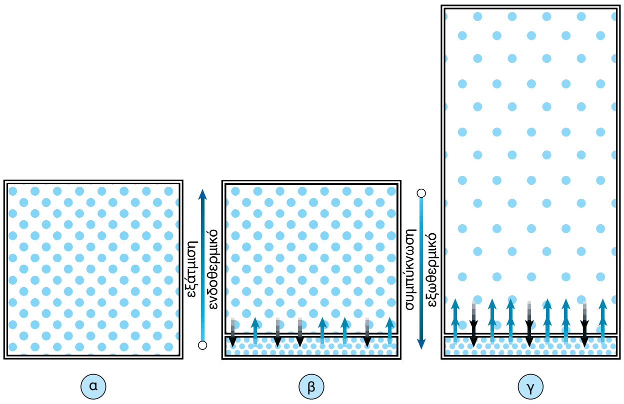
Είναι πολύ καλά γνωστό ότι τα διάφορα φυσικά συστήματα έχουν την τάση να αποκτήσουν τη λιγότερη ενέργεια, εξασφαλίζοντας έτσι τη μεγαλύτερη δυνατή σταθερότητα (αρχή της ελάχιστης ενέργειας). Επομένως, σύμφωνα με την αρχή αυτή δικαιολογείται η ύπαρξη των εξώθερμων αντιδράσεων. Τι γίνεται όμως με τις ενδόθερμες αντιδράσεις, στις οποίες συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο; Ποιοι παράγοντες επεμβαίνουν και πραγματοποιούνται οι ενδόθερμες αντιδράσεις; Τι λέμε στις περιπτώσεις αυτές στους μαθητές;

Για να καταλάβουμε καλύτερα ποιοι άλλοι παράγοντες επεμβαίνουν ώστε να κάνουν δυνατές (πραγματοποιήσιμες) και τις ενδόθερμες αντιδράσεις, θα μελετήσουμε ένα από τα πιο απλά ενδοθερμικά φαινόμενα, την εξάτμιση ενός υγρού. Επομένως, το ερώτημα για την περίπτωση αυτή είναι: γιατί τα υγρά εξατμίζονται, αφού το φαινόμενο είναι ενδοθερμικό, αφού συνοδεύεται από απορρόφηση θερμότητας (–q), αφού η ενέργεια του συστήματος αυξάνει;

Η απάντηση μπορεί να δοθεί με τις παρακάτω σκέψεις.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα δοχείο κλειστό 10 λίτρων (10 *l*), σχήμα 1(α) στο οποίο εισάγεται μια ποσότητα ύδατος ως υδρατμός. Κάθε μόριο ύδατος, λόγω της δυνατότητας που έχει να κινείται προς όλες τις κατευθύνσεις, έχει την ίδια πιθανότητα να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του δοχείου. Για να εκφραστεί αυτό με αριθμούς μπορούμε να πούμε, ότι κάθε μόριο του ύδατος έχει την ίδια πιθανότητα να βρίσκεται σ' ένα από τα 10.000 ml (χιλιοστόμετρα) του χώρου του δοχείου ή ότι η πιθανότητα να βρεθεί ένα ορισμένο μόριο ύδατος σ' ένα οποιοδήποτε ml του χώρου του δοχείου είναι 1 προς 10.000. Αν τώρα βάλουμε στο δοχείο αρκετή ποσότητα υδρατμών, ώστε μια ποσότητά τους να υγροποιηθεί και να καταλάβει έστω όγκο 100 ml στον πυθμένα του δοχείου, σχήμα 1(β) τότε η πιθανότητα κάθε μορίου ύδατος του υδρατμού να βρίσκεται σ' ένα οποιοδήποτε ml του δοχείου θα περιοριστεί κατά 100 ml. Βλέπουμε δηλαδή ελάττωσή της πιθανότητας εναλλαγής θέσεως.

Το αντίθετο φαινόμενο της εξάτμισης, η συμπύκνωση, είναι εξωθερμικό φαινόμενο, συνοδεύεται με αποβολή θερμότητας, +q, προς το περιβάλλον, επομένως η υγρή κατάσταση περικλείει μικρότερη ενέργεια, είναι πιο σταθερή. Δηλαδή, η υγροποίηση ευνοείται ενεργειακώς.



Σχήμα 1. α) Όλα τα μόρια του ύδατος βρίσκονται στην αέρια φάση. β) Συνύπαρξη υγρής και αέριας φάσης: ίσος αριθμός μορίων ύδατος «εξαερώνεται» και «συμπυκνώνεται» και γ) επειδή ελαττώθηκε ο αριθμός των «μορίων» του ύδατος που βρίσκονται στην αέρια φάση κοντά στην επιφάνεια του υγρού, επικρατεί η εξάτμιση.

Για να γίνει όμως η υγροποίηση πρέπει τα μόρια του ύδατος, που βρίσκονται σε αέρια φάση, να προσκρούσουν στην επιφάνεια του υγρού, να χάσουν μέρος από την κινητική τους ενέργεια και να υγροποιηθούν. Συμβαίνει όμως, ακόμη, ορισμένα μόρια του υγρού, που έχουν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από τη μέση κινητική ενέργεια των υπόλοιπων μορίων, να υπερνικούν την επιφανειακή τάση του υγρού και να περνούν στην αέρια φάση, δηλαδή να εξαερώνονται.

Όταν ο αριθμός των μορίων που αφήνουν την επιφάνεια του υγρού είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των μορίων που υγροποιούνται στον ίδιο χρόνο, τότε το υγρό εξατμίζεται.

Αν διαπλασιάσουμε τώρα τον όγκο του δοχείου σχήμα 1(γ), τότε, όπως είναι φυσικό να υποθέσουμε, ο αριθμός των μορίων του ύδατος που βρίσκονται στην αέρια φάση και προσκρούουν στην επιφάνεια του υγρού θα είναι αρκετά μικρότερος από τον αριθμό των μορίων που φεύγουν από την επιφάνεια του υγρού και θα ευνοείται η εξάτμιση, παρ' όλο που όπως είδαμε, η υγρή φάση είναι ενεργειακώς σταθε-

ρότερη. Δηλαδή παρατηρούμε, ότι η κατεύθυνση προς την οποία θα συμβεί το φαινόμενο υγροποίηση-εξάτμιση είναι θέμα ανταγωνισμού δύο παραγόντων, υπάρχουν δηλαδή δύο οδηγήτριες δυνάμεις. Ο πρώτος παράγοντας είναι ελάττωση της ενέργειας (θερμότητας) του συστήματος, που οδηγεί στην υγροποίηση. Ο δεύτερος παράγοντας είναι αυτός, που ονομάζουμε μεγαλύτερη πιθανότητα εναλλαγής ή μεγαλύτερη αταξία, που τείνει να εξαερώσει το υγρό, δηλαδή η τάση των μορίων να αποκτήσουν μεγαλύτερη «άνεση».

Δηλαδή, δύο είναι οι **οδηγήτριες δυνάμεις** που καθορίζουν αν θα γίνει ή όχι μια χημική αντίδραση: η λιγότερη ενέργεια και η μεγαλύτερη πιθανότητα εναλλαγής, η μεγαλύτερη αταξία.

Όπως είναι γνωστό, μέτρο της ενέργειας, του θερμικού περιεχομένου ενός χημικού συστήματος είναι η ενθαλπία, που συμβολίζεται με το Η. Ελάττωση της ενθαλπίας ($\Delta H<0$) παρατηρείται στις εξώθερμες αντιδράσεις. Ενώ το μέτρο της πιθανότητας εναλλαγής της αταξίας είναι η εντροπία (S). Όσο αυξάνει η αταξία, η άνεση, τόσο αυξάνει η εντροπία του συστήματος. Δηλαδή, η αύξηση της εντροπίας ($\Delta S>0$) ευνοεί τη χημική αντίδραση.

Τελικά το μήνυμα που πρέπει να περάσει στους μαθητές –και που πρέπει να τους μείνει– είναι ότι τα χημικά συστήματα έχουν δύο τάσεις:

- να αποκτήσουν λιγότερη ενέργεια, για να είναι πιο σταθερά,
- να αποκτήσουν μεγαλύτερη πιθανότητα εναλλαγής, μεγαλύτερη ελευθερία κινήσεων.

Οι τάσεις αυτές αποδίδονται κατά παραστατικό τρόπο στο σχήμα 2.

Συγκερασμός της ενθαλπίας και εντροπίας αποτελεί η ελεύθερη ενέργεια (G). Οι τιμές της ελεύθερης ενέργειας είναι το απόλυτο κριτήριο του αν θα γίνει ή όχι μια χημική αντίδραση.

Έτσι όταν η μεταβολή της ελεύθερης ενέργειας μεταξύ των αντιδραστηρίων και των προϊόντων είναι μηδέν, ($\Delta G=0$) το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία. Όταν είναι μικρότερη του μηδενός ($\Delta G<0$, τιμή αρνητική), η αντίδραση γίνεται αυτομάτως, χωρίς να χρειαστεί να θερμάνουμε ή να δώσουμε ενέργεια με κάποια άλλη μορφή. Ενώ όταν η τιμή είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($\Delta G>0$, θετική), τότε η αντίδραση δεν γίνεται μόνη της, αλλά χρειάζεται να δώσουμε ενέργεια. ◆

ΕΝΘΑΛΠΙΑ: Έλα σου υπόσχομαι σταθερότητα

ΗΡΑΚΛΗΣ: Σύστημα Χημικών ουσιών

ΕΝΤΡΟΠΙΑ: Έλα σου υπόσχομαι περισσότερη ελευθερία κινήσεων, μεγαλύτερη αταξία

ΤΟ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΟ (mole)

Μία Θεμελειώδης χημική Μονάδα Μέτρησης

Του **Κωνσταντίνου Α. Τσίπη,** Καθηγητή Κβαντικής Χημείας του Α.Π.Θ.

Η επιστήμη της Χημείας, παρά το γεγονός ότι αποτελεί μια κατεξοχήν πειραματική επιστήμη, εντούτοις περιλαμβάνει και ένα σημαντικό αριθμό υπολογιστικών μεθόδων, που βοηθούν, συμπληρώνουν ή ακόμη και αντικαθιστούν το πείραμα. Ακόμη και κατά την εκτέλεση μιας χημικής αντίδρασης, ο Χημικός, πέραν από την πειραματική διαδικασία που πρέπει ν' ακολουθήσει, είναι υποχρεωμένος να κάνει και ένα είδος "χημικής αριθμητικής". Με την αριθμητική, λοιπόν, αυτή μπορεί να υπολογίσει την ποσότητα του προϊόντος που θα προκύψει από συγκεκριμένη ποσότητα ενός αντιδρώντος συστατικού, ή και το αντίθετο, δηλαδή να υπολογίσει την ποσότητα ενός αντιδρώντος συστατικού που απαιτείται για να προκύψει συγκεκριμένη ποσότητα προϊόντος. Όμως, για να το κάνει αυτό είναι απαραίτητο πρώτα να λυθούν ορισμένα προβλήματα. Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι οι χημικές αντιδράσεις γίνονται μεταξύ των ατόμων και μορίων, των τόσο μικρών αυτών σωματιδίων, τα οποία δεν μπορούμε να δούμε ή να ζυγίσουμε. Έτσι, στο εργαστήριο είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε τεράστιους αριθμούς των μικρών αυτών σωματιδίων. Θα πρέπει, συνεπώς, να βρούμε κάποιον τρόπο που θα μας επιτρέπει να μεταφράζουμε εύκολα τις παρατηρήσεις μας από τη μακροσκοπική κλίμακα του εργαστηρίου στη μικροσκοπική κλίμακα των ατόμων και μορίων. Αυτό το πετυχαίνουμε με την εισαγωγή της έννοιας του γραμμομορίου(mole), που αποτελεί μια θεμελειώδη χημική μονάδα μέτρησης.

Θα ξεκινήσουμε τη συζήτησή μας με τη βοήθεια ορισμένων παραδειγμάτων. Έστω ότι θέλουμε να παρασκευάσουμε ορισμένα μόρια μονοξειδίου του άνθρακα, CO. Καταρχήν μπορούμε να πάρουμε ένα άτομο άνθρακα και ένα άτομο οξυγόνου για να συνθέσουμε ένα μόριο CO. Αν όμως παίρναμε δύο άτομα άνθρακα και δύο άτομα οξυγόνου θα συνθέταμε δύο μόρια CO. Η διεργασία αυτή θα μπορούσε, φυσικά, να συνεχιστεί και να μας δώσει οποιονδήποτε αριθμό μορίων CO επιθυμούμε. Η μόνη απαίτηση είναι ότι πρέπει πάντοτε να είμαστε βέβαιοι, ότι πήραμε ίσο αριθμό ατόμων άνθρακα και οξυγόνου. Όμως είναι αδύνατο πρακτικά να μετρήσουμε τα άτομα, οπότε δημιουργείται το ερώτημα, *πώς θα βεβαιωθούμε ότι πήραμε ίσο αριθμό ατόμων άνθρακα και οξυγόνου*; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό προκύπτει από τη χρησιμοποίηση της έννοιας της ατομικής μάζας. Θυμηθείτε, ότι η **ατομική μάζα** είναι σχετική μάζα· *είναι η μάζα ενός ατόμου του στοιχείου ως προς τη μάζα ενός ατόμου άνθρακα-12 που είναι ακριβώς ίση με 12 ατομικές μονάδες μάζας(amu).* Η ατομική λοιπόν μάζα του άνθρακα είναι 12 amu, ενώ του οξυγόνου είναι 16 amu. Όταν πάρουμε ένα άτομο από κάθε στοιχείο, ο λόγος των ατόμων θα είναι,

$$\text{λόγος ατόμων} = 1 : 1$$

και ο λόγος των μαζών θα είναι,

$$\text{λόγος μαζών} = 12 : 16$$

Αν πάρουμε δύο άτομα από κάθε στοιχείο, ο λόγος των ατόμων θα είναι και πάλι,

$$\text{λόγος ατόμων} = 2 : 2 = 1 : 1$$

και ο λόγος των μαζών θα είναι ο ίδιος, δηλαδή:

$$\text{λόγος μαζών} = 2 \quad 12 : 2 \quad 16 = 12 : 16$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι εφόσον ο λόγος των ατόμων διατηρείται 1:1, ο λόγος των μαζών θα διατηρείται πάντα ο ίδιος, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι 12:16. Μπορούμε ν' αντιστρέψουμε την πρόταση αυτή και να πούμε, ότι εφόσον ο λόγος των μαζών 12:16 διατηρείται σταθερός και ο λόγος των ατόμων θα παραμένει ο ίδιος, δηλαδή 1:1. Γίνεται φανερό, ότι οποιονδήποτε λόγο ατόμων επιθυμούμε μπορούμε να τον πάρουμε με την κατάλληλη εκλογή του λόγου των μαζών. Γνωρίζουμε όμως, ότι η μάζα εκφράζεται σε g. Αν, λοιπόν, ζυγίσουμε 12 g άνθρακα και 16 g οξυγόνου, η αναλογία των μαζών αυτών 12:16 μας βεβαιώνει ότι ο λόγος των ατόμων του άνθρακα και του οξυγόνου θα είναι 1:1. Αυτό σημαίνει, ότι ανεξάρτητα από τον πραγματικό αριθμό των ατόμων του άνθρακα και του οξυγόνου, είμαστε βέβαιοι ότι έχουμε ίσους αριθμούς ατόμων άνθρακα και οξυγόνου. Άρα, τα 12 g του άνθρακα περιέχουν τον ίδιο αριθμό ατόμων που υπάρχουν και στα 16 g του οξυγόνου.

Κατά τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι, μπορούμε εύκολα να πούμε ότι ο αριθμός των ατόμων που υπάρχουν στα 12 g του άνθρακα είναι ίδιος μ' αυτόν που υπάρχουν στα 23 g νατρίου (ατομική μάζα Na = 23), ή στα 48 g τιτανίου (ατομική μάζα Ti = 48), ή στα 200,6 g υδραργύρου (ατομική μάζα Hg = 200,6), κ.ο.κ. Άνετα λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: *ποσότητες των στοιχείων εκφρασμένες σε g, ίσες αριθμητικά με*

τις ατομικές τους μάζες, περιέχουν τον ίδιο αριθμό ατόμων.

Γραμμομοριακές ποσότητες ορισμένων ουσιών. Ξεκινώντας από πάνω αριστερά και προχωρώντας δεξιόστροφα έχουμε: 180 g ασπιρίνης, 342 g ζάχαρης, 18.0 g νερού, 201 g υδραργύρου, 55.9 g σιδήρου, 58.5 g χλωριούχου νατρίου και 254 g ιωδίου. Οι παραπάνω ποσότητες αντιστοιχούν σε 1 mol κάθε ουσίας.

Ανάλογα ισχύουν και για τις ενώσεις που δομούνται από μόρια. Έστω, λοιπόν, το μόριο του μεθανίου CH_4, (μοριακή μάζα = 16) και το μόριο του οξυγόνου O_2 (μοριακή μάζα = 32). Θυμηθείτε και πάλι ότι οι μοριακές μάζες είναι σχετικές μάζες. Αν λοιπόν πάρουμε 16 g CH_4 θα υπάρχουν σ' αυτά τόσα μόρια, όσα θα υπάρχουν και στα 32 g του οξυγόνου. Επίσης ο αριθμός των μορίων που υπάρχουν στα 32 g του οξυγόνου θα είναι ίσος με τον αριθμό των ατόμων που υπάρχουν στα 16 g του οξυγόνου ή στα 12 g του άνθρακα, κ.λπ. Άνετα και πάλι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: *ποσότητες των ενώσεων εκφρασμένες σε g, ίσες αριθμητικά με τις μοριακές τους μάζες, περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων.*

Τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα μπορούν να συνδυαστούν σε ένα γενικό συμπέρασμα, αρκεί να εισάγουμε τις έννοιες των **ατομικών** και **μοριακών ουσιών** και την έννοια της **τυπικής μάζας**.

Ατομικές ουσίες είναι οι ουσίες εκείνες των οποίων τα σωματίδια που τις συνιστούν είναι τα άτομα, ενώ μοριακές ουσίες είναι εκείνες των οποίων τα σωματίδια που τις συνιστούν είναι τα μόρια. Τα σωματίδια που συνιστούν τις ατομικές και μοριακές ουσίες (άτομα, μόρια, ομάδες ατόμων, ιόντα κι άλλα σωματίδια) θα τα αναφέρουμε στο εξής με το γενικό όνομα τυπικές μονάδες. Οι τυπικές μονάδες είναι το σύνολο των ατόμων ή ιόντων που περιέχονται στο χημικό τύπο της ουσίας. Είναι φανερό ότι η σχετική μάζα μιας τυπικής μονάδας θ' αποτελεί την καλούμενη **τυπική μάζα**. Η τυπική μάζα αποτελεί έναν γενικότερο όρο που παίρνει τη θέση τόσο της ατομικής, όσο και της μοριακής μάζας. Με βάση λοιπόν τις νέες αυτές έννοιες, το γενικό μας συμπέρασμα είναι ότι: *ποσότητες των ουσιών εκφρασμένες σε g ίσες με την τυπική τους μάζα περιέχουν τον ίδιο αριθμό τυπικών μονάδων.* Έτσι, π.χ. 12 g του άνθρακα, 16 g του μεθανίου, 48 g του τιτανίου και 32 g του οξυγόνου περιέχουν τον ίδιο αριθμό τυπικών μονάδων, που είναι άτομα για τον άνθρακα και το τιτάνιο και μόρια για το μεθάνιο και το οξυγόνο.

Η ποσότητα μιας ουσίας εκφρασμένη σε g που είναι ίση αριθμητικά με την τυπική της μάζα ονομάζεται γραμμομόριο της ουσίας και συμβολίζεται γενικά ως **mol**. Η μάζα ενός γραμμομορίου μιας ουσίας είναι αριθμητικά ίση με την τυπική της μάζα, έχει όμως τις μονάδες $g \cdot mol^{-1}$. Η μάζα του γραμμομορίου ονομάζεται γραμμομοριακή μάζα. Έτσι, π.χ. ο άνθρακας έχει τυπική μάζα 12 και γραμμομοριακή μάζα 12 $g \cdot mol^{-1}$, το μεθάνιο έχει τυπική μάζα 16 και γραμμομοριακή μάζα 16 $g \cdot mol^{-1}$. Επίσης, τόσο τα 12 g του άνθρακα, όσο και τα 16 g του μεθανίου αποτελούν 1 mol της αντίστοιχης ουσίας.

Με βάση τα παραπάνω, εύκολα μπορεί να υπολογίσει κανείς τον αριθμό των mol, n, που υπάρχει σε ορισμένη ποσότητα, m (σε g), μιας ουσίας και αντίστροφα. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να γνωρίζουμε το χημικό τύπο της ουσίας, αφού το mol οποιασδήποτε ουσίας ορίζεται μόνο με βάση το χημικό της τύπο. Έτσι θα έχουμε:

$$n = \frac{m(\text{σε g})}{\text{Τ.Μ.}(\text{σε g})}$$

και

$$m = n \quad \text{Τ.Μ.}$$

όπου Τ.Μ. είναι η τυπική μάζα της ουσίας εκφρασμένη σε g. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί ο αριθμός των mol που υπάρχει σε α) 25,5 g αμμωνίας, NH_3, β) 60 mg βιταμίνης C, $C_6H_8O_6$ και γ) 200 mg διαμαντιού (C) που είναι ένα καράτι.

Λύση:

α) Η τυπική μάζα της αμμωνίας, NH_3, είναι

$$\text{Τ.Μ.} = 14,007 + 3(1,008) = 17,031.$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$n = \frac{m}{\text{Τ.Μ.}} = \frac{25,5\ g}{17,031\ g \cdot mol^{-1}} = 1,5\ mol$$

β) Για τη βιταμίνη C, $C_6H_8O_6$, θα έχουμε,

$$\text{Τ.Μ.} = 6(12,01) + 8(1,008) + 6(15,999) =$$

$= 72{,}06 + 8{,}064 + 95{,}994 = 176{,}12$

Συνεπώς,

$$n = \frac{m}{T.M.} = \frac{60 \quad 10^{-3}\ g}{176{,}12\ g \cdot mol^{-1}} = 0{,}34 \quad 10^{-3}\ mol$$

γ) Για το διαμάντι που αποτελείται από άτομα C, η τυπική μάζα είναι: Τ.Μ. = 12,01 και επομένως θα έχουμε:

$$n = \frac{m}{T.M.} = \frac{200 \quad 10^{-3}\ g}{12{,}01\ g \cdot mol^{-1}} = 16{,}65 \quad 10^{-3}\ mol$$

Σημειώστε ότι στο β) και γ) τα mg πρέπει να μετατραπούν σε g.

Παράδειγμα 2

Ποια θα είναι η μάζα (σε g): α) 2,16 mol NaCl, β) 0,0375 mol N_2 και γ) 2,57 mol Ni.

Λύση:

α) Η τυπική μάζα του NaCl είναι

$$T.M. = 22{,}99 + 35{,}453 = 58{,}443.$$

Άρα θα έχουμε,

$$m = n \quad T.M. = (2{,}16\ mol) \quad (58{,}443\ g \cdot mol^{-1}) = 126{,}24\ g$$

β) Η τυπική μάζα του αζώτου, N_2, είναι Τ.Μ.= 2(14,007) = 28,014, οπότε θα έχουμε,

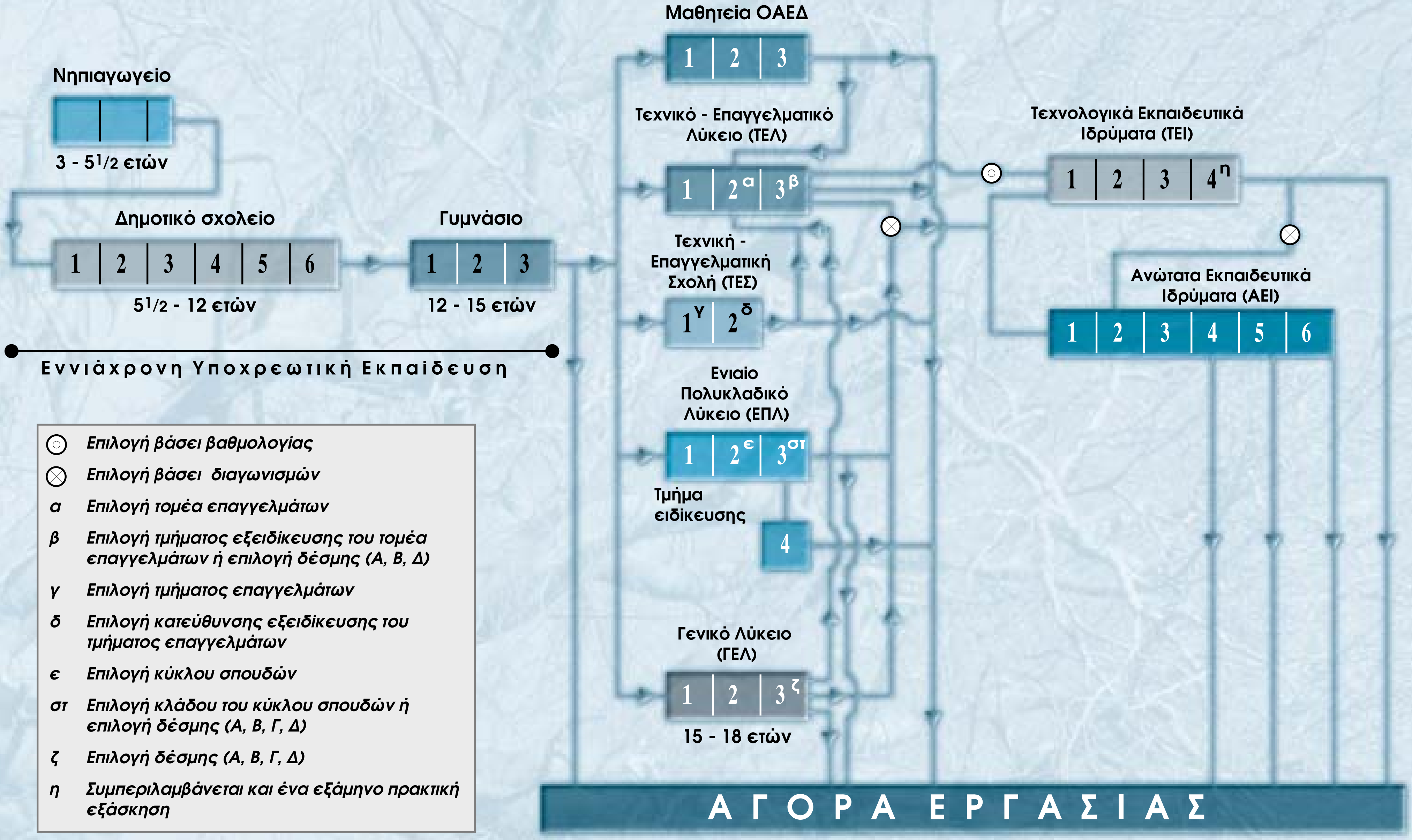
$$m = n \quad T.M. = (0{,}375\ mol) \quad (28{,}014\ g \cdot mol^{-1}) = 10{,}505\ g$$

γ) Η τυπική μάζα του νικελίου, Ni, είναι Τ.Μ. = 58,71, οπότε θα έχουμε,

$$m = n \quad T.M. = (2{,}57\ mol) \quad (58{,}71\ g \cdot mol^{-1}) = 150{,}88\ g.$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να δώσουμε και τον πιο επίσημο ορισμό του mol, που είναι αυτός του συστήματος SI. Σύμφωνα με τον ορισμό SI *το mol είναι η ποσότητα της ουσίας ενός συστήματος που περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες, όσος είναι ο αριθμός των ατόμων που υπάρχουν σε ακριβώς 0,012 kg του άνθρακα -12.* Όταν ορίζουμε το mol θα πρέπει να καθορίζουμε και τις στοιχειώδεις οντότητες που μπορεί να είναι, άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια, άλλα σωματίδια ή καθορισμένες ομάδες τέτοιων σωματιδίων. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το mol είναι μια γενική έννοια και δεν περιορίζεται μόνο στις ατομικές και μοριακές ενώσεις. Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να έχουμε mol ηλεκτρονίων, mol ιόντων ή mol οποιονδήποτε άλλων σωματιδίων. Με το γενικό αυτό όρο αποφεύγουμε τη χρησιμοποίηση επιμέρους όρων που χρησιμοποιούνται σε παλαιότερα βιβλία, όπως είναι ο όρος γραμμοάτομο που χρησιμοποιείται για ατομικές ουσίες, ο όρος γραμμοϊόν που χρησιμοποιείται για ουσίες με τυπικές μονάδες τα ιόντα, κ.ά. ◆

Δομή και διάρθρωση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος



- ◎ Επιλογή βάσει βαθμολογίας
- ⊗ Επιλογή βάσει διαγωνισμών
- α Επιλογή τομέα επαγγελμάτων
- β Επιλογή τμήματος εξειδίκευσης του τομέα επαγγελμάτων ή επιλογή δέσμης (Α, Β, Δ)
- γ Επιλογή τμήματος επαγγελμάτων
- δ Επιλογή κατεύθυνσης εξειδίκευσης του τμήματος επαγγελμάτων
- ε Επιλογή κύκλου σπουδών
- στ Επιλογή κλάδου του κύκλου σπουδών ή επιλογή δέσμης (Α, Β, Γ, Δ)
- ζ Επιλογή δέσμης (Α, Β, Γ, Δ)
- η Συμπεριλαμβάνεται και ένα εξάμηνο πρακτική εξάσκηση

Πηγή: Σ. Σταύρου, Η επαγγελματική εκπαίδευση στην Ελλάδα, CEDEFOP, 1994

Στα επόμενα τεύχη θα δημοσιευθούν δομές και διαρθρώσεις εκπαιδευτικών συστημάτων άλλων χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΦΥΣΙΚΑ & ΧΗΜΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

Της **Αικ. Γιούρη-Τσοχατζή,** Επ. Καθηγήτριας στο Τμήμα Χημείας του Α.Π.Θ.

Ο κόσμος που μας περιβάλλει αποτελείται από μεγάλη ποικιλία υλικών σωμάτων που μπορούμε να τα διακρίνουμε μεταξύ τους από το διαφορετικό τρόπο που τα αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας, εξαιτίας των ιδιαίτερων (ξεχωριστών) χαρακτηριστικών τους γνωρισμάτων π.χ. χρώμα, μέγεθος, σχήμα, υφή κ.λπ.

Ενώ λοιπόν τα υλικά σώματα διαφέρουν μεταξύ τους, όλα έχουν δύο κοινά χαρακτηριστικά που είναι τα εξής:

1) Καταλαμβάνουν ορισμένο χώρο, έχουν δηλαδή **όγκο** και
2) έχουν την ιδιότητα να αντιστέκονται στα αίτια που τείνουν να μεταβάλλουν την κινητική τους κατάσταση, έχουν δηλαδή **αδράνεια**. Το μέτρο της αδράνειας των σωμάτων ονομάζεται **μάζα**.

Ο,τιδήποτε μας περιβάλλει, παίρνει μέρος στο σχηματισμό της Γης και του Σύμπαντος και χαρακτηρίζεται από όγκο και μάζα, ονομάζεται **ύλη**.

Όλες οι παρατηρήσεις οδηγούν στο γενικό συμπέρασμα ότι τα υλικά σώματα μεταβάλλονται συνεχώς, άλλα σιγά και άλλα γρήγορα, υπακούοντας στον απαράβατο νόμο της φύσης που είναι ο νόμος της συνεχούς (αέναης) αλλαγής των πάντων. Το νόμο αυτό διατύπωσε πρώτος ο Ηράκλειτος λέγοντας *«Πάντα γίγνεσθαί τε καί ρεῖν, εἶναι δέ παγίως οὐδέν»*, η ακινησία δηλαδή που παρατηρούμε είναι φαινομενική.

Όπως η μάζα είναι μέτρο της αδράνειας, έτσι και η συνεχής μεταβολή (κίνηση) που είναι ιδιότητα της ύλης, έχει ως μέτρο την **ενέργεια**.

Οι μεταβολές της ύλης ονομάζονται **φαινόμενα** και η αιτία που προκαλεί τα φαινόμενα είναι η μεταβολή της ενέργειας.

Συμπερασματικά:

Ύλη είναι το μέσο που μπορεί να μεταβληθεί, δηλαδή το μέσο πάνω στο οποίο λαμβάνει χώρα (γίνεται) ένα φαινόμενο.

Ενέργεια είναι η αιτία ενός φαινομένου ή το αποτέλεσμα αυτού.

Τα φαινόμενα κατατάσσονται σε φυσικά, χημικά και πυρηνικά φαινόμενα. Τα πυρηνικά φαινόμενα εξετάζονται σε ιδιαίτερο κεφάλαιο.

Φυσικά φαινόμενα ονομάζονται τα φαινόμενα όπου τα υλικά σώματα εμφανίζουν παροδικές μεταβολές επειδή δε μεταβάλλεται η σύσταση της ύλης τους. Αλλιώς, θεωρούνται οι ενεργειακές μεταβολές των σωμάτων κατά τη διάρκεια των οποίων δε μεταβάλλεται η σύσταση της ύλης τους.

Φυσικά φαινόμενα είναι ο βρασμός του νερού, το λιώσιμο του πάγου, η διάλυση αλάτων σε νερό κ.λπ.

Χημικά φαινόμενα ονομάζονται τα φαινόμενα όπου τα υλικά σώματα εμφανίζουν ριζικές και μόνιμες μεταβολές επειδή μεταβάλλεται η σύσταση της ύλης τους. Αλλιώς, θεωρούνται οι ενεργειακές μεταβολές των σωμάτων κατά τη διάρκεια των οποίων μεταβάλλεται η σύστασή τους, με αποτέλεσμα τη δημιουργία σωμάτων, με ιδιότητες διαφορετικές των αρχικών.

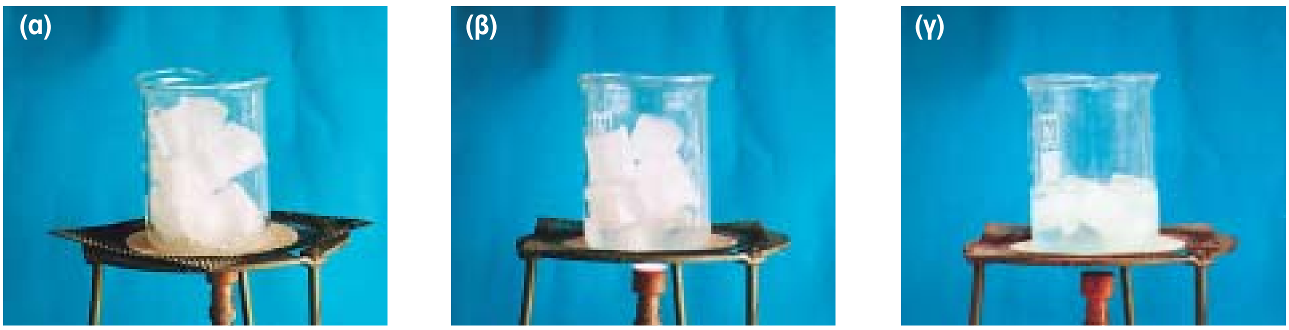
Χημικά φαινόμενα είναι το σκούριασμα του σιδήρου, η καύση του ξύλου, του σιδήρου κ.λπ.

Παρακάτω δίνεται μια σειρά πειραμάτων για την καλύτερη κατανόηση των φυσικών και χημικών φαινομένων.

1. ΤΗΞΗ (λιώσιμο) ΤΟΥ ΠΑΓΟΥ (φυσικό φαινόμενο)

Αν θερμάνουμε ένα ποτήρι που περιέχει πάγο (στερεό), ο πάγος αρχίζει να τήκεται (λιώνει) και να μετατρέπεται σε νερό (υγρό). Αν συνεχίσουμε τη θέρμανση το νερό αρχίζει να βράζει και θα παρατηρήσουμε την εξαέρωσή του και το σχηματισμό υδρατμών. Όταν οι υδρατμοί έρθουν σ' επαφή με τα κρύα τοιχώματα του ποτηριού υγροποιούνται ξανά και θολώνουν τα τοιχώματά του.

Αν ψύξουμε το περιεχόμενο του ποτηριού ξανασχηματίζεται ο πάγος. Στο παρακάτω πείραμα φαίνεται η μετατροπή του πάγου σε νερό.



Εικόνα 1. Τήξη του πάγου.
***α)** Τοποθετούμε κομμάτια πάγου σ' ένα ποτήρι.* ***β)** Θερμαίνουμε.* ***γ)** Ο πάγος αρχίζει να λιώνει και μετατρέπεται σε νερό.*

2. ΔΙΑΛΥΣΗ ΑΛΑΤΩΝ ΣΕ ΝΕΡΟ (φυσικό φαινόμενο)

Το νερό είναι ο πιο συνηθισμένος διαλύτης στη φύση και στο εργαστήριο. Διαλύει εύκολα πολλές χημικές ουσίες και είναι ο καλύτερος διαλύτης των περισσοτέρων αλάτων (όχι όλων). Έτσι μπορούμε να διαλύσουμε εύκολα σ' ένα ποτήρι ή σ' ένα δοκιμαστικό σωλήνα μαγειρικό αλάτι, NaCl (χλωριούχο νάτριο) και μετά την εξάτμιση του νερού ή την απόσταξή του, να πάρουμε πάλι το μαγειρικό αλάτι (NaCl). Η διάλυση λοιπόν των αλάτων είναι ένα φυσικό φαινόμενο.

Για να δείξουμε με πιο εντυπωσιακό τρόπο τη διάλυση αλάτων σε νερό, διαλύουμε υπερμαγγανικό κάλιο, $KMnO_4$ που είναι κρυσταλλικό άλας με ιώδες χρώμα, διατίθεται και από τα φαρμακεία ως αντισηπτικό, γνωστό ως permanganate.

(α)

(β)

(γ)

Εικόνα 2. Διάλυση του υπερμαγγανικού καλίου σε νερό

α) *Ρίχνουμε μερικούς ιώδεις κρυστάλλους υπερμαγγανικού καλίου, $KMnO_4$ σ' ένα ποτήρι γεμάτο με νερό.*

β) *Οι κρύσταλλοι του υπερμαγγανικού καλίου φθάνουν στον πυθμένα και αρχίζουν να διαλύονται.*

γ) *Μετά την πλήρη διάλυση του έγχρωμου άλατος όλη η μάζα του νερού χρωματίζεται.*

3. ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΜΕΙΓΜΑΤΟΣ ΣΙΔΗΡΟΥ-ΘΕΙΟΥ (φυσικό φαινόμενο)

Ο διαχωρισμός μείγματος σιδήρου-θείου με μαγνήτιση, είναι ένα φυσικό φαινόμενο, όπως φαίνεται στο παρακάτω πείραμα που δίνεται με εικόνες.

(α)

(β)

(γ)

(δ)

(ε)

Εικόνα 3. Διαχωρισμός σιδήρου - θείου με μαγνήτιση.

α) *Η σκόνη του σιδήρου έχει μαύρο χρώμα, ενώ του θείου κίτρινο χρώμα.* ***β)*** *Σε μία ύαλο ωρολογίου βάζουμε ίσες ποσότητες σιδήρου και θείου.* ***γ)*** *Αναμειγνύουμε τις σκόνες σιδήρου-θείου.* ***δ)*** *Μετά την ανάμειξη προκύπτει ένα κιτρινόμαυρο μείγμα.* ***ε)*** *Μ' ένα μαγνήτη διαχωρίζουμε το μείγμα σιδήρου-θείου. Στο μαγνήτη «κολλάει» ο μαύρος σίδηρος. Αν πάνω από ένα άσπρο χαρτί, χτυπήσουμε ελαφρά το μαγνήτη, θα πέσει το κίτρινο θείο που συμπαρασύρθηκε με το σίδηρο.*

4. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΔΙΧΡΩΜΙΚΟΥ ΑΜΜΩΝΙΟΥ (χημικό φαινόμενο)

Το διχρωμικό αμμώνιο $(NH_4)_2Cr_2O_7$ είναι μία μικροκρυσταλλική ουσία, πορτοκαλί χρώματος (Εικόνα 4α), που όταν αναφλεγεί χρησιμοποιώντας αλκοόλη ή ακετόνη (Εικόνα 4β) διασπάται με χαρακτηριστικό τρόπο, σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

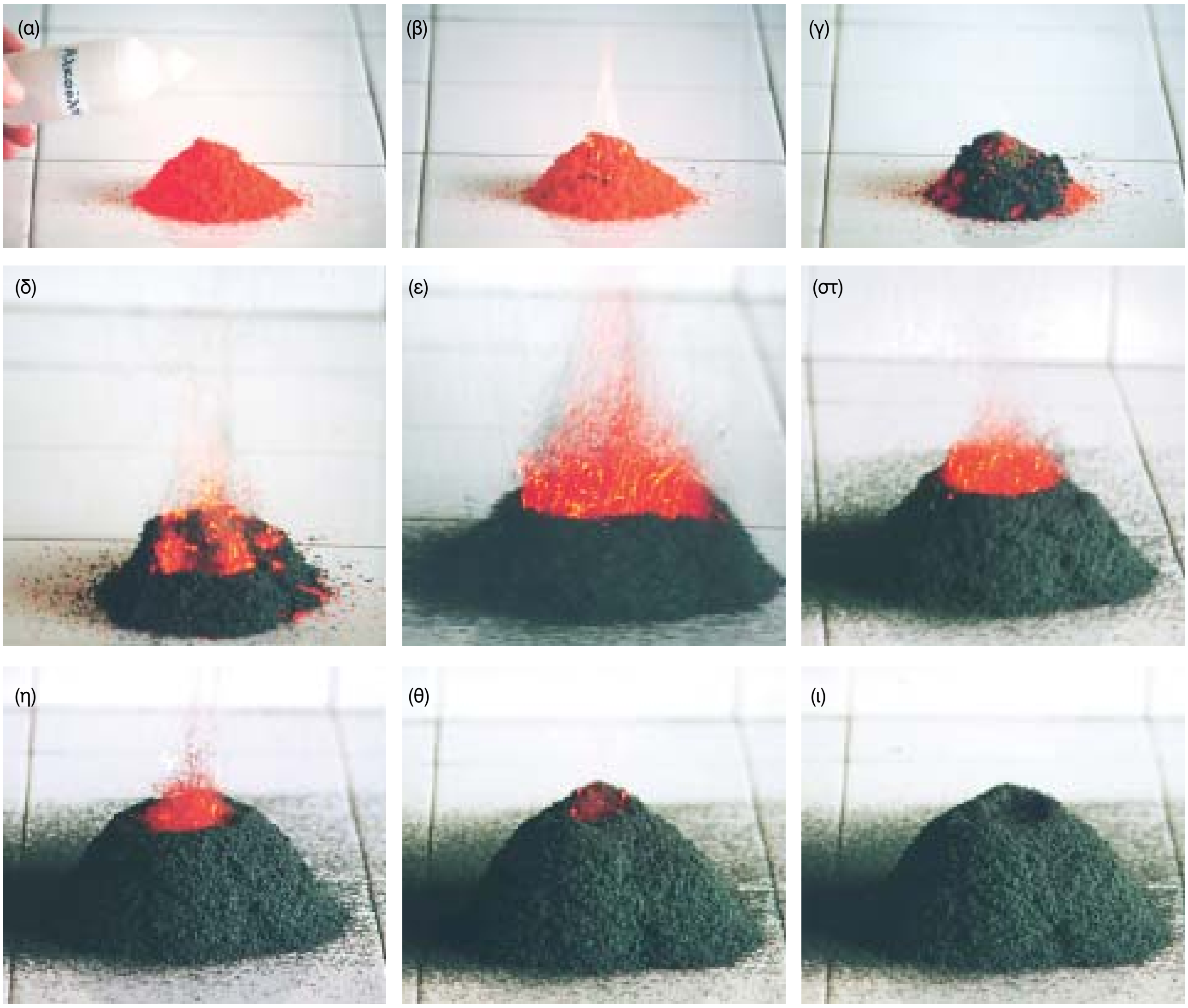
$$(NH_4)_2Cr_2O_7 \qquad Cr_2O_3 + N_2 + 4H_2O \qquad (4.1)$$

Η διάσπαση του διχρωμικού αμμωνίου, $(NH_4)_2Cr_2O_7$ γίνεται με πολύ εντυπωσιακό τρόπο που θυμίζει σε μικρογραφία «ηφαίστειο εν ενεργεία». Το «χημικό ηφαίστειο» χρησιμοποιείται στα κινηματογραφικά εφφέ όταν θέλουν να δείξουν έκρηξεις ηφαιστείων.

Όταν με τη θέρμανση το διχρωμικό αμμώνιο, $(NH_4)_2Cr_2O_7$, διασπάται, αρχίζουν να εκτινάσσονται φλόγες και πυρωμένη σκόνη οξειδίου του χρωμίου. Το οξείδιο του χρωμίου, Cr_2O_3, έχει σκούρο πράσινο χρώμα (αντίδραση 4.1).

Το πράσινο οξείδιο του χρωμίου που σχηματίζεται (Εικόνες 4θ-ι) έχει πολύ μεγαλύτερο όγκο απ' αυτόν που είχε αρχικά το πορτοκαλί διχρωμικό αμμώνιο, επειδή μέσα στη μάζα του εγκλωβίζονται τα αέρια προϊόντα άζωτο, N_2 και υδρατμοί, H_2O, που παράγονται κατά την αντίδραση 4.1.

Το πείραμα φαίνεται ωραία στις εικόνες που ακολουθούν.



Εικόνα 4. Διάσπαση του διχρωμικού αμμωνίου με θέρμανση.
__α)__ Πάνω σ' ένα πλακάκι βάζουμε 25-50 g διχρωμικού αμμωνίου, $(NH_4)_2Cr_2O_7$, ουσία πορτοκαλί χρώματος, έτσι ώστε να σχηματισθεί ένας μικρός κώνος και ρίχνουμε στο κέντρο του κώνου 1-2 ml αλκοόλης. __β)__ Αναφλέγουμε την αλκοόλη. __γ)__ Το διχρωμικό αμμώνιο αρχίζει να διασπάται σχηματίζοντας πράσινο οξείδιο του χρωμίου, Cr_2O_3. __δ-η)__ Από το κέντρο του κώνου αρχίζει να εκτινάσσεται πυρωμένη σκόνη οξειδίου του χρωμίου και φλόγες. Το πείραμα θυμίζει «ηφαίστειο εν ενεργεία». __θ-ι)__ Το πράσινο οξείδιο του χρωμίου που σχηματίζεται έχει πολύ μεγαλύτερο όγκο απ' ότι είχε αρχικά το διχρωμικό αμμώνιο. Η αύξηση του όγκου οφείλεται στον εγκλωβισμό των αέριων προϊόντων, αζώτου N_2 και υδρατμών, H_2O, που παράγονται.

5. ΚΑΥΣΗ ΤΑΙΝΙΑΣ ΜΑΓΝΗΣΙΟΥ (χημικό φαινόμενο)

Το μαγνήσιο καίγεται σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

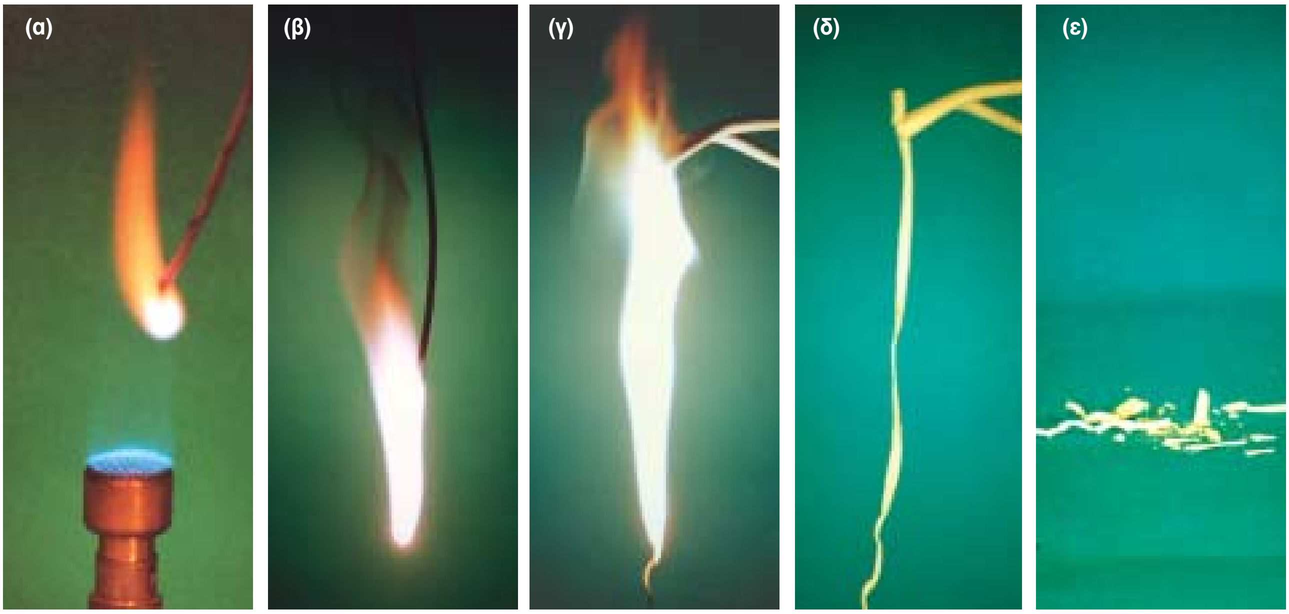
$$2Mg + O_2 \quad 2MgO \qquad (5.1)$$

και παράγει ένα εκτυφλωτικό άσπρο φως. Η καύση ταινιών ή σκόνης μαγνησίου ήταν ο πρόδρομος των φωτογραφικών flash.

Με μια μεταλλική λαβίδα κρατούμε ένα κομμάτι ταινίας μαγνησίου 10-20 cm περίπου και την πλησιάζουμε σε φλόγα λύχνου (Εικόνα 5α). Η ταινία αρχίζει να καίγεται χαρακτηριστικά (Εικόνες 5β-γ).

Μετά την καύση σχηματίζεται το άσπρο οξείδιο του μαγνησίου, MgO (Εικόνα 5δ) το οποίο αμέσως θρυμματίζεται (Εικόνα 5ε). Το οξείδιο του μαγνησίου είναι η γνωστή «μαγνησία» που χρησιμοποιούνταν παλιά ως αντιόξινο φάρμακο για το στομάχι και πωλείται στα φαρμακεία.

Το πείραμα καύσης της ταινίας μαγνησίου δίνεται στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 5. Καύση ταινίας μαγνησίου.
α) *Πλησιάζουμε σε φλόγα λύχνου ταινία μαγνησίου μήκους 10-20 cm.* ***β-γ)*** *Η ταινία μαγνησίου αρχίζει να καίγεται μ' ένα άσπρο εκτυφλωτικό φως.* ***δ)*** *Μετά την καύση της ταινίας απομένει το άσπρο οξείδιο του μαγνησίου, MgO.* ***ε)*** *Το οξείδιο του μαγνησίου, MgO, αμέσως θρυμματίζεται.*

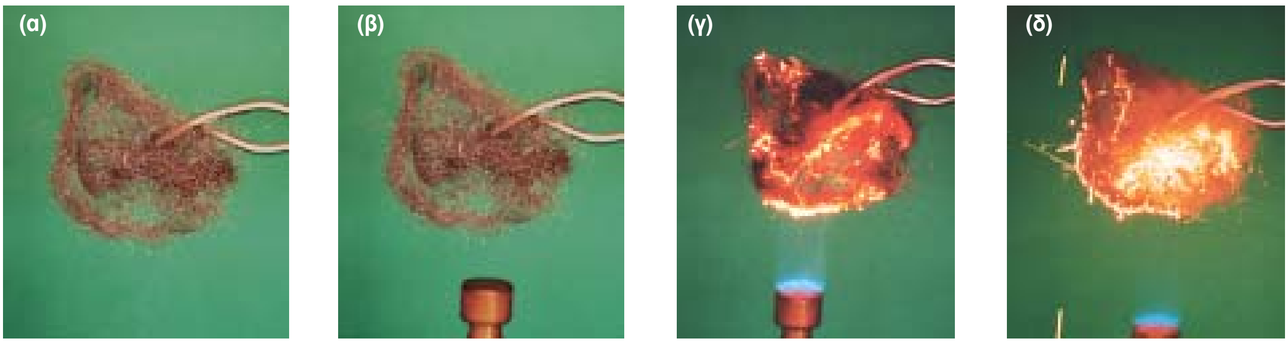
6. ΚΑΥΣΗ ΣΙΔΗΡΟΥ (χημικό φαινόμενο)

Όταν πλησιάσουμε σε φλόγα λύχνου ένα μπαλάκι από συρμάτινο σφουγγαράκι κουζίνας, παρατηρούμε ότι καίγεται έντονα ενώ εκτινάσσονται σπίθες από πυρωμένο οξείδιο του σιδήρου.

Η καύση του σιδήρου γίνεται σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

$$3Fe + 2O_2 \quad Fe_3O_4 \qquad (6.1)$$

Η καύση σιδήρου φαίνεται με εικόνες στο παρακάτω πείραμα.



Εικόνα 6. Καύση σιδήρου.
α) *Με μια μεταλλική λαβίδα πιάνουμε ένα κομμάτι από συρμάτινο σφουγγαράκι κουζίνας.* ***β)*** *Το πλησιάζουμε σε φλόγα λύχνου.* ***γ-δ)*** *Ο σίδηρος καίγεται έντονα ενώ εκτινάσσονται σπίθες από πυρωμένο οξείδιο του σιδήρου.*

ΘΕΜΑ ΕΚΘΕΣΗΣ

Παρόλο που το βιβλίο είναι παράθυρο ανοιχτό προς τον κόσμο της γνώσης και της καλλιέργειας, δε βρίσκει την ανάλογη ανταπόκριση από το κοινό.

Του **Δ. Φαρμάκη,** Φιλόλογου

α) Ποιες είναι, κατά τη γνώμη σας, οι αιτίες αυτού του φαινομένου;

β) Ποιους τρόπους θα προτείνατε, ώστε να αυξηθεί το ενδιαφέρον για το βιβλίο;

Γενική εκτίμηση:

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

Ο προσφερόμενος εκθεσιότιτλος εντάσσεται στην κατηγορία των θεμάτων αναλυτικής διατύπωσης με σκέλος δεδομένων και ευδιάκριτη ερωτηματοθεσία.

Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ

Το προτεινόμενο θέμα συνδέεται με το σύγχρονο προβληματισμό και ανταποκρίνεται στις εμπειρίες, στις γνώσεις και στα ενδιαφέροντα του υποψηφίου. Ειδικότερα, η προβληματική του κρίνεται επικαιρική, γιατί η τεχνολογική υπερανάπτυξη και η εκπληκτική πρόοδος που συντελείται επαναπροσδιορίζει το ρόλο και τη θέση του βιβλίου· θέση ιδιαίτερα παραγκωνισμένη, όπως πιστοποιεί το θέμα.

Διευκρινιστική σημείωση:

Κρίνουμε απαραίτητο να διευκρινίσουμε ότι το πλαίσιο διερεύνησης που υποδεικνύουμε και η ανάλυση που επιχειρείται δεν είναι μονόδρομος. Κάθε άλλη ανάπτυξη είναι αποδεκτή, αρκεί να είναι γνήσια και τεκμηριωμένη.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

Προλογική παράγραφος

Το τέλος του εικοστού αιώνα σηματοδοτείται από την είσοδο της τεχνολογίας στο χώρο της τυπογραφίας, εξέλιξη που δημιούργησε τις προϋποθέσεις για τη μαζική παραγωγή βιβλίων, με αποτέλεσμα το βιβλίο να καταστεί προσιτό σε μεγάλα στρώματα του πληθυσμού. Όμως παρά την ποσοτική και ποιοτική αύξηση των βιβλίων, παρατηρείται πτώση της αναγνωστικότητας του καλού βιβλίου και κρίση βιβλιοφιλίας.

ΑΙΤΙΕΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

1) Η κυριαρχία εξελιγμένων μέσων πληροφόρησης διαφοροποιεί τον τρόπο πρόσβασης στη γνώση (τεχνολογική επανάσταση, ηλεκτρονικοί υπολογιστές).
2) Η επικράτηση της τηλεόρασης αποθέωσε την εικόνα ως μέσο επικοινωνίας. (Η ροή των πληροφοριών διοχετεύεται μέσα από την κινούμενη εικόνα που υπερτερεί σε αμεσότητα και παραστατικότητα).
3) Η άκρατη εξειδίκευση ευνοεί συσσώρευση γνώσεων ειδικών, ενώ αποθαρρύνει το γνήσιο προβληματισμό, με αποτέλεσμα να οδηγείται ο άνθρωπος του καιρού μας στην πνευματική μονομέρεια και στη διαμόρφωση μονοδιάστατης προσωπικότητας, ανίκανης να διαλεχθεί με τον κόσμο του καλού βιβλίου.
4) Η εξουθενωτική υπερεργασία σε συνδυασμό με την έλλειψη του ελεύθερου χρόνου απομακρύνει από τη γόνιμη επαφή με το βιβλίο.
5) Το σύγχρονο σχολείο δεν ενθαρρύνει την ενασχόληση με το βιβλίο, αφού προκρίνει τη στείρα απομνημόνευση γνώσεων, επιβάλλει ένα μόνο σχολικό εγχειρίδιο, προσφέρει γνώσεις ανεπίκαιρες, με αποτέλεσμα να καλλιεργεί σχέση εχθρότητας με το βιβλίο.
6) Η πρωτοφανής πνευματική καθίζηση και η ελλιπής γλωσσική κατάρτιση στερούν τη δυνατότητα πρόσβασης στο ποιοτικό βιβλίο.
7) Στη σύγχρονη «κοινωνία της αφθονίας» όπου κυριαρχεί η υλοφροσύνη και η καταναλωτική αντίληψη και το χρήμα αναγορεύεται σε υπέρτατη αξία, ο άνθρωπος αιχμαλωτίζεται σε αντιπνευματικές επιλογές που τον απομακρύνουν από την ατμόσφαιρα του βιβλίου.

Μεταβατική παράγραφος:

Η απομάκρυνση από το βιβλίο σημαίνει παραίτηση από το στοχασμό και τον κριτικό λόγο. Αποδυναμώνεται η γλώσσα και μαζί της υποβαθμίζεται και η σκέψη. Χρέος, λοιπόν, της σύγχρονης κοινωνίας είναι να αναλάβει συγκεκριμένες πρωτοβουλίες, να θέσει τους όρους και τα όρια, να λάβει θεσμικά μέτρα για την προστασία του βιβλίου.

ΤΡΟΠΟΙ ΓΙΑ ΝΑ ΑΥΞΗΘΕΙ ΤΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ ΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ

Οικογένεια: Επωμίζεται την ευθύνη να εμφυσήσει τη βιβλιοφιλία στο νέο άνθρωπο. Το παραμύθι και η αφήγηση στο χώρο της οικογένειας ανοίγουν στο παιδί νέους κόσμους και προετοιμάζουν τους νέους αναγνώστες.

Εκπαίδευση: Αν αναβαθμιστεί και εκσυγχρονιστεί η εκπαίδευση: Διαρθρωτικές αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα, αναπροσανατολισμός στη στοχοθεσία της διδασκαλίας, αναμόρφωση του συστήματος αξιολόγησης, αλλαγή στη διαδικασία της μάθησης.

Πολιτεία: Χωρίς τη συνδρομή της πολιτείας κάθε προσπάθεια προώθησης του καλού βιβλίου θα είναι ατελέσφορη. Είναι ανάγκη, συνεπώς, η πολιτεία να κινηθεί στη χάραξη μιας πολιτιστικής πολιτικής για το βιβλίο, να ενθαρρύνει την ίδρυση νέων βιβλιοθηκών και να συνδράμει στον εμπλουτισμό τους, να ενισχύσει οικονομικά σοβαρές εκδοτικές προσπάθειες και να πρωτοστατήσει στην οργάνωση πολιτιστικών εκδηλώσεων που προβάλλουν και διαδίδουν το ποιοτικό βιβλίο.

Πνευματικοί άνθρωποι: Το ενδιαφέρον για το βιβλίο ευνοείται και από την υπεύθυνη δραστηριοποίηση των πνευματικών ανθρώπων, οι οποίοι πρέπει να πρωτοστατούν στη διάδοση του βιβλίου, δείχνοντας τρόπους μελέτης και κυρίως θέλγοντας με το έργο τους και τη διάθεση επικοινωνίας.

Άτομο: Αντίστοιχο είναι το χρέος και η ευθύνη του ατόμου: Η αφύπνισή του και η αντίστασή του στην ισοπέδωση σε συνάρτηση με τη διεκδίκηση της γνώσης και της γνήσιας ψυχαγωγίας αποτελούν το πρώτο σημαντικό βήμα μύησης στον κόσμο του βιβλίου.

Μ.Μ.Ε.: Καθοριστικό ρόλο καλούνται να διαδραματίσουν τα Μ.Μ.Ε. στην εκστρατεία ενίσχυσης του καλού βιβλίου: Με την προβολή της ωφελιμότητας του βιβλίου και την εκλαΐκευση επιστημονικών εκδόσεων θα συντελέσουν αποφασιστικά στην τόνωση της βιβλιοφιλίας και της φιλαναγνωσίας του σύγχρονου ανθρώπου.

Η ΕΠΙΚΑΙΡΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΜΕΣΑΙΩΝΑ

Από τη διδασκαλία της Ευρωπαϊκής Ιστορίας

Του **Ζ. Τσιρπανλή,** Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ποια επικαιρότητα έχει ο Μεσαίωνας και σε τι μπορεί να βοηθήσει την ανθρώπινη σκέψη στα χρόνια μας; Το πρόβλημα, έτσι όπως τίθεται, προϋποθέτει τεκμηριωμένη αξιολόγηση των πνευματικών και πολιτιστικών γεγονότων του Μεσαίωνα. Φυσικά δεν είναι παράδοξο, αν υποστηρίξομε ότι η ιστορία και των παλαιότερων ακόμη ετών είναι αρκετά αποκαλυπτική για τη σημερινή εποχή, όπως δεν είναι παράξενο αν το χθεσινό παιδί το ξαναβρίσκει κανείς, κατά μεγάλο μέρος, μέσα στον ώριμο άνδρα αργότερα.

Ο εξοπλισμός του ιππότη

[Μινιατούρα σε χειρόγραφο (β μισό του 14ου αι.) που περιέχει το ιπποτικό μυθιστόρημα "Lancelot du Lac". Διατηρείται στην Εθνική Βιβλιοθήκη του Παρισιού]

Ένα απλό παράδειγμα είναι ίσως πειστικό. Αν ανοίξομε ένα χάρτη του σημερινού κόσμου και παρατηρήσομε τα διάφορα κράτη, τότε ούτε η γεωγραφία, ούτε η εθνογραφία θα είναι ικανές να μας εξηγήσουν τον τρόπο και τους χώρους που αυτά κατέχουν. Γιατί δηλ. να βρίσκονται σ' αυτό το σημείο οι Πολωνοί, στο άλλο οι Ούγγροι, στο άλλο οι Τσέχοι ή οι Βούλγαροι κ.λπ. Γιατί εκεί να είναι συγκεντρωμένος ο μουσουλμανικός κόσμος ή εδώ οι ορθόδοξοι χριστιανοί και εκεί οι καθολικοί. Καμιά ερμηνεία δεν θα είναι ικανή να μας πείσει, αν δεν ανατρέξομε στο Μεσαίωνα, στα χρόνια δηλ. εκείνα, κατά τα οποία οι παραπάνω λαοί βγαίνουν από την ασημότητά τους και μετακινούνται από τις πρωτογενείς κατοικίες τους, για να καταλάβουν τα ίδια περίπου μέρη όπου σήμερα βρίσκονται. Καμιά εξήγηση δεν θα είναι αρκετή αν δεν μελετήσομε τα χρόνια του Μεσαίωνα, κατά τα οποία οι θρησκευτικές δοξασίες, που δεν παύουν να τις πιστεύουν οι ίδιοι λαοί, είχαν απλώσει την πρώτη τους ρίζα, συνοδευόμενες με όλες τις πολιτιστικές μορφές της γλώσσας, των ιδιωμάτων και του αλφάβητου που ακόμη χρησιμοποιούνται.

Η εθνολογική διαμόρφωση των λαών στο Μεσαίωνα

Ποτέ στην ιστορία δε συνέβησαν τόσες αλλαγές εθνολογικές όσες κατά το Μεσαίωνα, ιδίως από τον 5ο ως τον 11ο αι. Άλλες περίοδοι ιστορικές έχουν να επιδείξουν τεράστια ανάπτυξη του ανθρώπινου πνεύματος. Ποτέ όμως η ιστορία δεν είδε, και ίσως δε θα δει, μια τέτοια αναστάτωση και ανάμιξη λαών ταυτόχρονα στην Ασία, στην Ευρώπη και στην Αφρική. Γι' αυτό δεν είναι υπερβολή αν πούμε ότι οι βάσεις του σύγχρονου κόσμου ρίχτηκαν τότε, στο Μεσαίωνα. Έτσι, μόνο με τη μελέτη της εποχής αυτής γίνεται αντιληπτός ο σημερινός εθνογραφικός χάρτης.

Τόσο στη δυτική όσο και στην ανατολική Ευρώπη οι σημερινοί κάτοικοι είναι λίγο πολύ οι κατακτητές του πρώιμου Μεσαίωνα· η βόρεια Αφρική και η δυτική Ασία ως τη λεκάνη του Ινδού ποταμού απαρτίζουν τον "αραβικό" ή ισλαμικό κόσμο, τον οποίο δημιούργησαν οι πρώτοι μαθητές του Μωάμεθ κατά τους 7ο και 8ο αι. Οι κατακτήσεις των Σελτζούκων Τούρκων, τον 11ο αι., άνοιξαν το δρόμο στους Οθωμανούς Τούρκους· ακόμη, η μογγολική επέλαση του 13ου αι. προκάλεσε μερική ανακατάταξη των λαών της Ασίας και της ανατολικής Ευρώπης. Οι "βάρβαροι" γερμανικοί λαοί Γότθοι, Βάνδαλοι, Φράγκοι, Βουργούνδιοι, Αλαμανοί, Άγγλοι, Σάξονες, Ιούτοι, από τον 5ο ως τον 7ο αι., ιδρύουν, ύστερα από τις αλλεπάλληλες επιδρομές τους, βασίλεια, όπου και σήμερα κατοικούν οι απόγονοί τους Γερμανοί, Γάλλοι, Άγγλοι, Ολλανδοί, Σκανδιναβοί.

Δεν υπάρχει αντίρρηση ότι οι "βάρβαροι" αυτοί λαοί, όπως αποκαλούνται από τους ιστορικούς, πιο πολύ κατάστρεψαν και γκρέμισαν παρά έχτισαν, ότι η προσωπική τους συμβολή στην κληρονομιά του πολιτι-

σμού υπήρξε αρκετά αδύνατη. Είναι αυτονόητο, εξ άλλου, ότι μία τόσο ριζική μεταμόρφωση του χάρτη του κόσμου προκάλεσε ταυτόχρονα και βαθιά αλλαγή στη διαμόρφωση της οικονομικής, πνευματικής ή ηθικής ζωής των ανθρώπινων κοινωνιών.

Η γνώση επομένως των ιστορικών τυχών που σημαδεύουν τους "βαρβάρους" είναι επιβεβλημένη, αν θέλομε να κατανοήσομε το χαρακτήρα, τη νοοτροπία, τον τρόπο της σκέψης και ενέργειας, τις παραδόσεις, το φυσικό γενικά και πνευματικό περιβάλλον των απογόνων τους ευρωπαϊκών λαών. Με αυτούς άλλωστε στενοί δεσμοί μας ενώνουν και καθημερινά ερχόμαστε σε επικοινωνία και σε ανταλλαγές είτε στον εμπορικο-οικονομικό τομέα είτε στο μορφωτικό. Η γνώση ακόμη της πολιτικής και πολιτιστικής τους ιστορίας εξασφαλίζει, όχι μόνο στον ιστορικό, αλλά και στον πολιτικό και στο διπλωμάτη, ένα σοβαρό απόθεμα πνευματικού κεφαλαίου, που αναμφισβήτητα βοηθά στην ερμηνεία των θετικών ή αρνητικών αντιδράσεων των λαών αυτών.

Ανακεφαλαιώνοντας, παρατηρούμε ότι ο Μεσαίωνας αποτελεί μία περίοδο κατ' εξοχήν οργανική, με χαρακτηριστικά αυτοτελή και στοιχεία γόνιμα που διαμορφώνουν κατά τρόπο θετικό την επόμενη λαμπρή περίοδο της Αναγέννησης. Δεν μπορεί όμως γι' αυτό να θεωρηθεί και ως περίοδος μεταβατική ή μία "ατέλειωτη σκοτεινή νύχτα". Οι μεγάλες "βαρβαρικές" επιδρομές, οι εθνικές ζυμώσεις, οι εναλλασσόμενες πολιτικές και οικονομικές επαφές, τα κρατικά μορφώματα, οι διαδοχικές πνευματικές και κοινωνικές καταστάσεις, οι εφευρέσεις υψηλής πράγματι τεχνολογίας, ο έντονος θρησκευτικός φανατισμός, το μυστικιστικό πνεύμα και ο αντιδραστικός μοναχισμός, η περιπετειώδης ζωή του ιππότη, η ασκητική ζωή του μοναχού και η ταπεινή ζωή του δουλοπάροικου, γενικά καθετί που διασαφηνίζει οποιαδήποτε πτυχή του πολιτικού, κοινωνικού και πνευματικού βίου κατά τον Μεσαίωνα, αξίζει να μελετηθεί αυτό καθ' εαυτό σαν ενεργό στοιχείο της παγκόσμιας ιστορίας. Αλλά η γνώση και η ανάλυση των παραπάνω φαινομένων της ζωής κατά τη μεσαιωνική περίοδο ενδιαφέρουν όχι μόνο τον ιστορικό, μα και τον έμπορο, τον οικονομολόγο, το διπλωμάτη, τον πολιτικό, το λογοτέχνη, τον καλλιτέχνη, οι οποίοι μάλιστα εμπνέονται από την εποχή και δημιουργούν πρωτότυπα έργα[1]. Και τούτο, γιατί τα προαναφερθέντα στοιχειοθετούν τους θεμελιώδεις παράγοντες στη διαμόρφωση του χαρακτήρα και της συμπεριφοράς των Ευρωπαίων κατά τους νεότερους και τους σύγχρονους ακόμη καιρούς.

◆

1. Να θυμίσω π.χ. τη διεθνή εκδοτική και κινηματογραφική επιτυχία του μεσαιωνικού μυθιστορήματος του Umberto Eco "Il nome della rosa" (1980), που κυκλοφόρησε και στα ελληνικά *(Το όνομα του ρόδου)*. Πρβλ. ακόμη το πρόσφατο κινηματογραφικό έργο *Λάνσελοτ ο πρώτος ιππότης* (First Knight), βασισμένο στο ομώνυμο ιπποτικό μυθιστόρημα (το "Livre de Messire Lancelot du Lac", του β μισού του 14ου αι. - με εξαίρετες μινιατούρες το χειρόγραφό του στη Bibliothèque Nationale του Παρισιού). Σύγχρονη απόδοση του μύθου βλ. στο βιβλίο: *Λάνσελοτ ο πρώτος ιππότης*, ένα μυθιστόρημα της Ελίζαμπεθ Τσάντγουικ, από μια ιστορία των Λορν Κάμερον, Ντέιβιντ Χόζελτον και Ουίλιαμ Νίκολσον, σενάριο: Ουίλιαμ Νίκολσον, μετάφραση: Ερρίκος Μπαρτζινόπουλος, Αθήνα 1995.

«Η ΚΡΙΣΗ»

Του **Κ. Κατσιμάνη,** Σύμβουλου - Αντιπρόεδρου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Η κρίση είναι ένα από τα λιγότερο ελκυστικά θέματα που συναντά κανείς στο διδακτικό εγχειρίδιο, γιατί το οικείο κεφάλαιο είναι εννοιολογικά πυκνό και παράλληλα περιέχει ένα μεγάλο αριθμό όρων που απευθύνονται φαινομενικά στη μνήμη. Θα απλουστευτεί κατά πολύ η διδακτική παρουσίασή του, αν χωριστεί σε δύο τμήματα:

Το πρώτο, αντιστοιχεί στις υποενότητες: «Κρίση και πρόταση», «Συμβολική παράσταση της κρίσης» και «Η σχέση της κρίσης με την έννοια» (σελ. 94-96).

Το δεύτερο, αντιστοιχεί στην υποενότητα: «Τα είδη των κρίσεων» (σελ. 96-97)*.

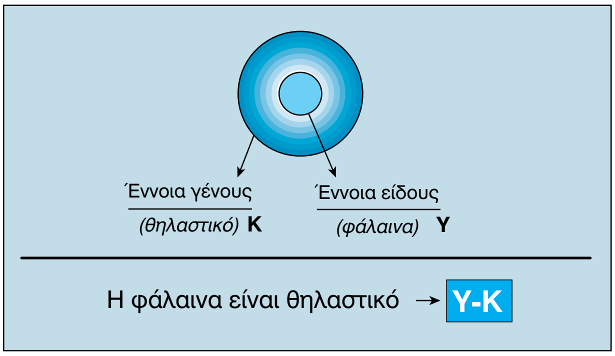
Ο χωρισμός αυτός υπαγορεύεται από το διαφορετικό χαρακτήρα του κάθε τμήματος. **Το πρώτο** είναι θεωρητικότερο και προσφέρεται για φιλοσοφική ανάλυση και εμβάθυνση, ενώ το **δεύτερο** είναι περισσότερο «τεχνικό» και επιβάλλει μια συστηματική παρουσίαση, συνοδευόμενη από την κατανόηση μιας σειράς ορισμών.

Πιο συγκεκριμένα:

Ιδιαίτερη βαρύτητα πρέπει να δοθεί στο πρώτο μέρος για το λόγο που αναφέρθηκε ήδη. Μία πρώτη προσέγγιση θα μπορούσε να αποτελέσει η σύντομη επισκόπηση χαρακτηριστικών σημασιών της λέξης «κρίση». Για παράδειγμα, «αυτός ο μαθητής διαθέτει κρίση»˙ «ο διευθυντής αποφάσισε κατά την κρίση του»˙ «οι σχέσεις των δύο κρατών διέρχονται κρίση» κτλ. Με την ευκαιρία, επισημαίνεται ότι στη λογική ο όρος «κρίση» έχει ειδικότερη σημασία και συχνά ταυτίζεται με τον όρο «πρόταση». Η σχέση της πρότασης με την κρίση αντιστοιχεί στη σχέση γλώσσας και σκέψης, που, ενώ συνυφαίνονται και «συλλειτουργούν», στην ουσία είναι έννοιες διαφορετικές. Αυτό θα κατανοηθεί πληρέστερα με μια σύντομη αναφορά στις υποενότητες «Γλώσσα και σκέψη» (σελ. 78-79) και «Η σκέψη ως διάλογος διαμέσου της γλώσσας» (σελ. 79-80).

Υπάρχει λοιπόν διαφορά ανάμεσα στην πρόταση και την κρίση, που πρέπει να αναλυθεί με τη χρήση παραδειγμάτων. Σκόπιμη θα ήταν η ανάγνωση του συνοδευτικού κειμένου «Λογικές και ψευδολογικές προτάσεις» (σελ. 98), για να δειχτεί με έμφαση ότι, ενώ κάθε κρίση είναι πρόταση, κάθε πρόταση δεν είναι πάντοτε και υποχρεωτικά κρίση.

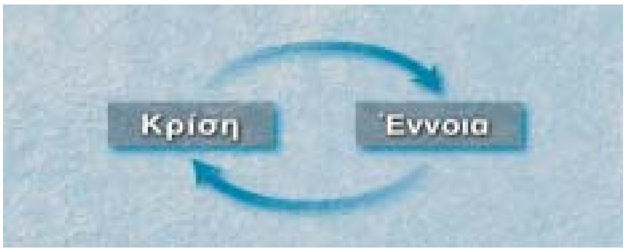
Τελικά, τι είναι η λογική κρίση; Αυτό θα δειχτεί και πάλι μέσω παραδειγμάτων, από τα οποία θα προκύψει η ανάλυση και υπογράμμιση των γνωρισμάτων της. Επιπλέον, πρέπει να τονιστεί ότι κάθε λογική κρίση είναι μια σχέση κατηγόρησης μεταξύ δύο εννοιών. Πρόκειται για διαδικασία, με την οποία μια έννοια γένους (π.χ. η έννοια «θηλαστικό») αποδίδεται ως κατηγορούμενο σε μια έννοια είδους (π.χ. στην έννοια «φάλαινα»). Οπότε έχουμε



Με την ευκαιρία, μπορεί να ερμηνευθεί και το συνοδευτικό κείμενο αριθ. 3 από τις αριστοτελικές **Κατηγορίες** (σελ. 92).

Έχει ήδη προετοιμαστεί το έδαφος για την παρουσίαση της συμβολικής παράστασης της κρίσης με παράλληλη επισήμανση της ανεπάρκειάς της (Υ-Κ): το κλασικό σχήμα Υ-Κ εκφράζει μόνο τις σχέσεις κατηγόρησης μεταξύ δύο εννοιών, άρα αδυνατεί να αποδώσει πληρέστερες λογικές σχέσεις. Αυτό το επιχειρεί η «λογιστική» με τους συμβολισμούς της (οι μαθητές παραπέμπονται για «κατ' οίκον» ενημέρωση στο κείμενο αριθ. 3 των σελ. 133-135).

Το θεωρητικό μέρος συμπληρώνεται με ανάλυση της σχέσης μεταξύ κρίσης και έννοιας. Εδώ πρέπει να δειχτεί ότι: 1. Η έννοια προκύπτει από λογική διαδικασία περισσότερο σύνθετη από εκείνη που παράγει την κρίση και 2. Υπάρχει αμφίδρομη πορεία μεταξύ κρίσης και έννοιας.

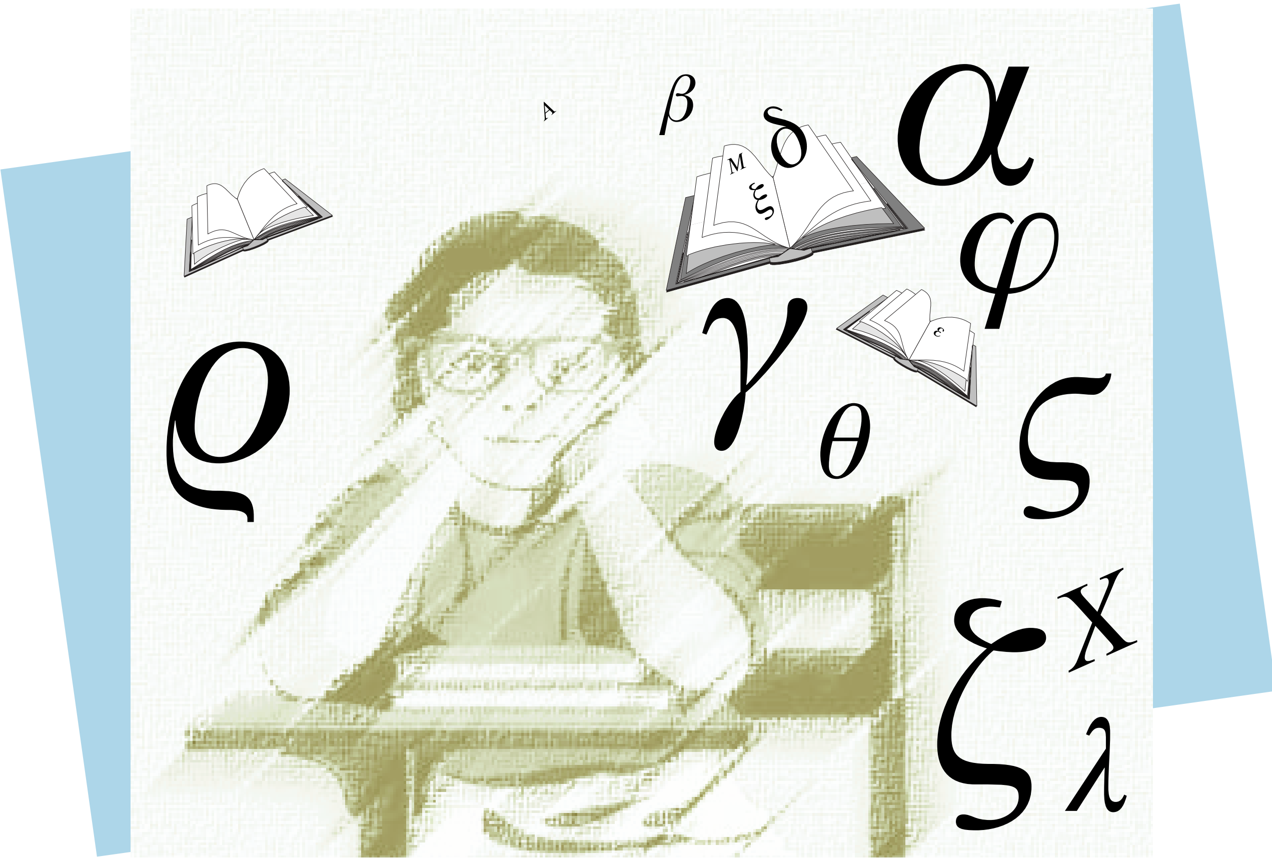


* Βλ. βιβλίο «ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ» των κ.κ. Κ. Κατσιμάνη και Ε. Ρούσου.

Το δεύτερο μέρος («Τα είδη των κρίσεων») μπορεί να διδαχτεί με το βιβλίο ανοιχτό. Ο καθηγητής και οι μαθητές διαβάζουν και αναλύουν τα τέσσερα κριτήρια (ποιό, ποσό, αναφορά, τρόπο), με βάση τα οποία διαιρούνται οι κρίσεις, και επισημαίνουν τα επιμέρους είδη των κρίσεων που προκύπτουν κατά περίπτωση. **Εδώ προέχει η κατανόηση, όχι η απομνημόνευση**. Από την αρχή της ανάγνωσης, ένας μαθητής μπορεί να αναγράφει στον πίνακα τα είδη των κρίσεων αποδίδοντάς τα σχηματικά. Για παράδειγμα:

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα είδη των κρίσεων κατά το ποιο και, ταυτόχρονα, το ποσό και αναλύεται κάθε είδος που προκύπτει, με ιδιαίτερη έμφαση στις αντιφατικές κρίσεις. Από τη σελ. 258 ο καθηγητής μπορεί να επιλέξει ερωτήσεις που θα του επιτρέψουν να αξιολογήσει το βαθμό αφομοίωσης του κεφαλαίου από τους μαθητές.

Κριτήριο	Είδη Κρίσεων	Παραδείγματα
ΠΟΙΟ	Καταφατικές	
	Αποφατικές	
ΠΟΣΟ	Γενικές	
	Μερικές	
	Ατομικές	
ΑΝΑΦΟΡΑ	Κατηγορικές	
	Υποθετικές	
	Διαζευκτικές	
ΤΡΟΠΟΣ	Βεβαιωτικές	
	Αποδεικτικές	
	Προβληματικές	



Ερωτηματολόγιο

1. Πιστεύετε ότι οι *Εκπαιδευτικοί* ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ, όπως περιγράφονται στις επιστολές του εκδότη και του επόπτη εκδόσεως και όπως διαφαίνεται από τα άρθρα του τεύχους αυτού, συμβάλλουν στην εκπαιδευτική διαδικασία;

ΝΑΙ ☐ *ΟΧΙ* ☐ *ΕΝ ΜΕΡΕΙ* ☐

2. Αν βλέπετε κάποιες αδυναμίες, πού βρίσκονται κατά τη γνώμη σας;

Είναι απαραίτητη ✍ ....

....

....

Είναι απαραίτητες ✍ ....

....

....

Κάτι άλλο (παρακαλούμε αναφέρετε την άποψή σας) :

✍ ....

....

....

Μπορείτε να μας στείλετε το θέμα σας στην παρακάτω διεύθυνση :

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Σόλωνος 79-81, 54248 Θεσσαλονίκη

Τηλ. & Fax : 031.864 961

Υπόψη κας Άννης Ζήτη

Παρακαλούμε συμπληρώστε τα στοιχεία σας :

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ .... *ΙΔΙΟΤΗΤΑ* ....

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ .... *ΠΟΛΗ* ....

ΤΑΧ. ΚΩΔ. .... *ΤΗΛΕΦΩΝΟ* ....