Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Περιοδική έκδοση

Νο 10 • ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2003

Συμβολή στην προσπάθεια του μαχόμενου εκπαιδευτικού για αποτελεσματική διδακτική προσφορά

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί
Νο 10 - Απρίλιος 2003

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Τιμή τεύχους 0,01€

Περιεχόμενα

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. 2310.203.720, Fax: 2310.211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: 210.32.11.097
- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ Αποθήκη Αθηνών • Πώληση χονδρική**
  Βαλτετσίου 45 • Εξάρχεια 106 81, Αθήνα,
  Τηλ.-fax 210.38.16.650
- **Σε όλα τα συνεργαζόμενα βιβλιοπωλεία**

Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 30 € για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.

Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το «άμεσο περιβάλλον» της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,

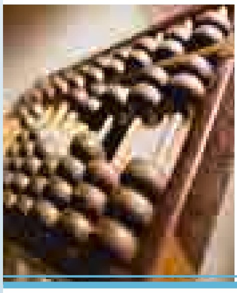
- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

Επειδή η σύνταξη του περιοδικού μας κατακλύζεται από προτάσεις με κριτικές του τρόπου παρουσίασης της ύλης στα σχολικά βιβλία, με ασκήσεις ή διαφορετικές λύσεις μιας άσκησης θέλουμε να σας επισημάνουμε ότι μέσα στους στόχους, που έχουν από την αρχή θέσει οι Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, δεν περιλαμβάνεται

- *η κριτική των εγκεκριμένων σχολικών βιβλίων και των μεθόδων διδασκαλίας (εκτός και αν υπάρχει κάποιο λάθος), γιατί θα προκαλέσουμε σύγχυση στον μαχόμενο εκπαιδευτικό, ούτε και*
- *η παράθεση ασκήσεων ή όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων κάποιων ασκήσεων αφού αυτό καλύπτεται από το μεγάλο αριθμό βοηθημάτων που κυκλοφορούν.*

Στόχος μας είναι ο σχολιασμός και η επιστημονική (στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) ανάλυση θεμάτων, προτάσεων και φαινομένων που εξυπηρετούν καθαρά διδακτικούς σκοπούς καθώς και ασκήσεων ή λύσεων που υποδεικνύουν μεθόδους και τρόπους αντιμετώπισης προβλημάτων που εμφανίζονται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Με εκτίμηση
Γεώργιος Παντελίδης



ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ της ΧΙΛΙΕΤΙΑΣ

4ο Μέρος (τελευταίο): 1800-2000 μ.Χ.

Της **Χριστίνας Φίλη**, Επίκουρης Καθηγήτριας Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Θεωρία Αριθμών 18ος-19ος-20ος αι.

Με τις έρευνες του Euler δημιουργείται επίσημα ο κλάδος της ***Θεωρίας Αριθμών***, που ουσιαστικά αναφέρεται σε δύο είδη προβλημάτων: εκείνα τα οποία συνδέονται με τις ιδιότητες διαιρετότητας των ακεραίων και στη θεωρία των εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα για την μετέπειτα εξέλιξη της θεωρίας ήταν η πρόταση του Fermat (1640) «*Για κάθε ακέραιο N μη διαιρετό με δοθέντα πρώτο αριθμό c, η ποσότητα* $N^{c-1}-1$ *είναι ακέραιος*», την οποία αποδεικνύει ο Euler το 1736.

Ο Legendre το 1785 ανακαλύπτει αυτό που ονομάζει νόμο της αντίστροφης τετραγωνικότητας. *Για κάθε δύο πρώτους περιττούς ακεραίους μ και ν οι εξισώσεις* $x^2+\mu=\nu y_1$ *και* $x^2+\nu=\mu y_2$ *επιλύονται.* Ο *Lagrange* το 1767 επιλύει την γενική εξίσωση $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$ με ακέραιους συντελεστές.

Όμως τον 18^{ο} αιώνα διατυπώθηκαν και πολλές εικασίες οι οποίες ήταν αδύνατον να επιλυθούν όπως:

1) ***Η εικασία του Goldbach****: Αν $n>4$ είναι άρτιος, τότε το n είναι το άθροισμα δύο πρώτων περιττών αριθμών. Αν $n\geq 9$ περιττός, τότε είναι το άθροισμα 3 πρώτων περιττών αριθμών. Ο Vinogradov* το 1937 έλυσε μερικά το *2^{ο}* ερώτημα.
2) ***Το πρόβλημα του Waring*** (***1770***): *Για κάθε φυσικό αριθμό κ υπάρχει φυσικός αριθμός g(κ) τέτοιος, ώστε κάθε φυσικός αριθμός να μπορεί να γραφεί ως άθροισμα το πολύ g(κ) αριθμών, οι οποίοι είναι κ-δυνάμεις φυσικών αριθμών.* Για παράδειγμα, κάθε φυσικός αριθμός *κ* είναι άθροισμα το πολύ εννέα αριθμών, οι οποίοι είναι κύβοι άλλων αριθμών, *π.χ.* $17=2^3+2^3+1^3$, δηλαδή για $\kappa=3$, $g(3)=9$. Επίσης, για $\kappa=4$ το $g(4)=19$. Τη γενική λύση έδωσε ο Hilbert το 1909.
3) Η κατανομή πρώτων αριθμών που περιέχει διάφορα ερωτήματα μεταξύ των οποίων είναι η ***εικασία του Legendre***: *Για κάθε ακέραιο $n>1$ υπάρχει ένας πρώτος αριθμός μεταξύ* n^2 *και* $(n+1)^2$.
4) ***Η εικασία Eugnne Charles Catalan*** (1842). Για την εικασία και τη θετική απάντηση βλ. σε άλλη θέση).

Στις αρχές του 19^{ου} η Θεωρία Αριθμών κυριαρχείται από τον *Gauss*, ο οποίος ενδιαφέρεται για την θεωρία διαιρετότητας και την αριθμητική των τετραγωνικών μορφών. «*Ποιες είναι οι συνθήκες ώστε η εξίσωση* $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=n$ *να δέχεται ακέραιες λύσεις και να ευρεθούν όλες οι λύσεις*» είναι τα δύο βασικά προβλήματα τις θεωρίας των τετραγωνικών μορφών. Οι *Lagrange, Legendre* και *Gauss* τα μελετούν συστηματικά.

Σε μια πολυσέλιδη εργασία ο *Dirichlet* (1837-39) «*Έρευνες στις διάφορες εφαρμογές της απειροστικής ανάλυσης στη θεωρία αριθμών*», επιλύει μερικά ανοιχτά προβλήματα όπως: i) *Να δοθεί ο τύπος που δίδει τον αριθμό των τάξεων των τετραγωνικών (quadratiques binaires) με διακρίνουσα D* και ii) Αποδεικνύει την εικασία του *Legendre*: *Αν (α, q)=1, δηλαδή α και q είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η ακολουθία* $\{q^n+\alpha : n=1, 2, \ldots\}$ *περιέχει άπειρου πλήθους πρώτους αριθμούς.*

Θεωρία αλγεβρικών αριθμών

Αλγεβρικός αριθμός (όπως τον ορίζει ο *Dedekind*) είναι κάθε ρίζα αλγεβρικού πολυωνύμου, δηλαδή πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Η θεωρία αλγεβρικών αριθμών ξεκίνησε με την Μεταθετική Άλγεβρα και τη Θεωρία των Αλγεβρικών Συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Ο *Kronecker* μελετά τις αβελιανές εξισώσεις και θεμελιώνει την Θεωρία των Αλγεβρικών Αριθμών.

Ο Hilbert συνεχίζει αυτή την έρευνα, στο περίφημο Zahlbericht (1897), στα άρθρα του σχετικά με τις αβελιανές επεκτάσεις και στα 23 προβλήματά του, όπου 8 αναφέρονται στη Θεωρία Αριθμών.

Το 1897 ο Hensel εισάγει τους p-αδικούς αριθμούς.

Η ύπαρξη σώματος των τάξεων του *Hilbert* δίνεται από τον *Furtwängler*. Οι *Tagagi*, *Artin* και *Hasse* (1920-

30) εργάζονται σ’ αυτό και δίδουν σημαντικά αποτελέσματα.

Το θεώρημα του σώματος των τοπικών τάξεων (ανεξάρτητο από τις ολικές τάξεις) οδηγεί τον *Chevalley* να αποδείξει ότι τα γενικά θεωρήματα μπορούν να επεκταθούν σε τοπικά θεωρήματα (1936) εισάγει μάλιστα την καινούργια έννοια «idèle», όταν βρίσκει τον τρόπο να εκφράσει τις ομάδες της τάξεως ισοδυναμίας του *Tagaki.*

Στα 1950-60 οι *Artin* και *Tate* αποδεικνύουν το θεώρημα της Θεωρίας των Αλγεβρικών Αριθμών και της Αλγεβρικής Γεωμετρίας μιας διάστασης. Επίσης εφαρμόζουν την θεωρία της συνομολογίας στη θεωρία των σωμάτων τάξεων.

Πρώτοι Αριθμοί

Αν και η πρώτη συστηματική παρουσίαση των ακεραίων και των ιδιοτήτων της διαίρεσης βρίσκονται στα ***Στοιχεία του Ευκλείδη***, η θεωρία των πρώτων αριθμών δημιουργείται τον $19^{ο}$ αι. από τον *Dirichlet*, που εφαρμόζει τεχνικές της Ανάλυσης στα προβλήματα Θεωρίας Αριθμών.

Αν και ο Euler αποδεικνύει την απειρία των πρώτων αριθμών, ο Legendre είναι εκείνος που δίδει τον προσεγγιστικό τύπο

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}$$

ενώ ο *Gauss*

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

Από τα δύο αποτελέσματα προκύπτει

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} = 1,$$

που έγινε γνωστό ως θεώρημα των πρώτων αριθμών. Για την απόδειξη του εργάστηκαν οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί του κόσμου. Το 1848 ο *Tchebychev* αποδεικνύει ότι αν υπάρχει το όριο, τότε ισούται με 1.

Με την απόδειξη αυτή ο *Tchebychev* αποδεικνύει και το πρόβλημα, γνωστό ως αίτημα του *Bertrand* (1845): «*Για κάθε ακέραιο $n>1$ υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός μεταξύ n και 2^n*». Τις έρευνες του, ο *Tchebychev* τις ξεκινά από τη σχέση

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}, \quad s\in\mathbb{R}$$

Ήταν φανερό πως υπάρχει σχέση της συνάρτησης $\zeta(s)$ με τους πρώτους αριθμούς. Το 1859 ο *Riemann* αποδεικνύει πως για να κατανοηθεί αυτή η σχέση έπρεπε να θεωρηθεί η $\zeta(s)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s. Αν και ο *Riemann* «έβλεπε» την απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών δεν την παρουσιάζει όμως.

Για το μεγαλύτερο πρώτο αριθμό που έχει μέχρι σήμερα προσδιοριστεί βλ. σε άλλη θέση.

Υπερβατικοί Αριθμοί

Μια καλή προσέγγιση της τιμής του π συναντούμε ήδη στον πάπυρο Rhind (1650 π.Χ.) και ο *Napier* αναφέρει τον e το 1640, όμως ο *Euler* είναι εκείνος που παρουσιάζοντας τον τύπο $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, οπότε $e^{i\pi}+1=0$, συνδέει μεταξύ τους το e, το i και το π. Το 1737 ο *Euler* αποδεικνύει πως ο e και ο e^2 είναι άρρητοι και το 1761 ο *Lambert* αποδεικνύει πως π και e^x είναι επίσης άρρητοι.

Το 1844 ο *Liouville* αποδεικνύει πως κάθε αριθμός της μορφής

$$\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\dots,$$

όπου α_n είναι ακέραιοι μεταξύ 0 και 9, είναι υπερβατικός.

Το 1873 ο *Ch. Hermite* αποδεικνύει πως ο e είναι υπερβατικός και το 1882, ο *Lindemann* πως ο π είναι υπερβατικός.

Στο $2^{ο}$ Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι, ο *Hilbert* θέτει ως $7^{ο}$ πρόβλημα: «*Αν α αλγεβρικός $\neq 0,1$ και β άρρητος αλγεβρικός, ο αριθμός α^β είναι υπερβατικός;*»

Το 1929 ο *Gelfond* αποδεικνύει ότι ο α^β είναι υπερβατικός, όταν β είναι τετραγωνικός μιγαδικός απ’ αυτό προκύπτει ότι ο $e^{\pi}=(-1)^{-i}$ είναι υπερβατικός. Το 1934 οι *Gelfond* και *Schneider* (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο) αποδεικνύουν την υπερβατικότητα του α^β και απαντούν θετικά στο $7^{ο}$ πρόβλημα. Το 1938 ο *Pisot* δίδει ένα κριτήριο για τον υπερβατικό αριθμό: *Η τριγωνομετρική σειρά, της οποίας ο γενικός όρος είναι $\sin^2(\pi\alpha x^\nu)$, όπου α υπερβατικός, αποκλίνει για κάθε πραγματική τιμή $x>1$.*

Οι *Διοφαντικές προσεγγίσεις* που είναι μέθοδοι προσέγγισης πραγματικού αριθμού με ρητούς αρχίζουν να ερευνώνται από τους μαθηματικούς του $18^{ου}$ αιώνα όταν ενδιαφέρονται για την αριθμητική λύση των εξισώσεων και την ταχύτητα σύγκλισης των τιμών προσέγγισης των ριζών.

Τα συνεχή κλάσματα

$$x = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 \dots}}}$$

χρησιμοποιούν οι *Lagrange* και *Legendre* για να επιλύσουν αρκετά προβλήματα. Οι *Dirichlet* (1830) και *Kronecker* (1884) με τα θεωρήματά τους ανοίγουν και-

νούργιους δρόμους και ο *Minkowski* δημιουργεί την *Γεωμετρία των Αριθμών*.

Για τις *Διοφαντικές εξισώσεις* (μια εξίσωση $f(x_1, x_2, ..., x_n)=0$, όπου f είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές), το βασικό πρόβλημα τους είναι να γνωρίζουμε αν ένα σύστημα τέτοιων εξισώσεων έχει λύση ακέραιους ή ρητούς αριθμούς. Το 1890 οι ιδέες της Αλγεβρικής Γεωμετρίας έδωσαν ώθηση στην επίλυση διοφαντικών εξισώσεων (βλ. την μέθοδο του *C. Runge*), καθώς και στις διοφαντικές προσεγγίσεις (θεώρημα *Thue*, 1909).

Η ποικιλία των λύσεων στις διοφαντικές εξισώσεις ήταν φυσικό να οδηγήσει στην αναζήτηση μιας γενικής μεθοδολογίας, η οποία να μπορεί να δώσει απάντηση στο αν υπάρχουν ή δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.

Στο $10^{ο}$ πρόβλημα ο *Hilbert* αναρωτιέται αν υπάρχει κάποια «*κανονική διαδικασία*» η οποία, για κάθε δοθείσα διοφαντική εξίσωση, θα επέτρεπε να αποφανθούμε αν η εξίσωση έχει ή όχι μια ακέραια λύση, με ένα πεπερασμένο αριθμό πράξεων, αλλά ποτέ δεν εξήγησε τι εννοεί «*κανονική διαδικασία*». Οι ερευνητές της μαθηματικής λογικής άρχισαν (περί το 1940) να ερευνούν αν υπάρχει πρόγραμμα υπολογιστού που να εφαρμόζεται σε κάθε διοφαντική εξίσωση και η οποία μ' ένα πεπερασμένο πλήθος πράξεων να καταλήγει στην ύπαρξη ή μη ενός ακεραίου μηδενός (*zèro entier*). Έτσι γεννήθηκαν τα υπολογίσιμα ή μη υπολογίσιμα σύνολα. Αργότερα η *Julia Robinson* (1952) εισάγει την έννοια του διοφαντικού συνόλου.

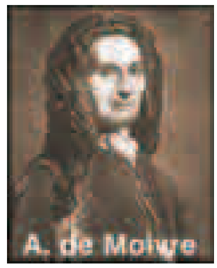
Η Προσθετική Θεωρία Αριθμών ασχολείται με προβλήματα του τύπου: Δοθέντος ενός απείρου συνόλου ακεραίων S (π.χ. το σύνολο των πρώτων αριθμών ή των τετραγώνων ή των κ-δυνάμεων, για δοθέντα ακέραιο εκθέτη κ>0) είναι δυνατόν να γραφεί κάθε ακέραιος ως άθροισμα ενός σταθερού αριθμού στοιχείων του S;.

Υπενθυμίζουμε πως μερικές κλασικές εικασίες αυτής της μορφής είναι:

1. ***Η εικασία του Goldbach***.
2. ***Το θεώρημα του Lagrange***: *Κάθε ακέραιος p>0 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα το πολύ τεσσάρων τετραγώνων (*το απέδειξε το 1770*)*.
3. ***Η εικασία του Waring*** *(1770):* Μετά την επίλυσή της από τον *Hilbert*, εμφανίζονται 1915-1925 δύο σημαντικές μέθοδοι, οι οποίες με τη γενική τεχνική τους αναδεικνύουν την προσθετική θεωρία αριθμών σε ένα αυτοτελή κλάδο: «*Η μέθοδος των κοσκίνων*», μέθοδος που βασίζεται στο κόσκινο του *Ερατοσθένη* και αναπτύσσει ο *Viggo Brunn* (1920) μελετώντας την εικασία του *Goldbach* και αργότερα την τελειοποιούν οι *Kuhn* (1941) και *Renyi* (1947) και «*Η μέθοδος του κύκλου*» των *Hardy-Littlewood* που αργότερα τελειοποιεί ο *Vinogradov*.

Πιθανότητες 18ος, 19ος και 20ος αι.

Ο *Jakob Bernoulli*, με το βιβλίο του *Τέχνη του εικάζειν* (*Ars Conjectandi*) (1713), συνεχίζει και επεκτείνει στις πιθανότητες το έργο του *Huygens*, αποδεικνύοντας μια καινούργια μέθοδο υπολογισμού των αθροισμάτων των δυνάμεων των ακεραίων (αυτό που σήμερα ονομάζουμε Νόμο των Μεγάλων Αριθμών). Στο $4^{ο}$ μέρος του βιβλίου του, που φέρει τον τίτλο *Για τη Χρήση και την Εφαρμογή της Θεωρίας στην Πολιτική, Ηθική και Οικονομία*, υπογραμμίζει πως απόλυτη βεβαιότητα ή η πιθανότητα =1 είναι αδύνατη, εισάγει την ιδέα της *ηθικής βεβαιότητας* δηλαδή για να είναι κάτι ηθικά βέβαιο θα πρέπει η πιθανότητα να είναι όχι μικρότερη από 0,999, αντίστροφα ένα γεγονός με πιθανότητα μεγαλύτερη από 0,001 είναι αδύνατο ηθικά.



Ο *A. de Moivre* (1667-1754) με το έργο του *The Doctrine of Chances* (1718) προχωρεί περισσότερο εφαρμόζοντας τη γνώση των σειρών. Η καμπύλη της κανονικής κατανομής και οι ιδιότητές της έχουν σημαντική επίδραση στους μεταγενέστερους.

Τελικά ο *Thomas Bayes* (1702-1761) και *P.S. Laplace* (1749-1827) αποδεικνύουν πως ορίζεται η πιθανότητα από τη θεώρηση κάποιων εμπειρικών δεδομένων.

Προσπαθώντας να δικαιολογήσει την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων του *Legendre* και την θεωρία σφαλμάτων του *Gauss*, ο *Laplace* αποδεικνύει το θεώρημα του *de Moivre* (που ο ίδιος το θεωρεί για $p=\frac{1}{2}$) αν $pq\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν $n\to\infty$

$$p\left(\frac{S_n-np}{\sqrt{npg}}<x\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{y^2}{2}}\,dy$$

Όμως τόσο η απόδειξη του *Laplace* όσο και η μεταγενέστερη του *Poisson* δεν είναι αρκετά σαφείς. Αργότερα ο *Tchebytchev* και ο μαθητής *Markov* (1898) θα δώσουν μια αυστηρή απόδειξη.

Η σύγχρονη Θεωρία Πιθανοτήτων γεννιέται τον $20^{ο}$ αιώνα με το θεώρημα του *Liapunov*, τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών του Borel (ο οποίος το 1909 θα συνδέσει την έννοια της πιθανότητας με την ιδιότητα του μέτρου) και τις αλυσίδες του Markov. Το 1933 ο *Kolmogorov* θα ορίσει την έννοια της πιθανότητας και θα δώσει την αξιωματική μορφή στον κλάδο αυτό στην περίφημη μονογραφία του: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

Οι στοχαστικοί μέθοδοι, οι γεωμετρικές πιθανότητες, η αριθμητική των νόμων είναι μερικές από τις θεωρίες που αναπτύσσονται στην εποχή μας.

Μαθηματική Λογική

Ο *de Morgan* και ο *Boole* μπορούν να θεωρηθούν ως οι αναμορφωτές της Αριστοτελικής Λογικής και εισάγουν την άλγεβρα της Λογικής. Ο προτασιακός λογισμός προχωρεί με τον *Peirce,* ενώ ο *Frege* (1879) είναι ο πρώτος που εισάγει μια πλήρη σχηματοποιημένη γλώσσα και κατασκευάζει την συμβολική λογική.

Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές

Η πρώτη μηχανή για αριθμητικές πράξεις σχεδιάζεται το 1623 από τον *W. Schickard*, καθηγητή Αστρονομίας και Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της *Tübingen*, την οποία «τελειοποιεί» ο *Leibniz* το 1671. Με την βιομηχανική επανάσταση στην Αγγλία, ο *Babbage* το 1821 δημιουργεί την αναλυτική μηχανή για τον υπολογισμό μαθηματικών πινάκων. Με αυτή τη μηχανή ξεκινά τις έρευνες ο *A. Turing* για να κατασκευάσει (1936) τη μηχανή, η οποία φέρει το όνομα του. Το 1938 ο *C. Shannon* εφαρμόζει την άλγεβρα του *Boole* σε κατασκευή ανοιχτών/κλειστών κυκλωμάτων. Ο *J. von Newmann* μετά τον 2ο Παγκόσμιο Πόλεμο, μαζί με μια ομάδα επιστημόνων και μηχανικών δημιουργούν δύο Η/Υ τον ENIAC και τον EDVAC. Αργότερα ο *R. Hamming* παρουσιάζει τις τεχνικές της ανίχνευσης λάθους και της διόρθωσης κωδικών (1950).

Κυβερνητική

Όταν το 1938 ο *N. Wiener* και ο καρδιολόγος *Arturo Rosenbleuth* αποφασίζουν να ερευνήσουν το χώρο της γνώσης, θέτουν τα θεμέλια της επιστήμης της Κυβερνητικής, όπου υπάγονται η πληροφορική, τα προβλήματα επιχειρησιακής έρευνας, η θεωρία αποφάσεων, θεωρία παιγνίων κ.α.).

Τοπολογία

Αν και η τοπολογία είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που ξεκίνησε τα τελευταία 100 χρόνια (ο *Listing* το 1836 εισάγει τον όρο που χρησιμοποιήθηκε το 1920), τα αποτελέσματα τους βρίσκονται σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών.

Η τοπολογία αποτελείται από δύο κυρίως κλάδους την Γενική (ή Αναλυτική) και την Συνδυαστική (η οποία αργότερα μετονομάστηκε σε Αλγεβρική Τοπολογία). Ο πρώτος κλάδος γεννήθηκε από τα προβλήματα τα οποία παρουσιάστηκαν στη θεωρία Συναρτήσεων και αναπτύχθηκε για να βοηθήσει τη Συναρτησιακή Ανάλυση, τον Λογισμό Μεταβολών και τις φασματικές θεωρίες. Ο δεύτερος κλάδος, της Αλγεβρικής Τοπολογίας, ξεκινά με τις εργασίες του *Riemann* στην θεωρία Αναλυτικών Συναρτήσεων οι οποίες κατέληξαν στις τοπολογικές ιδιότητες των επιφανειών.

Στον κλάδο της Γεωμετρικής Τοπολογίας ο Χρίστος Παπακυριακόπουλος (1914-1976) με την απόδειξη 3 βασικών θεωρημάτων (το θεώρημα του βρόγχου, το λήμμα του *Dehn* και της εικασίας του *Poincaré* για $n>3$) κερδίζει την παγκόσμια αναγνώριση.

Συναρτησιακή Ανάλυση

Μέχρι τα τέλη του 19ου αι. οι μαθηματικοί μελετούσαν τις αριθμητικές συναρτήσεις μιας ή πεπερασμένου αριθμού αριθμητικές μεταβλητές, συναρτήσεις που ονομάζουμε συνήθεις.

Ο *V. Volterra* είναι ο πρώτος που μελετά ιδιαίτερες αριθμητικές συναρτήσεις, εξαρτώμενες από μια απειρία αριθμητικών μεταβλητών. Ο *Volterra* ερευνά αριθμητικές συναρτήσεις εξαρτώμενες είτε από καμπύλες είτε από συνήθεις συναρτήσεις. Τις πρώτες ονομάζει «*συναρτήσεις γραμμών*», τις άλλες ο *Hadamard* ονομάζει «*συναρτησοειδείς*». Η μελέτη αυτών των καινούργιων συναρτήσεων αποτέλεσε το πρώτο αντικείμενο έρευνας της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Αργότερα η έρευνα της Συναρτησιακής Ανάλυσης επεκτάθηκε στην έρευνα αριθμητικών συναρτήσεων των οποίων η μεταβλητή είναι ένα αφηρημένο στοιχείο. Το 1915 ο *Fréchet* δίδει τον ορισμό και τις ιδιότητες του ολοκληρώματος ενός *συναρτησοειδούς* σ' ένα αφηρημένο σύνολο (χωρίς να έχει εφοδιαστεί με Τοπολογία). Μ' αυτό επεκτείνεται το ολοκλήρωμα του *Radon*. Αργότερα ο *Daniell* προχωρεί περισσότερο και συμπληρώνεται από τον Nikodym με το θεώρημα της παραγώγισης.

Οι τρεις Σχολές της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών

Σήμερα υπάρχουν τρεις βασικές φιλοσοφικές θέσεις για τα Μαθηματικά:

1) Η ***Λογικισμική Σχολή (Logistic)***, με έξοχο εκπρόσωπο τον *Frege,* ο οποίος ήθελε να ανασκευάσει και να κτίσει τα Μαθηματικά πάνω στη Λογική. Οι *Russel* και *Whitehead*, ανεξάρτητα από τον *Frege,* ακολουθούν τον ίδιο δρόμο.
2) Η ***Ενορατική Σχολή,*** με εκπρόσωπο τον *Brouwer*, που θεωρεί πως τα Μαθηματικά κατασκευάζονται με πεπερασμένες κατασκευαστικές μεθόδους, με ενορατικά δοσμένη ακολουθία φυσικών αριθμών.
3) Η ***Φορμαλιστική Σχολή***, με κύριο εκπρόσωπο της τον *Hilbert*, ο οποίος θεωρεί τα Μαθηματικά ως σχηματοποιημένα συμβολικά συστήματα.

Τα Σύγχρονα Μαθηματικά

Η πρωτοτυπία της σύγχρονης εποχής είναι ότι όχι μόνο μελέτησε και εμβάθυνε στις ήδη γνωστές έννοιες αλλά εισήγαγε και καινούργιες οι οποίες αποδείχθηκαν πολύ γόνιμες. Ας πάρουμε για παράδειγμα την Θεωρία Συνόλων. Μέχρι τότε τα Μαθηματικά βασιζόταν στις έννοιες του αριθμού και της ευθείας γραμμής. Με την σύγχρονη εποχή εισάγεται η έννοια του συνόλου (συλλογή διαφόρων πεπερασμένων ή μη ανεξάρτητα από τη φύση τους αντικειμένων), που δεν άργησε να 'εισβάλει' σε διάφορους κλάδους των Μαθηματικών π.χ. στη θεωρία συνεχών συναρτήσεων. Έτσι μιλάμε για «το σύνολο» των τιμών που λαβαίνει μια μεταβλητή ή για «το σύνολο» των τιμών που λαβαίνει η συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση γίνεται μια αντιστοιχία μεταξύ αυτών των συνόλων. Η μελέτη των συναρτήσεων χρειάζεται τη Θεωρία Συνόλων η οποία περιλαμβάνει «την άλγεβρα των συνόλων» και τη μελέτη της αλγεβρικής δομής του συνόλου. Στις αρχές της δεκαετίας του 30 μια ολιγομελής ομάδα από ιδιοφυείς γάλλους μαθηματικούς *H. Cartan*, *A. Weil, J. Dieudonne, J. Delsatre, C. Chevalley* με την επωνυμία Νικόλαος Βούρβαχης αποφάσισαν να 'επαναλάβουν' για τα νεώτερα Μαθηματικά ό,τι έκανε ο Ευκλείδης στην εποχή του. Η συλλογική σειρά των βιβλίων με κεντρικό τίτλο «*Στοιχεία Μαθηματικής*», οι έρευνες και το ονομαστό σεμινάριο, σημαδεύουν την εξέλιξη της επιστήμης από το 1940 ως το 1970. Το τρίπτυχο πάνω στο οποίο στηρίχθηκε η όλη μαθηματική θεώρηση του *Bourbaki* ήταν: Η ενότητα των Μαθηματικών, η αξιωματική μέθοδος και οι δομές.

Ένα άλλο θέμα είναι το μέτρο των συνόλων, πρόβλημα στενά συνδεδεμένο με την ολοκλήρωση, που θα δώσει καινούργιο ορισμό για το ορισμένο ολοκλήρωμα (ολοκλήρωμα *Lebesgue*). Με τη θεωρία Συνόλων περάσαμε στους αφηρημένους χώρους του *Fréchet* (1906), όπου αρκεί να ορισθούν κάποια στοιχεία (π.χ. συναρτήσεις) ως σημεία του χώρου. Η έννοια αυτή βοήθησε στην ανάπτυξη της θεωρίας τελεστών.

Ο 20^{ος} αι. είναι ο χρυσός αιώνας για τα Μαθηματικά αφού λύθηκαν αρκετά ανοιχτά προβλήματα [το τελευταίο θεώρημα του *Fermat*, το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, η υπόθεση του *Mordell*] χάρις στην χρήση εργαλείων από διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών και αναπτύχθηκαν καινούργιες θεωρίες όπως π.χ. η θεωρία των *solitons* (μη-γραμμικά κύματα που επιδεικνύουν μια εξαιρετικά μη αναμενόμενη και ενδιαφέρουσα συμπεριφορά).

Τον 21^{ο} αι. πολλά ανοιχτά προβλήματα[1] (η υπόθεση του *Riemann*, η εικασία του *Poincaré*, κατανομή σημείων σε 2-σφαίρα, το 16^{ο} πρόβλημα του *Hilbert*, οι εξισώσεις *Navier-Stokes*, η ιακωβιανή εικασία κ.α.) περιμένουν τη λύση τους.

Εδώ και 25 αιώνες, οι μαθηματικοί συνεχίζουν να διαλογίζονται, να δημιουργούν, να θεμελιώνουν θεωρίες και να γίνονται σοφότεροι από τα λάθη τους, χωρίς κανένα προμήνυμα ή διάθεση μεταστροφής αυτής της κατάστασης. Χαρακτηριστικός είναι ο αφορισμός του *H. Weyl*:

«*Το πρόβλημα της τελικής θεμελίωσης ή του τελικού νοήματος των Μαθηματικών παραμένει ανοιχτό, δεν ξέρουμε από ποια κατεύθυνση θα παρουσιασθεί η τελική λύση ή αν ακόμα μπορούμε να περιμένουμε μια αντικειμενική απάντηση. Η «μαθηματικοποίηση» μπορεί να είναι μια εξ' ίσου ανθρώπινη δημιουργική δραστηριότητα, όπως η γλώσσα και η μουσική, στοιχειώδους πρωτοτυπίας, που οι ιστορικές αποφάσεις της αψηφούν εντελώς τον αντικειμενικό ορθολογισμό*».

Αν ένας μη μαθηματικός αναρωτηθεί για την αιτία αυτής της επίπονης προαιώνιας προσπάθειας για την αναζήτηση της αληθείας νομίζουμε πως η απάντηση του Jacobi πως όλα αυτά «*έχουν ως μοναδικό στόχο τη δόξα του ανθρώπινου πνεύματος*»[2] παραμένει διαχρονική. ◆

[1] Σε κάποιο άλλο άρθρο θα παρουσιασθούν τα ανοιχτά προβλήματα του 21^{ου} αι.

[2] Απόσπασμα γράμματος του G. Jacobi προς τον A.L. Legendre (1830).

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗΚΕ ΠΡΩΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕ 4.000.000 ΨΗΦΙΑ

Ο 20-χρονος καναδός *Michael Cameron* προσδιόρισε το μεγαλύτερο, μέχρι σήμερα, πρώτο αριθμό, δηλαδή αριθμό που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και τον 1. Ο υπολογιστής του (με 800 Megahertz) χρειάστηκε 45 ημέρες για να διαπιστώσει ότι ο αριθμός $2^{13.466.917}-1$ είναι πρώτος και να αντικαταστήσει τον μέχρι σήμερα μεγαλύτερο πρώτο αριθμό, ο οποίος είχε δύο εκατομμύρια ψηφία. Ο αριθμός αυτός είναι ο 39^{ος} αριθμός, της μορφής 2^x-1, οι οποίοι ονομάζονται αριθμοί *Mersenne*. Ο *Marin Mersenne* (1588-1648) ήταν καθολικός μοναχός και μαθηματικός.

Σημείωση: Το Ίδρυμα *Electronic Frontier Foundation* έχει αθλοθετήσει αμοιβή 100.000$ για τον προσδιορισμό πρώτου αριθμού με 10.000.000 ψηφία. [www.mersenne.org/].

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ MORLEY

Του **Γεωργίου Στάμου**, Μαθηματικού, Καθηγητή Α.Π.Θ.

Ένα από τα πιο ωραία θεωρήματα της στοιχειώδους Γεωμετρίας, το οποίο αναφέρεται σε μία ιδιότητα ενός τυχόντος τριγώνου, οφείλεται στον Αμερικανό μαθηματικό Frank Morley (1860-1937) και είναι γνωστό σήμερα με το όνομά του. Το θεώρημα αυτό, άγνωστο ίσως σε πολλούς μαθηματικούς, ανακαλύφθηκε περί το 1899, οι πρώτες όμως αποδείξεις δημοσιεύθηκαν μόλις το 1908. Σήμερα μας είναι γνωστές πολλές αποδείξεις αυτού του θεωρήματος, αποδείξεις γεωμετρικές, τριγωνομετρικές ή αποδείξεις που έγιναν με τη χρήση μιγαδικών αριθμών. Λόγω της σπουδαιότητας του θεωρήματος, θα παραθέσουμε στο παρόν άρθρο δύο από τις πιο ενδιαφέρουσες αποδείξεις, μία γεωμετρική και μία τριγωνομετρική (βλ. [1]). Το θεώρημα του Morley έχει ως εξής:

Θεωρούμε τις τριχοτόμους των γωνιών ενός τυχόντος τριγώνου. Αν P, Q, R είναι τα σημεία τομής των ζευγών των τριχοτόμων που πρόσκεινται σε κάθε πλευρά του τριγώνου, τότε το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο (τρίγωνο του Morley).

1. Απόδειξη γεωμετρική

Τις γωνίες ενός τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζουμε με 3α, 3β και 3γ. Θα ισχύει προφανώς

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

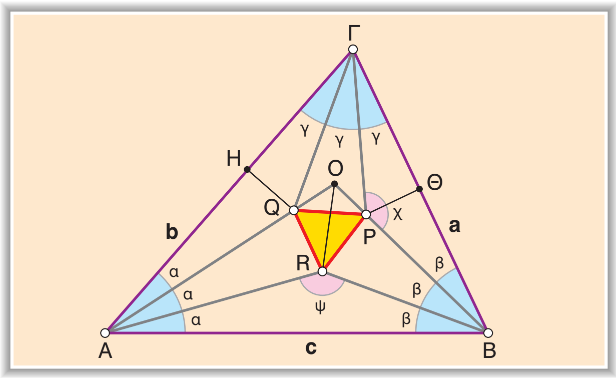
Θεωρούμε τα τρίγωνα ABR και ABO, των οποίων οι γωνίες που αντιστοιχούν στις κορυφές A, B είναι αντιστοίχως α, β για το πρώτο και 2α, 2β για το δεύτερο και των οποίων οι κορυφές R, O βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Δεδομένου ότι η OR είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AOB}$ (το R είναι σημείο τομής των διχοτόμων του ABO), θα ισχύει

$$A\widehat{O}R = B\widehat{O}R = \frac{\pi}{6} + \gamma.$$

Επί της OB θεωρούμε το σημείο P και επί της OA το σημείο Q, έτσι ώστε να έχουμε

$$O\widehat{R}P = O\widehat{R}Q = \frac{\pi}{6}.$$

Από την ισότητα των τριγώνων ORP και ORQ (μία κοινή πλευρά και ίσες προσκείμενες γωνίες) προκύπτει τότε $RP = RQ$· επειδή δε $Q\widehat{R}P = \frac{\pi}{3}$, το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο. Θα δείξουμε ότι το τρίγωνο αυτό είναι το τρίγωνο του Morley.



Ας είναι H το συμμετρικό του σημείου R ως προς την OA και Θ το συμμετρικό του ίδιου σημείου ως προς την OB. Προφανώς ισχύει $HQ = QP = P\Theta$. Θα δείξουμε την ισότητα

$$H\widehat{Q}P = \Theta\widehat{P}Q = 2\bar{\gamma},$$

όπου $2\bar{\gamma}$ είναι η παραπληρωματική γωνία της 2γ. Η γωνία $\widehat{RPB}$, ως εξωτερική του τριγώνου ORP, ισούται με $\frac{\pi}{6} + \gamma + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \gamma$. Επομένως έχουμε

$$\Theta\widehat{P}Q = 2\pi - \frac{\pi}{3} - 2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) = \pi - 2\gamma = 2\bar{\gamma}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ισότητα $H\widehat{Q}P = 2\bar{\gamma}$. Από την ισότητα των τριγώνων HQP και QPΘ προκύπτει ότι $P\widehat{H}Q = P\widehat{\Theta}Q$. Άρα το τετράπλευρο HQPΘ είναι εγγράψιμο σε έναν κύκλο C.

Επειδή τώρα οι χορδές HP και ΘQ του κύκλου C είναι χορδές εγγεγραμμένης γωνίας 2γ (ή $2\bar{\gamma}$) και επειδή $HQ = QP = P\Theta$, προκύπτει ότι κάθε χορδή HQ, QP, PΘ είναι χορδή εγγεγραμμένης γωνίας γ. Επομένως η HΘ είναι χορδή εγγεγραμμένης γωνίας 3γ. Εξάλλου έχουμε $H\widehat{\Gamma}\Theta = 3\gamma$. Άρα η κορυφή Γ ανήκει στον κύκλο C. Τότε όμως θα έχουμε

$$H\widehat{\Gamma}Q = Q\widehat{\Gamma}P = P\widehat{\Gamma}\Theta = \gamma,$$

και επομένως πράγματι το PQR είναι το τρίγωνο του Morley.

11. Απόδειξη τριγωνομετρική

Η απόδειξη αυτή στηρίζεται ουσιαστικά στους ακόλουθους τύπους:

$$\sin 3\varphi = 4\sin\varphi \sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right), \qquad (1)$$

$$\sin^2\Gamma = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos\Gamma, \qquad (2)$$

όπου φ είναι τυχούσα γωνία και Α, Β, Γ οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη του τύπου (1): Ισχύει

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = 4\sin\varphi\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\varphi\right]$$

$$= 4\sin\varphi\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\varphi\right)$$

$$= 4\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right). \qquad (3)$$

Απόδειξη του τύπου (2): Αν d είναι η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, οι πλευρές αυτού θα είναι ίσες με

$a = d\sin 3\alpha$, $b = d\sin 3\beta$, $c = d\sin 3\gamma$ (νόμος ημιτόνων).

Από το θεώρημα των συνημιτόνων προκύπτει τότε άμεσα η σχέση (2).

Η τριγωνομετρική απόδειξη του θεωρήματος του Morley γίνεται ως εξής: Θέτουμε $\widehat{BP\Gamma} = \chi$ και $\widehat{ARB} = \psi$. Λόγω των σχέσεων

$$\chi + \beta + \gamma = \pi,\ \psi + \alpha + \beta = \pi \text{ και } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3},$$

θα έχουμε

$$\sin\chi = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right),\quad \sin\psi = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right). \qquad (4)$$

Αν εφαρμόσουμε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΒΡΓ, θα λάβουμε τη σχέση

$$BP = \frac{a}{\sin\chi}\sin\gamma = \frac{d\sin 3\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\sin\gamma, \qquad (5)$$

από την οποία, λόγω του τύπου (1), θα προκύψει

$$BP = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right). \qquad (6)$$

Θεωρώντας το τρίγωνο ARB, θα προκύψει ανάλογα

$$BR = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right). \qquad (7)$$

Εφαρμογή του θεωρήματος των συνημιτόνων στο τρίγωνο BRP θα μας δώσει τη σχέση

$$RP^2 = BR^2 + BP^2 - 2BR\cdot BP\cos\beta$$

$$= 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \right.$$

$$\left. -2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\beta\right]. \qquad (8)$$

Επειδή όμως οι $\frac{\pi}{3}+\gamma$, $\frac{\pi}{3}+\alpha$, β είναι γωνίες τριγώνου, η εντός της αγγύλης στη σχέση (8) παράσταση θα ισούται με $\sin^2\beta$, λόγω του τύπου (2). Επομένως έχουμε

$$RP = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 4d\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{\Gamma}{3}. \qquad (9)$$

Το ίδιο μήκος θα προκύψει και για τις πλευρές PQ και QR, οπότε πράγματι το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο.

Η απόδειξη αυτή μας δίνει κάτι περισσότερο από τη γεωμετρική απόδειξη: το μήκος της πλευράς του τριγώνου Morley (βλ. σχέση (9)).

Παρατηρήσεις:

1. Όταν στην εκφώνηση του θεωρήματος λέμε «θεωρούμε τις τριχοτόμους των γωνιών ενός τυχόντος τριγώνου», εννοούμε την κατασκευή αυτών με οποιοδήποτε *δυνατό* τρόπο.
2. Με το θεώρημα του Morley ασχολήθηκαν πολλοί μαθηματικοί και η σχετική βιβλιογραφία είναι αρκετά πλούσια (βλ. π.χ. [3]). Εκτός από τις διάφορες αποδείξεις, έχουν γίνει και επεκτάσεις του θεωρήματος. Μία κινηματική διάσταση του θεωρήματος Morley δόθηκε από τον A. Köbinger στη Διδακτορική Διατριβή του [2]. Τέλος, μελέτη του θεωρήματος αυτού στο πλαίσιο της ισότροπης Γεωμετρίας έγινε από τον W. Vetter [4].

Βιβλιογραφία

1. H. Dörrie: *Mathematische Miniaturen*. Ferdinand-Hirtin-Breslau, 1943.
2. A. Köbinger: *Kinematische Untersuchungen zum Satz von Morley*. Diss TU München, 1988.
3. C.O. Oakley and J.C. Baker: *The Morley trisector theorem*. Amer. Math. Monthly **85** (1978), 737-745.
4. W. Vetter: *Zum Analogon des Satzes von Morley in der isotropen Geometrie*. MNU **34** (1981), 330-333.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

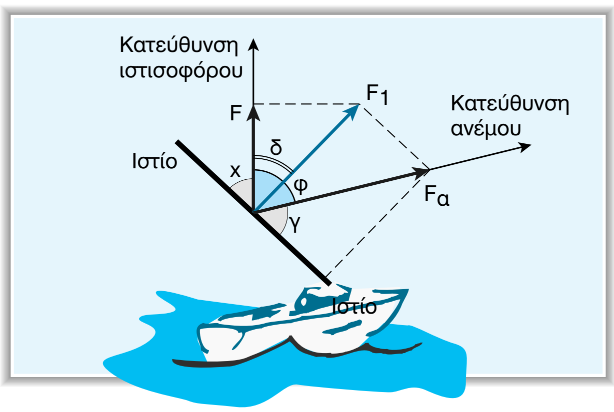
(... ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΙΣΤΙΟΠΛΟΟΥΣ ΜΑΣ ΣΤΗΝ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΤΟΥ 2004)

Του **Ανδρέα Σβέρκου,** Μαθηματικού
Μ.Δ.Ε. (Master) του ΕΜΠ

Η κατεύθυνση ενός ιστιοφόρου σχηματίζει με την κατεύθυνση του ανέμου γωνία φ, όπου $0 \le \varphi \le \pi$. Πώς πρέπει να τοποθετηθεί το ιστίο (πανί) ώστε να πετύχουμε τη μέγιστη εκμετάλλευση της ενέργειας του ανέμου;

Λύση

Έστω x η γωνία μεταξύ του ιστίου και της κατεύθυνσης του ιστιοφόρου, με $0 < x \le \pi/2$. Η γωνία αυτή πρέπει να επιλεγεί με τέτοιον τρόπο ώστε να έχουμε τη μέγιστη εκμετάλλευση της ενέργειας του αέρα.



Από τη δύναμη F_α του αέρα μόνο η συνιστώσα F_1 χρησιμοποιείται, η οποία δρα καθέτως στο ιστίο.

Αν γ είναι η γωνία μεταξύ της δύναμης του ανέμου και του ιστίου, τότε έχουμε $\gamma = \pi - (x + \varphi)$.

Έχουμε

$$F_1 = F_\alpha \eta\mu\gamma = F_\alpha \eta\mu[\pi - (x + \varphi)] = F_\alpha \eta\mu(x + \varphi) \quad (1)$$

Από τη δύναμη F_1 εξετάζουμε μόνο εκείνη τη συνιστώσα της F της οποίας η κατεύθυνση συμπίπτει με την κατεύθυνση του ιστιοφόρου και προωθεί προς τα εμπρός την κίνησή του.

Η γωνία δ μεταξύ της F_1 και της F είναι $\delta = \frac{\pi}{2} - x$. Επομένως

$$F = F_1 \sigma\upsilon\nu\delta = F_1 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = F_1 \eta\mu x \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$F = f(x) = F_\alpha \eta\mu x \cdot \eta\mu(x + \varphi), \quad 0 < x \le \pi/2$$

Για τη συνάρτηση f λοιπόν αναζητούμε το μέγιστο στο διάστημα $(0, \pi/2]$.

- Αν $\varphi = 0$, δηλαδή στην περίπτωση που η κατεύθυνση του ιστιοφόρου συμπίπτει με την κατεύθυνση του ανέμου, έχουμε

$$f(x) = F_\alpha \eta\mu^2 x, \quad 0 < x \le \pi/2$$

που παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \pi/2$, το $F = F_\alpha$. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ολόκληρη η ενέργεια του ανέμου.

- Αν $0 < \varphi < \pi$, τότε έχουμε

$$f'(x) = F_\alpha[\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu(x + \varphi) + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(x + \varphi)] = F_\alpha \eta\mu(2x + \varphi)$$

Επομένως

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \text{ αφού } 0 < 2x + \varphi < 2\pi$$

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	μεγ.	↘	

Από τον πίνακα μεταβολών της f βλέπουμε ότι για $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ έχουμε ολικό μέγιστο ίσο με

$$F = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = F_\alpha \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μέγιστο της f παρουσιάζεται όταν $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$, δηλαδή όταν $x + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή όταν το ιστίο είναι κάθετο στη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν η κατεύθυνση του ιστιοφόρου με την κατεύθυνση του ανέμου.

Παρατήρηση

Φυσικά το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο με την προϋπόθεση ότι το ιστίο είναι αλύγιστο, που δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Επομένως η παραπάνω λύση είναι προσεγγιστική.

Τα Μαθηματικά αξίζουν αφ' εαυτού, αφού καλλιεργούν το πνεύμα, ενεργοποιούν την ενόραση, αναπτύσσουν τη διαίσθηση και συμβάλλουν στη λογική καλλιέργεια του ανθρώπου, στοιχεία που τον καθιστούν ικανό να κατανοεί δύσκολες καταστάσεις και όχι μόνο μαθηματικές, όπως να βγάζει σωστά συμπεράσματα από μια πολιτική συζήτηση.

Η θέση αυτή μπορεί να επιβεβαιωθεί από τον παρακάτω κατάλογο πνευματικών διεργασιών που έχουν άμεση σχέση με Μαθηματικά:

αναλύω	*εντάσσω*	*κατατάσσω*	*συνδυάζω*
απαριθμώ	*εξειδικεύω*	*μαθηματικοποιώ*	*συνθέτω*
απλοποιώ	*εξιδανικεύω*	*μετασχηματίζω*	*σχηματοποιώ*
γενικεύω	*ερμηνεύω*	*παρουσιάζω*	*τακτοποιώ*
διαφοροποιώ	*θεμελιώνω*	*προτυποποιώ*	*τυποποιώ*
δομώ	*κάνω αφαίρεση*	*συγκρίνω*	

Μας ρωτάνε — Εσείς προσπαθήστε να απαντήσετε

Ο Καθηγητής της Μαθηματικής Αναλύσεως του Πανεπιστημίου Αιγαίου κ. Ν. Χατζησάββας μας έστειλε την παρακάτω άσκηση, της οποίας το πρώτο ερώτημα υπάρχει σε πολλά βιβλία. Ο κ. Χατζησάββας επεκτείνει την άσκηση με τα ερωτήματα (ii) και (iii) και θέτει το πρόβλημα στους αναγνώστες των *Εκπαιδευτικών Προβληματισμών*.

Δίνεται η αμφιμονοσήμαντη και επί,συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) + f^{-1}(x) = x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιττή.

ii) Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής.

iii) Να εξετάσετε αν μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει.

Εσείς ρωτάτε — Εμείς προσπαθούμε ν' απαντήσουμε

Στο σχολικό βιβλίο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής Κατεύθυνσης», Γ' Ενιαίου Λυκείου στην άσκηση 11 (σελ. 241)

Απαντάει ο Γ. Παντελίδης, Καθηγητής Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \quad \text{για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

i) Να βρείτε την f′(0)

ii) ...

Στο επίσημο βιβλίο λύσεων υπολογίζεται η παράγωγος

$$(*) \qquad F'(x) = f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu x$$

της συναρτήσεως $F(x)=f(\eta\mu x)$, ως σύνθεση δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της ημx και της f, από την οποία για $x=0$ παίρνουμε $f'(0)=1$.

Ερώτηση: Αν στην ισότητα (*), όπως κάναμε και πιο πάνω, θέσουμε $x=-\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε:

$$(**) \qquad F'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f'(-1)\cdot 0 = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot 0 - e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot(-1) \Rightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

και

$$(***) \qquad F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'(1)\cdot 0 = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 0 - e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 1 \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Τι συμβαίνει;

Απάντηση: Στα δεδομένα της ασκήσεως έπρεπε να αναφερθεί το διάστημα όπου η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη, ώστε από τη σύνθεση των συναρτήσεων να προκύψει και το διάστημα όπου η F(x) είναι παραγωγίσιμη. Όπως διατυπώθηκε η άσκηση, η f έχει τη μορφή

$$f(y) = e^{\tau o\xi\eta\mu y}\sqrt{1-y^2}, \quad y\in[-1,1]$$

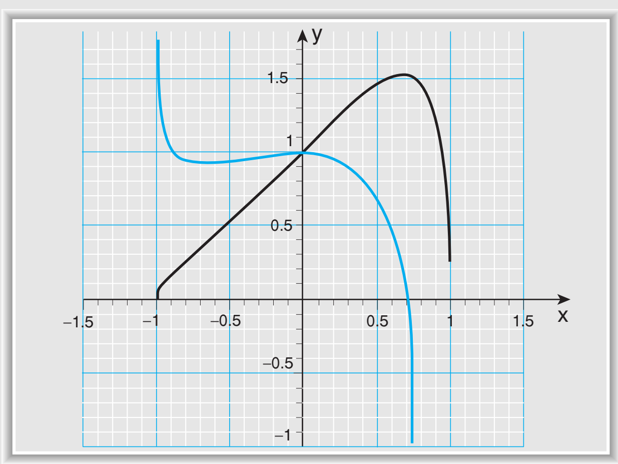
(**Σημείωση:** Θέτουμε στην (*) όπου $\eta\mu x = y$ και $x = \tau o\xi\eta\mu y$) η οποία είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (–1, 1). Στα σημεία $y=-1$ και $y=1$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό, δηλαδή να υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{y\to -1^+}\frac{f(y)-f(-1)}{y-(-1)} = \lim_{y\to -1^+}\frac{e^{\tau o\xi\eta\mu y}\sqrt{1-y^2}}{y+1} = \lim_{y\to -1^+} e^{\tau o\xi\eta\mu y}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

και

$$\lim_{y\to 1^-}\frac{f(y)-f(1)}{y-1} = \lim_{y\to 1^-}\frac{e^{\tau o\xi\eta\mu y}\sqrt{1-y^2}}{y-1} = -\lim_{y\to 1^-} e^{\tau o\xi\eta\mu y}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}},$$

που είναι $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα (βλ. σχήμα), το οποίο σημαίνει ότι η f(y) δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά. Επομένως η ισότητα (*) δεν ισχύει για τα σημεία $x=-\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{\pi}{2}$, που αντιστοιχούν στα σημεία $y=-1$ και $y=1$.



ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ για τη ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ του ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ στη Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Του **Γιάννη Χ. Θωμαΐδη,** Καθηγητή Μ.Ε.
Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Από το 1998, που έγινε η μεταφορά της διδασκαλίας του Διανυσματικού Λογισμού στη Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση της Β′ Λυκείου, οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου προς τους καθηγητές των Μαθηματικών στο συγκεκριμένο κεφάλαιο κλείνουν κάθε χρόνο με την εξής παρατήρηση:

> Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι όπως έχει αποδείξει η διδακτική πράξη, το κεφάλαιο των διανυσμάτων είναι μια ενότητα το περιεχόμενο της οποίας δύσκολα αφομοιώνουν οι μαθητές. Γι αυτό απαιτείται εποπτική παρουσίαση των εννοιών και προσπάθεια ενεργού συμμετοχής των μαθητών [1].

Η δυσκολία αφομοίωσης του Διανυσματικού Λογισμού, η οποία επιβεβαιώνεται και από σχετικές έρευνες [2], οφείλεται κατά βάση στον τρόπο με τον οποίο εισάγεται η έννοια του διανύσματος, δηλαδή ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Οι πράξεις των διανυσμάτων, οι οποίες διαφοροποιούνται ουσιαστικά από τις αντίστοιχες πράξεις με θετικούς αριθμούς ή ευθύγραμμα τμήματα, έρχονται σε σύγκρουση με προϋπάρχουσες και εδραιωμένες γνώσεις των μαθητών. Η αναγκαστική, για λόγους οικονομίας, χρησιμοποίηση της ίδιας ορολογίας και συμβολισμού των πράξεων καθιστά σχεδόν αναπόφευκτο το γεγονός ότι, για πολλούς μαθητές, αυτό που γνωρίζουν (ιδιαίτερα οι πράξεις με ευθύγραμμα τμήματα) θα λειτουργήσει ως εμπόδιο στην προσπάθεια κατανόησης του Διανυσματικού Λογισμού [3].

Χρειάζεται λοιπόν να καταβληθεί από το διδάσκοντα μεγάλη προσπάθεια ώστε να αντιληφθούν έγκαιρα οι μαθητές την ιδιαίτερη φύση του διανύσματος και των προβλημάτων που επιλύει αυτή η έννοια. Πριν από όλα, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τη θεμελιώδη διαφορά ανάμεσα σε μια **απόσταση** (που εκφράζεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα) και μια **μετατόπιση** (που εκφράζεται με ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα - διάνυσμα). Για να πραγματοποιήσουν όμως αυτό το βήμα χρειάζεται να "παίξουν" με την ανάλυση, σύνθεση και σύγκριση μετατοπίσεων πάνω σε συγκεκριμένα σχήματα.

Στο διδακτικό αυτό ζήτημα προσφέρει μάλλον κακή υπηρεσία η συνήθης πρακτική να ζητείται από τα πρώτα μαθήματα η απόδειξη γνωστών γεωμετρικών προτάσεων με τη βοήθεια διανυσμάτων. Ο Διανυσματικός Λογισμός αποτελεί ένα ισχυρό αναλυτικό εργαλείο επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων, αλλά η πρόωρη χρήση του μπορεί να επιτείνει τη σύγχιση των μαθητών γύρω από την έννοια του διανύσματος και τις αντίστοιχες πράξεις.

Αντίθετα, μπορεί να βοηθήσει εξαιρετικά τους μαθητές η επισήμανση ότι βασικές έννοιες και προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποκτούν τελείως διαφορετικό νόημα μέσα στο πλαίσιο του Διανυσματικού Λογισμού. Τα επόμενα παραδείγματα είναι ενδεικτικά:

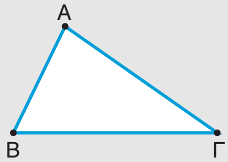
- Η έννοια της περιμέτρου ενός τριγώνου ΑΒΓ υποδηλώνει μια πρόσθεση τριών ευθυγράμμων τμημάτων (των πλευρών του τριγώνου), το αποτέλεσμα της

1. Βλ. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο: *Ενιαίο Λύκειο. Οδηγίες για τον καθηγητή Μαθηματικών.* Αθήνα, 1998, σ.23. Επίσης: *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002 - 2003.* Τεύχος Β’ Μαθηματικά. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β. 2002, σ.145.

2. Βλ. π.χ. Γαγάτσης, Α. & Δημητριάδου, Ε.: Η αντιπαράθεση της Ευκλείδειας και διανυσματικής μεθόδου στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων - Μια εμπειρική έρευνα σε μαθητές Γ’ Λυκείου. Περιέχεται στα *Πρακτικά του 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Μυτιλήνη: Ε.Μ.Ε. 1997, σσ.389 - 399.

3. Είναι χαρακτηριστικό ότι η ιδιομορφία των διανυσματικών πράξεων αποτελεί το σημείο εκκίνησης για την εισαγωγή των διανυσμάτων σε πολλά γνωστά βιβλία. Για παράδειγμα οι L. Bostock και S. Chandler, στο βιβλίο τους *Pure Mathematics 1*, Cheltenham: Thornes 1983, σ.467, ανοίγουν το σχετικό κεφάλαιο με την εξής ενδιαφέρουσα παρατήρηση: "Readers will by now appreciate that two and two do not always make four". (Οι αναγνώστες θα διαπιστώσουν τώρα ότι δύο και δύο δεν κάνουν πάντοτε τέσσερα).

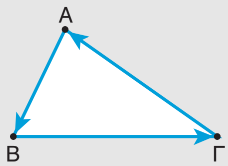
οποίας είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που εκφράζει τη συνένωση τους και έχει ως μήκος ένα θετικό πραγματικό αριθμό, ίσο με το άθροισμα των μηκών των τριών πλευρών. Πρόκειται λοιπόν, ουσιαστικά, για ένα άθροισμα **αποστάσεων**. Ταυτίζοντας, καταχρηστικά και για λόγους οικονομίας, την έννοια ενός ευθύγραμμου τμήματος με το αντίστοιχο μήκος γράφουμε το αποτέλεσμα αυτό ως εξής:



Η περίμετρος του τριγώνου: ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=2τ

$$AB + B\Gamma + \Gamma A = 2\tau.$$

Αν όμως θεωρήσουμε τις πλευρές του τριγώνου ως διανύσματα, τότε η “περίμετρος” γίνεται μια "περιφορά" του τριγώνου που υποδηλώνει τη σύνθεση τριών **διαδοχικών μετατοπίσεων**. Το αποτέλεσμα αυτής της σύνθεσης είναι ένα διάνυσμα που εκφράζει τη συνολική μετατόπιση από την αρχική στην τελική θέση (που είναι εδώ το ίδιο σημείο). Το αποτέλεσμα αυτό το γράφουμε ως εξής:



Η “περιφορά” του τριγώνου: $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{O}$

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}.$$

Χρήσιμο είναι επίσης στο σημείο αυτό να αναφερθούν οι ισότητες:

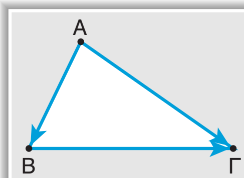
$$\left|\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}\right| = 0$$

$$\left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{B\Gamma}\right| + \left|\vec{\Gamma A}\right| = 2\tau$$

- Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η γνωστή τριγωνική **ανισότητα** της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία εκφράζει μια προφανή σχέση αποστάσεων (ο συντομότερος δρόμος μεταξύ των σημείων Α και Γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ):

$$A\Gamma < AB + B\Gamma$$

Η ανισότητα αυτή μετασχηματίζεται σε **ισότητα** του Διανυσματικού Λογισμού, η οποία εκφράζει μια επίσης προφανή σχέση μετατοπίσεων (η μετατόπιση από το Α στο Γ ισοδυναμεί με τη διαδοχική εκτέλεση των μετατοπίσεων από το Α στο Β και από το Β στο Γ):



Η σύνθετη μετατοπίσεων: $\vec{A\Gamma}=\vec{AB}+\vec{B\Gamma}$

$$\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}$$

Από τη σύγκριση της διανυσματικής ισότητας με τη γεωμετρική ανισότητα προκύπτει αμέσως η θεμελιώδης τριγωνική ανισότητα του Διανυσματικού Λογισμού, που δείχνει τη σχέση ανάμεσα στο μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων και το άθροισμα των μέτρων τους:

$$\left|\vec{AB}+\vec{B\Gamma}\right| \leq \left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{B\Gamma}\right|. \qquad (1)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε επίσης μια άλλη μορφή της τριγωνικής ανισότητας, που δείχνει τη σχέση ανάμεσα στο μέτρο της διαφοράς δύο διανυσμάτων και τη διαφορά των μέτρων τους:

$$\left|\vec{A\Gamma}-\vec{AB}\right| \geq \left|\left|\vec{A\Gamma}\right| - \left|\vec{AB}\right|\right| \qquad (2)$$

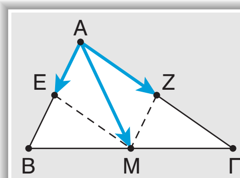
(Η ισότητα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει όταν τα διανύσματα είναι ομόρροπα)

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μπορούν, υπό μορφή εφαρμογών ή ασκήσεων, να επεκταθούν σε πολύ ενδιαφέρουσες συγκρίσεις και γενικεύσεις.

Για παράδειγμα, αν ΑΜ είναι η διάμεσος ενός τριγώνου ΑΒΓ τότε η βασική διανυσματική ισότητα

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma} \qquad (3)$$

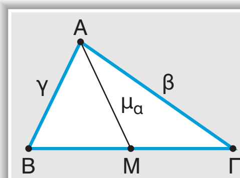
μας πληροφορεί ουσιαστικά ότι η μετατόπιση από το Α προς το μέσο Μ της ΒΓ ισοδυναμεί με το άθροισμα της μετατόπισης από το Α προς το μέσο Ε της ΑΒ και της μετατόπισης από το Α προς το μέσο Ζ της ΑΓ. “Παίζοντας” με την ανάλυση και σύνθεση μετατοπίσεων (και όχι αναζητώντας υποχρεωτικά τη πιο σύντομη απόδειξη!), διαπιστώνουμε πράγματι, με τη βοήθεια του παραλληλογράμμου ΑΕΜΖ, ότι ισχύει:



$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}=$
$=\vec{AE}+\vec{AZ}$

$$\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AZ}$$

Αν λάβουμε υπόψη την τριγωνική ανισότητα (1) του Διανυσματικού Λογισμού, τότε από τη διανυσματική ισότητα (3) προκύπτει αμέσως η γνωστή ανισοτική σχέση για τη διάμεσο ενός τριγώνου:



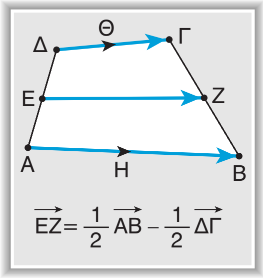
$\mu_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$

$$\mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Η σύγκριση της διανυσματικής ισότητας με την αντίστοιχη γεωμετρική ανισότητα δείχνει με χαρακτηριστικό τρόπο τη θεμελιώδη διαφορά ανάμεσα σε απόσταση και μετατόπιση που πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές.

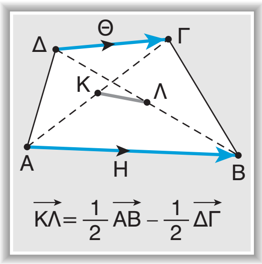
Μια άσκηση που σχετίζεται στενά με το προηγούμενο θέμα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη διδασκαλία είναι η εξής:

Αν ΑΒΓΔ είναι ένα κυρτό τετράπλευρο, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ, τότε ισχύουν οι διανυσματικές ισότητες:



$$\vec{EZ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{\Delta\Gamma} \quad (4)$$

$$\vec{K\Lambda} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{\Delta\Gamma} \quad (5)$$



Η (4) μεταφέρει την πληροφορία ότι η μετατόπιση από το Ε προς το Ζ ισοδυναμεί με το άθροισμα της μετατόπισης από το Α προς το μέσο Η του ΑΒ και της μετατόπισης από το Δ προς το μέσο Θ του ΔΓ. Αντίστοιχα η (5), ότι η μετατόπιση από το Κ προς το Λ ισοδυναμεί με τη διαφορά των δύο αυτών μετατοπίσεων.

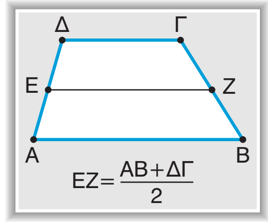
Μπορούμε να "παίξουμε" και εδώ με την ανάλυση και σύνθεση μετατοπίσεων, χρησιμοποιώντας αντίστοιχα τα παραλληλόγραμμα ΕΘΖΗ και ΚΘΛΗ που έχουν το ίδιο κέντρο, αλλά είναι ίσως προτιμότερο να αξιοποιήσουμε προηγούμενα αποτελέσματα και να δώσουμε αποδείξεις χρησιμοποιώντας τη βασική διανυσματική ισότητα (3), για τις διαμέσους ΕΖ και ΚΛ των τριγώνων ΕΒΓ και ΚΒΔ αντίστοιχα.

Αν λάβουμε υπόψη τις τριγωνικές ανισότητες (1) και (2) του Διανυσματικού Λογισμού, τότε από τις ισότητες (4) και (5) προκύπτει ότι για τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα μέσα δύο πλευρών και των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ισχύουν αντίστοιχα οι ανισοτικές σχέσεις:

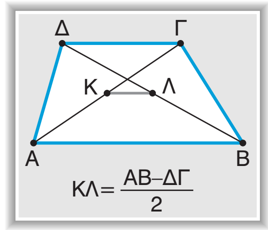
$$EZ \le \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} \quad \text{και} \quad K\Lambda \ge \frac{|AB - \Delta\Gamma|}{2}$$

Φτάσαμε λοιπόν από τις διανυσματικές ισότητες (4) και (5) σε δύο γεωμετρικές ανισότητες για το κυρτό τετράπλευρο[4], οι οποίες ισχύουν ως ισότητες στην περίπτωση του τραπεζίου και εκφράζουν δύο σημαντικές και γνωστές ιδιότητες αυτού του σχήματος:

- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών ενός τραπεζίου είναι ίσο με το ημιάθροισμα των βάσεων.



- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων.



Η σύγκριση των ισοτήτων αυτών, που ισχύουν μόνο στο τραπέζιο, με τις αντίστοιχες διανυσματικές ισότητες (4) και (5) που ισχύουν σε κάθε κυρτό τετράπλευρο, δείχνει πάλι με χαρακτηριστικό τρόπο τη διαφορετική φύση των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και του Διανυσματικού Λογισμού.

Μετά από αυτή την προπαρασκευή και την κατανόηση των πράξεων με διανύσματα, η διδασκαλία μπορεί να επικεντρωθεί στην επίλυση ορισμένων ενδιαφερόντων γεωμετρικών ασκήσεων και προβλημάτων, μέσα από τα οποία θα αναδειχθεί ο ιδιαίτερος χαρακτήρας των μεθόδων του Διανυσματικού Λογισμού σε σχέση με αυτές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Δίνουμε παρακάτω ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1ο Παράδειγμα

Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ θεωρούμε σημείο Ρ της πλευράς ΓΔ τέτοιο, ώστε $\Gamma P = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$ και ονομάζουμε Σ το σημείο τομής των ΒΡ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: α) ΒΡ⊥ΑΓ β) $A\Sigma = \frac{4}{5}A\Gamma$ και $B\Sigma = \frac{4}{5}BP$[5].

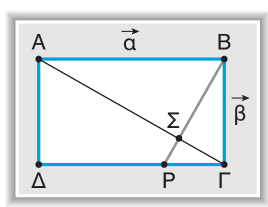
1ος τρόπος (με χρήση διανυσμάτων)

α) Αν θέσουμε $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$, τότε ισχύουν οι ισότητες:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$, $\quad |\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$,

$\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$,

$\vec{BP} = \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma P} = \vec{\beta} - \frac{1}{4}\vec{\alpha}$.



Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, έχουμε:

4. Για μια γεωμετρική απόδειξη αυτών των ανισοτήτων βλ. π.χ. Γ. Θωμαΐδη & Α. Πούλου: *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη 2000, σ.124.

5. Η άσκηση αυτή προτείνεται προς λύση στο βιβλίο του R.I. Porter: *A School Course in Vectors*. London: Bell & Hyman 1980, σ.31. Το ερώτημα (β) είναι δική μας προσθήκη.

$$\vec{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\vec{\mathrm{BP}} = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}-\frac{1}{4}\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\frac{1}{4}\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-\frac{1}{4}\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = -|\vec{\beta}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = 0$$

Άρα ισχύει $\vec{\mathrm{BP}}\perp\vec{\mathrm{A\Gamma}}$

β) Έστω ότι είναι $\vec{\mathrm{A\Sigma}} = x\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{B\Sigma}} = y\vec{\mathrm{BP}}$. Τότε έχουμε

$$\vec{\mathrm{A\Sigma}} = x(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = x\vec{\alpha} + x\vec{\beta}$$

$$\vec{\mathrm{B\Sigma}} = y\left(\vec{\beta}-\frac{1}{4}\vec{\alpha}\right) = y\vec{\beta}-\frac{y}{4}\vec{\alpha}$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες στην ισότητα $\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{B\Sigma}}+\vec{\mathrm{\Sigma A}}=\vec{0}$ έχουμε

$$\vec{\alpha} + y\vec{\beta} - \frac{y}{4}\vec{\alpha} - x\vec{\alpha} - x\vec{\beta} = \vec{0},$$

δηλαδή

$$\left(1-\frac{y}{4}-x\right)\vec{\alpha} + (y-x)\vec{\beta} = \vec{0}.$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά συμπεραίνουμε από την τελευταία ισότητα ότι ισχύει:

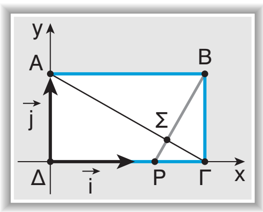
$$1-\frac{y}{4}-x = 0 \quad \text{και} \quad y-x = 0.$$

Από το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων βρίσκουμε ότι είναι $x = y = \frac{4}{5}$ και άρα ισχύει

$$\vec{\mathrm{A\Sigma}} = \frac{4}{5}\vec{\mathrm{A\Gamma}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathrm{B\Sigma}} = \frac{4}{5}\vec{\mathrm{BP}}.$$

2ος τρόπος (με χρήση συντεταγμένων)

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες του συγκεκριμένου σχήματος εισάγουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Δ, άξονα x'x την ευθεία ΔΓ με μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{\Delta\Gamma}$ και άξονα y'y την ευθεία ΔΑ με μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{j} = \vec{\Delta\mathrm{A}}$.



Οι συντεταγμένες των διαφόρων σημείων και διανυσμάτων στο σύστημα αυτό είναι:

$$\Delta(0,0),\ \mathrm{A}(0,1),\ \Gamma(2,0),\ \mathrm{B}(2,1),\ \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},0\right)$$

και $$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = (2,-1),\ \vec{\mathrm{BP}} = \left(-\frac{1}{2},-1\right).$$

α) Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$\vec{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\vec{\mathrm{BP}} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\cdot(-1) = 0,$$

δηλαδή $\vec{\mathrm{BP}}\perp\vec{\mathrm{A\Gamma}}$.

β) Αν είναι $\Sigma(x, y)$ τότε $\vec{\mathrm{A\Sigma}} = (x, y-1)$ και $\vec{\mathrm{B\Sigma}} = (x-2, y-1)$. Έστω ότι είναι $\vec{\mathrm{A\Sigma}} = \lambda\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{B\Sigma}} = \mu\vec{\mathrm{BP}}$. Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι

$$x = 2\lambda$$

$$y-1 = -\lambda \Leftrightarrow y = 1-\lambda$$

$$x-2 = -\frac{\mu}{2} \Leftrightarrow x = 2-\frac{\mu}{2}$$

$$y-1 = -\mu \Leftrightarrow y = 1-\mu$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη της 1ης-3ης και 2ης-4ης εξίσωσης αντίστοιχα, παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων $4\lambda+\mu=4$, $\lambda-\mu=0$ από το οποίο βρίσκουμε ότι $\lambda = \mu = \frac{4}{5}$. Άρα ισχύει

$$\vec{\mathrm{A\Sigma}} = \frac{4}{5}\vec{\mathrm{A\Gamma}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathrm{B\Sigma}} = \frac{4}{5}\vec{\mathrm{BP}}.$$

3ος τρόπος (με χρήση Ευκλείδειας Γεωμετρίας)

α) Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΡ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες και επομένως είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας 2). Από την ισότητα των γωνιών των δύο αυτών τριγώνων προκύπτει ότι στο τρίγωνο ΒΣΓ οι γωνίες με κορυφές τα Β, Γ είναι συμπληρωματικές και άρα η γωνία με κορυφή το Σ είναι ορθή. Επομένως ισχύει ΒΡ⊥ΑΓ.

β) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ΒΓ = α, ΑΒ = 2α, το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος βρίσκουμε ότι είναι

$$\mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{5},\ \mathrm{A\Sigma} = \frac{4\alpha\sqrt{5}}{5} \quad \text{και άρα ισχύει} \quad \mathrm{A\Sigma} = \frac{4}{5}\mathrm{A\Gamma}.$$

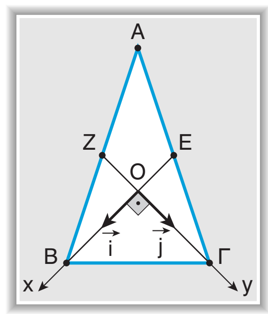
Ομοίως αποδεικνύεται και η σχέση $\mathrm{B\Sigma} = \frac{4}{5}\mathrm{BP}$. ▲

2ο Παράδειγμα

Ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) οι διάμεσοι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται κάθετα. Να υπολογίσετε τη γωνία Α[6].

1ος τρόπος (με χρήση συντεταγμένων)

Η ύπαρξη στο διπλανό σχήμα της ορθής γωνίας ΒΟΓ, η ισότητα των διαμέσων ΒΕ, ΓΖ και η ιδιότητα του βαρύκεντρου Ο επιτρέπουν να εισάγουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Ο, άξονα x'x την ευθεία ΟΒ με μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{\mathrm{OB}}$ και άξονα y'y την ευθεία ΟΓ με μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{\mathrm{O\Gamma}}$.



Οι συντεταγμένες των διαφόρων σημείων και διανυσμάτων στο σύστημα αυτό είναι:

$$\mathrm{O}(0,0),\ \mathrm{B}(2,0),\ \Gamma(0,2),\ \mathrm{E}(-1,0),\ \mathrm{Z}(0,-1),$$

$$\vec{\mathrm{ZB}} = (2,1),\ \vec{\mathrm{E\Gamma}} = (1,2).$$

Άρα έχουμε:

$$\text{συν}\mathrm{A} = \text{συν}(\widehat{\vec{\mathrm{ZB}},\vec{\mathrm{E\Gamma}}}) = \frac{\vec{\mathrm{ZB}}\cdot\vec{\mathrm{E\Gamma}}}{|\vec{\mathrm{ZB}}|\cdot|\vec{\mathrm{E\Gamma}}|} = \frac{2\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

6. Η άσκηση αυτή υπάρχει ως λυμένη εφαρμογή, με χρήση διανυσμάτων, στο βιβλίο των Σ. Ανδρεαδάκη, κ.α.: *Μαθηματικά Γ΄Λυκείου (Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία - Πιθανότητες).* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β. 1998, σ.123.

2ος τρόπος (με χρήση Ευκλείδειας Γεωμετρίας - Τριγωνομετρίας)

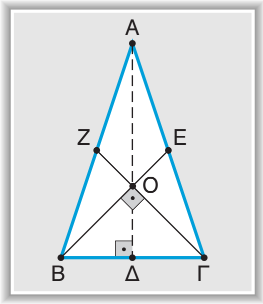
Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το συνΑ με τους εξής τρόπους:

α) Με χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΒΓ και του νόμου των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ.

β) Με χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε συνδυασμό με τον τύπο

$$\sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - 1$$

στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ του διπλανού σχήματος.



Με παρόμοιους τρόπους μπορούν να λυθούν και οι επόμενες ασκήσεις:

- Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε από το μέσο Μ της βάσης ΒΓ την ΜΔ⊥ΑΓ. Αν Ε είναι το μέσο του ΜΔ να αποδείξετε ότι είναι ΑΕ⊥ΒΔ[7].
- Σε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) να υπολογίσετε τη γωνία των διαμέσων ΒΚ και ΓΛ[8].

Η παράθεση και η σύγκριση των διαφορετικών μεθόδων επίλυσης έχει πρωταρχικό στόχο να να δείξει στους μαθητές την ουσιώδη διαφορά ανάμεσα στις έννοιες του Διανυσματικού Λογισμού και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παράλληλα βέβαια φιλοδοξεί να κατανοήσουν οι μαθητές ορισμένα πλεονεκτήματα των αναλυτικών εργαλείων του Διανυσματικού Λογισμού, όπως είναι η δυνατότητα ανάλυσης ενός διανύσματος του επιπέδου στη μορφή γραμμικού συνδυασμού δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων, η χρήση αυτής της ανάλυσης στην εκτέλεση των πράξεων και υπολογισμών, η εισαγωγή ενός συστήματος συντεταγμένων, η αναλυτική έκφραση της καθετότητας και γενικότερα μιας γωνίας με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου, κ.λπ.

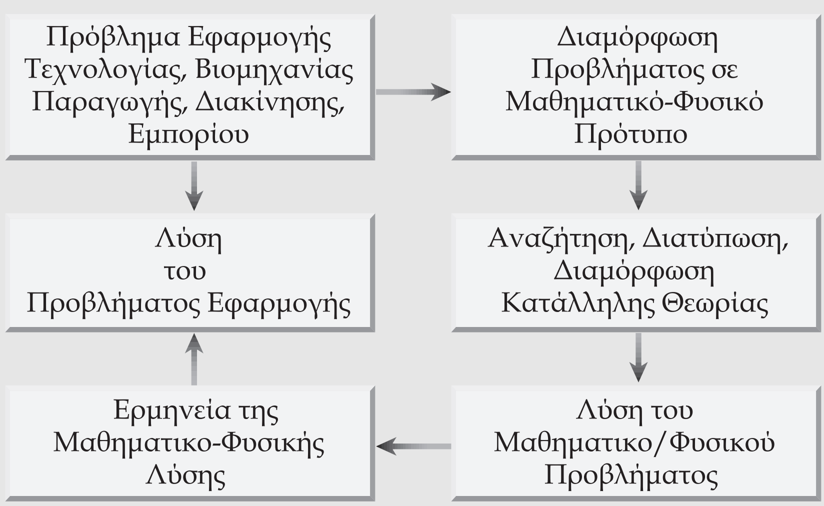
Οι προηγούμενες παρατηρήσεις αποτελούν τη βάση μιας μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε τον Οκτώβριο και Νοέμβριο του 2002 για τη διδασκαλία του Διανυσματικού Λογισμού στα τμήματα Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β' Λυκείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Τα αποτελέσματα από την επίδοση των μαθητών σε γραπτές δοκιμασίες είναι ενθαρρυντικά, αν και θα πρέπει να τονιστεί η δυσκολία ενσωμάτωσης των εννοιών και μεθόδων του Διανυσματικού Λογισμού μέσα στο σύστημα των γνώσεων που έχει καλλιεργήσει η προηγούμενη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλοί μαθητές εξακολουθούν, όπως δηλώνουν, να εκτιμούν περισσότερο τις γεωμετρικές αποδείξεις, οι οποίες στηρίζονται στη συνθετική σκέψη και τη φαντασία, παρά τις σχεδόν τυποποιημένες αναλυτικές μεθόδους με χρήση διανυσμάτων ή συντεταγμένων. Αναμένεται λοιπόν με ενδιαφέρον η εξέλιξη αυτών των αντιλήψεων καθώς συνεχίζεται στην ίδια τάξη, από τη μια μεριά η εισαγωγή των μαθητών στα επόμενα κεφάλαια της Αναλυτικής Γεωμετρίας, και από την άλλη η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μάθημα γενικής παιδείας μέσα από τα "αλγεβροποιημένα" κεφάλαια των μετρικών σχέσεων και των εμβαδών. ◆

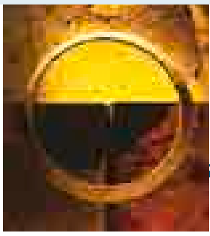
---

7. Πρόκειται για μια κλασική άσκηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που μπορεί να λυθεί με πολλούς ενδιαφέροντες τρόπους (βλ. π.χ. Μ. Γεωργιακάκη & Π. Γεωργιακάκη: *Γεωμετρία - Μεθοδολογία*. Αθήναι, 1975, σσ.143-144). Μια λύση με χρήση διανυσμάτων υπάρχει π.χ. στο βιβλίο του Ι. Πανάκη: *Στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού. Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα, 1982, σ.215. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η αναζήτηση μιας απλής λύσης με τη χρησιμοποίηση ενός κατάλληλου ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

8. Η άσκηση αυτή προτείνεται προς λύση στο βιβλίο του D. Kletenik: *Problems in Analytic Geometry*. Moscow: Mir Publishers, 1969, σ.157.

Τα Μαθηματικά αναδείχθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες ως ένα ***απαραίτητο και ισχυρό*** βοήθημα, που συνεχώς ***κερδίζει σε επιρροή***, με τα ενδιαφέροντα και σημαντικά προβλήματα από διάφορες περιοχές που τίθενται προς λύση. Η διαδικασία είναι σχεδόν πάντοτε η ίδια:



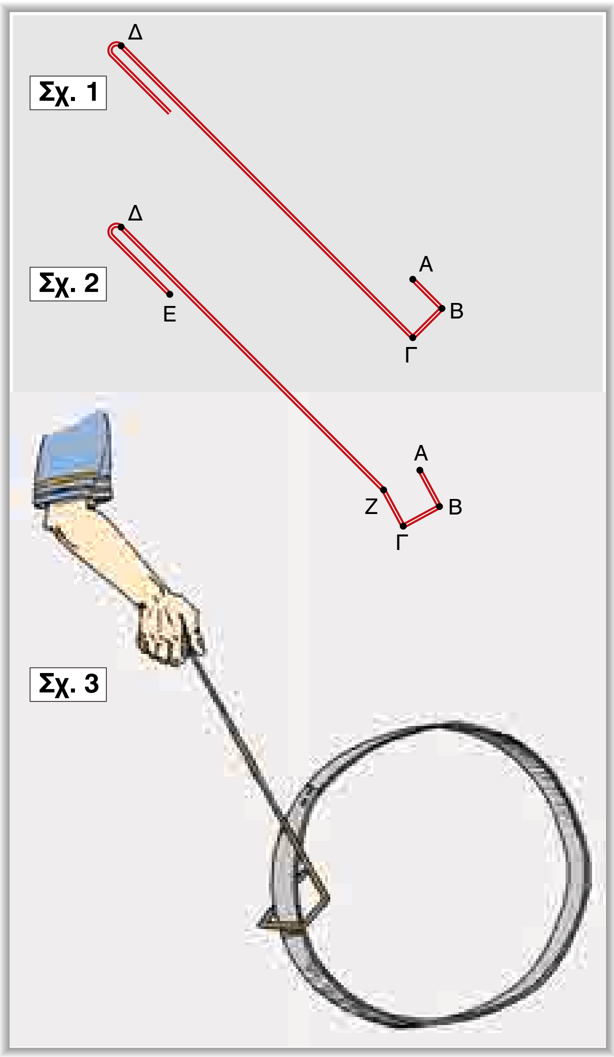


ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΜΕ ΤΗ ΣΤΕΦΑΝΗ

Του **Δ. Τσιώλη,** Φυσικού

Το πιο αγαπημένο παιχνίδι του υποφαινόμενου αλλά και των περισσότερων παιδιών των χωριών της Θεσσαλίας πριν από μερικά χρόνια, ήταν το παιχνίδι με τις στεφάνες.

Παίρναμε μια μεταλλική στεφάνη από άχρηστα βαρέλια τυριού ή κρασιού (η στεφάνη χρησίμευε να συγκρατεί τα ξύλα της κυλινδρικής επιφάνειας του βαρελιού).



Το παιχνίδι συνίστατο στη συνεχή κύλιση της στεφάνης μέσα από στενά περάσματα, ανηφοριές και κατηφοριές. Η κύλιση εξασφαλιζόταν με το σπρώξιμο της στεφάνης με μια συρμάτινη βέργα. Η συρμάτινη βέργα διαμορφώνονταν ως εξής:

Το ένα άκρο της λύγιζε δυο φορές σε ορθή γωνία όπως δείχνει το σχήμα 1 στα σημεία Β και Γ, έτσι ώστε $(AB) = 5$ cm, $B\Gamma = 5$ cm και $(\Gamma\Delta) = 50$ cm.

Το άλλο άκρο της βέργας δίπλωνε έτσι που $(\Delta E) = 10$ cm. Στο σημείο Ζ όπου $(Z\Gamma) = 5$ cm, η βέργα λύγιζε (σχ. 2) γύρω από άξονα ΖΑ, έτσι ώστε η γωνία $\widehat{\Delta Z\Gamma}$ να είναι περίπου 120° (το επίπεδο ΑΒΓΖ ήταν κάθετο στο επίπεδο ΔΖΓ).

Το παιδί έπιανε τη βέργα από το ΔΕ, ενώ η στεφάνη ερχόταν σε επαφή με την περιοχή ΒΓ της βέργας. Το παιδί έσπρωχνε τη στεφάνη προς τα μπρος με τη βέργα και η στεφάνη κυλούσε στο έδαφος, ενώ συγχρόνως γλιστρούσε στη βέργα (σχ. 3).

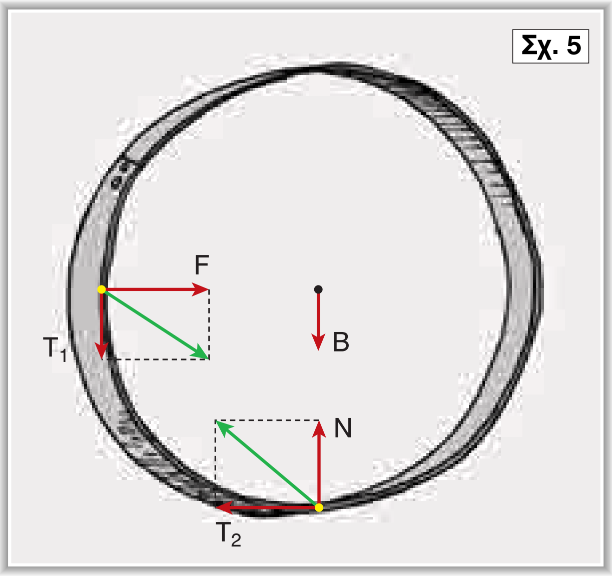
Η κυκλοφορία του ποδήλατου στα χωριά της Θεσσαλίας βέβαια έδωσε τη δυνατότητα στα παιδιά να χρησιμοποιούν αντί της στεφάνης των βαρελιών, τη στεφάνη της ρόδας ενός άχρηστου ποδηλάτου, απ' την οποία αφαιρούσαν τα ελαστικά και τις ακτίνες· η επινοητικότητα ωστόσο των παιδιών αντικατέστησε τη συρμάτινη βέργα με ένα απλό ξύλο (από λεπτό κλαδί δέντρου)· το ξύλο γλιστρούσε μέσα στο εξωτερικό αυλάκι της ρόδας, όπου πριν υπήρχε το ελαστικό (σχ. 4).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η φυσική του παιχνιδιού:

Στη στεφάνη ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της στεφάνης $\vec{B}$, η δύναμη που ασκεί η βέργα στη στεφάνη την οποία ανλύουμε στις $\vec{F}$ και $\vec{T}_1$ και η δύναμη που ασκεί το έδαφος στη στεφάνη την οποία αναλύουμε στις $\vec{N}$ και $\vec{T}_2$, όπως δείχνει το σχήμα 5.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση της στεφάνης του σχήματος 5 έχει φορά προς τα δεξιά.

Η δύναμη T_1 είναι τριβή ολίσθησης, οπότε $T_1 = \mu_1 \cdot F$, ενώ η T_2 στατική τριβή οπότε $T_2 \le \mu_2 N \cdot \mu_1$ είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στεφάνης - βέρ-



Σχ. 5

γας, ενώ μ_2 είναι ο συντελεστής οριακής τριβής στεφάνης - εδάφους.

Έστω m η μάζα της στεφάνης, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, R η ακτίνα της στεφάνης, I η ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς άξονα που περνάει από το σημείο επαφής της με το έδαφος και είναι κάθετος στο επίπεδο της στεφάνης· με α_{cm} συμβολίζουμε την επιτάχυνση της στεφάνης και με α τη γωνιακή επιτάχυνση της στεφάνης.

Οι εξισώσεις κίνησης της στεφάνης είναι οι εξής:

$$B + T_1 - N = 0 \qquad (1)$$

$$F - T_2 = m \cdot \alpha_{cm} \qquad (2)$$

$$FR - T_1R = I \cdot \alpha \qquad (3)$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι

$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$ και

$\alpha = \dfrac{\alpha_{cm}}{R}$ η (3) θα δώσει:

$$FR - \mu_1 FR = 2mR^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow$$

$$F = \frac{2m\alpha_{cm}}{1-\mu_1} \qquad (4)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} N = B + T_1 = mg - + \mu_1 F \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$N = \frac{g - \mu_1 g + 2\mu_1 \alpha_{cm}}{1 - \mu_1\, m} \qquad (5)$$

Από την (2) θα έχουμε

$$T_2 = F - m\alpha_{cm} = \frac{2m\alpha_{cm}}{1-\mu_1} - m\alpha_{cm} =$$

$$= \frac{\alpha_{cm} + \mu_1\alpha_{cm}}{1-\mu_1}\, m \qquad (6)$$

$$\frac{(6)}{(5)} \Rightarrow \frac{T_2}{N} = \frac{\alpha_{cm} + \mu_1\alpha_{cm}}{g - \mu_1 g + 2\mu_1\alpha_{cm}}\,.$$

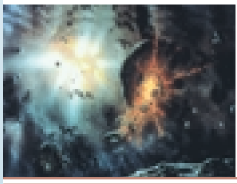
Αφού $T_2 \le \mu_2 N$ η τελευταία σχέση δίνει

$$\mu_2 \ge \frac{\alpha_{cm} + \mu_1\alpha_{cm}}{g - \mu_1 g + 2\mu_1\alpha_{cm}}\,.$$

Σημείωση

Η παραπάνω διαπραγμάτευση αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση του προβλήματος. Σε ένα δεύτερο επίπεδο θα έπρεπε να λάβουμε υπόψη και την παραμόρφωση του εδάφους (αν είναι μαλακό), δηλαδή την τριβή κύλισης.

ΧΡΟΝΟΣ



ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑ

Του **Γιώργου Ατρείδη**, Φυσικού

Ψάχνοντας γενικότερα και έξω από την αυτόκλητη καθημερινότητα βλέπουμε ότι ο χρόνος σαν έννοια έχει απασχολήσει αρκετούς ανθρώπους, είτε στο χώρο της επιστήμης, είτε στο χώρο της επιστημονικής φαντασίας. 'Ανθρωποι, που απέδειξαν θεωρητικά ότι μπορεί να υπάρξει ένα «σπάσιμο» «στην ακατάπαυστη ροή του χρόνου η οποία γίνεται προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Ακόμη οι καινούργιες επιστημονικές ανακαλύψεις έχουν αρχίσει να κλονίζουν την καθημερινή εμπειρία που έχει ο άνθρωπος για το πριν το μετά και τη διαδοχή της ημέρας από τη νύχτα.

Λέγοντας ο Αριστοτέλης «το πιθανό είναι ότι συνήθως συμβαίνει «θα μπορούσε να φανταστεί ότι κάποια μέρα, αυτό το οποίο συμβαίνει θα μπορούμε να το ξέρουμε πριν συμβεί;

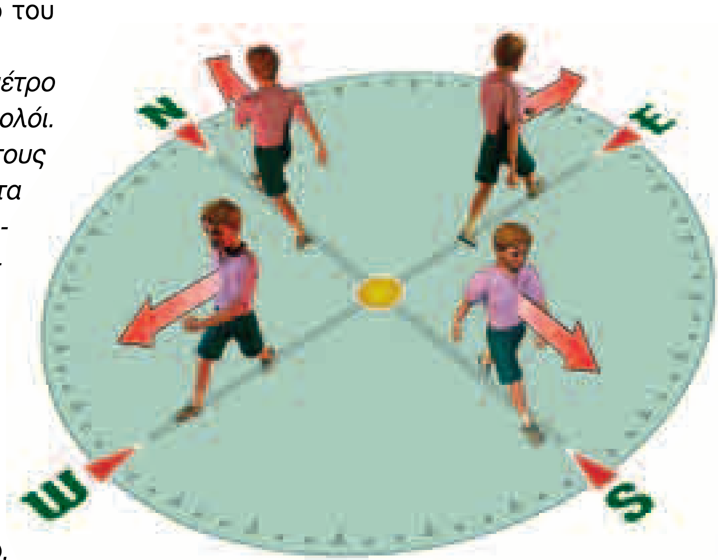
Αναφέρει ο Αϊνστάιν στην «εξέλιξη των ιδεών». « .... τι είναι ρολόι; ». Το πρωτόγονο υποκειμενικό αίσθημα της ροής του χρόνου μας καθιστά ικανούς να κατατάσσουμε τις ενυπώσεις μας, να κρίνουμε αν ένα γεγονός συμβαίνει πριν ή ύστερα από ένα άλλο. Αλλά για να δείξουμε ότι το διάστημα χρόνου ανάμεσα σε δύο γεγονότα είναι δέκα δευτερόλεπτα έχουμε ανάγκη από ένα ρολόι. Με τη χρήση του ρολογιού η έννοια του χρόνου αποβαίνει αντικειμενική ...».

Και συνεχίζει ο Stephen Hawking «στο χρονικό του χρόνου»:

«... Ο κάθε παρατηρητής έχει τώρα το δικό του μέτρο του χρόνου, όπως τον καταγράφει το δικό του ρολόι. Οι διάφοροι παρατηρητές δε θα συμφωνούν για τους χρόνους των γεγονότων και τα χρονικά διαστήματα μεταξύ τους. Έτσι ο χρόνος έγινε μια περισσότερο υποκειμενική έννοια σχετική με τον παρατηρητή που τον μετράει ... Η κατεύθυνση στον φανταστικό χρόνο δεν διακρίνεται από τις ανάλογες κατευθύνσεις στο χώρο. Στο χώρο αν κανείς μπορεί να κατευθυνθεί προς το Βορρά, μπορεί να κατευθυνθεί και προς το Νότο. Έτσι και στον φανταστικό χρόνο, αν κανείς μπορεί να κατευθυνθεί προς τα εμπρός, προς το μέλλον, θα πρέπει να μπορεί να κατευθυνθεί και προς τα πίσω, προς το παρελθόν. Στο φανταστικό χρόνο δηλαδή, δεν μπορεί να υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ της κατεύθυνσης προς το μέλλον και αυτής προς το παρελθόν. Αντίθετα, όπως όλοι γνωρίζουμε,στον πραγματικό χρόνο υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά μεταξύ της κατεύθυνσης προς το μέλλον και της κατεύθυνσης προς το παρελθόν. Από πού προέρχεται αυτή η διαφορά; Γιατί θυμόμαστε το παρελθόν αλλά όχι το μέλλον ...;

Όλες οι θεωρητικές αναφορές και εργασίες που έχουν γίνει μπορεί να έχουν λογική βάση, υπάρχουν όμως ερωτήματα που θα απαντηθούν μόνο αν οι παραπάνω θεωρίες μπορέσουν να εφαρμοστούν στην καθημερινότητα.

Ημερομηνίες. 'Ισως τυχαίες. Μπορεί όμως σημαντικές. Όλοι έχουμε τις ημερομηνίες μας, που βοηθούν να ταξινομούμε τα σημαντικά γεγονότα της ζωής τα οποία μένουν ανεξίτηλα στη μνήμη μας. Η συνεχής αίσθηση του χρόνου μας βοηθάει να τα ορίζουμε και να τα θυμόμαστε. Αντίθετα σε μια κοινωνία χωρίς χρονική αρχή και τέλος, χωρίς χρονική διάρκεια, πως θα μπορούσαμε να ορίσουμε τα σημαντικά σημεία της



κοινωνίας και της ζωής μας; Ίσως φτάναμε σ' ένα συναισθηματικό αδιέξοδο που θα μας έριχνε στο λήθαργο της αιωνιότητας.

Οι εξισώσεις της θεωρίας της σχετικότητας όπως και εκείνες της κβαντομηχανικής και των διαχρονικών αναδιπλώσεων αν και προτείνουν καινούργιες αντιλήψεις για το χρόνο είναι αρκετά δύσκολο να κατανοηθούν από τον πολύ κόσμο.

Σήμερα στην κοινή αντίληψη που υπάρχει στον κόσμο ο χρόνος παρουσιάζεται να έχει μια ακατάπαυστη ροή προς μια κατεύθυνση.

Το ερώτημα που γεννήθηκε σε πολλούς είναι αν θα μπορέσουμε να αλλάξουμε τη διάρκεια του χρόνου ή ακόμη και να ταξιδέψουμε διαμέσω αυτού, προς τα εμπρός ή προς τα πίσω. Το κυριότερο όμως εμπόδιο που παρουσιάζεται σήμερα είναι η περίφημη υπόθεση της αιτιότητας.

Αν και αποτελεί μια καθαρά φιλοσοφική υπόθεση, μέχρι σήμερα κανένα γεγονός στη φύση δεν μπορεί να την αμφισβητήσει. Σύμφωνα με την παραπάνω υπόθεση το αποτέλεσμα ακολουθεί πάντα το αίτιο.

Η σφαίρα φεύγει από το όπλο αφού τραβήξουμε τη σκανδάλη. Γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του αγώνα μόνο αφού αυτός τελειώσει και όχι πριν. Μπορούμε να ξέρουμε τα θέματα των εξετάσεων μόνο αφού τα πάρουμε. Τα παραπάνω περιστατικά όπως και τα ρολόγια της καθημερινής μας ζωής μας δείχνουν τη συνεχή ροή του χρόνου.

Οι μαύρες τρύπες αντίθετα απορρίπτουν αυτή καθ' αυτή την έννοια της ροής και τον εμφανίζουν αποκομμένο.

Το ερώτημα που γεννιέται είναι αν η επιστημονική φαντασία μπορεί να ακολουθήσει την πολυπλοκότητα της φύσης και αυτό γιατί οι νέες επιστημονικές ανακαλύψεις θυμίζουν πολύ έντονα, τις παλαιότερες φιλοσοφικές αντιλήψεις για την έννοια του χρόνου. Μέχρι στιγμής η παραβίαση του νόμου της αιτιότητας έχει γίνει μόνο στην επιστημονική φαντασία.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της διεμβόλησης του χρόνου στο παρελθόν, το οποίο θέτει ορισμένα ερωτήματα. «Ο Ταξιδιώτης επιστρέφει στο παρελθόν και σκοτώνει ένα αγόρι το οποίο αν μεγάλωνε θα ήταν ο παππούς του. Έτσι ο ταξιδιώτης δεν θα μπορέσει να ταξιδέψει πίσω στο χρόνο και να συναντήσει τον παππού του.»

Αυτό το απλό παράδειγμα που ανήκει στο χώρο της επιστημονικής φαντασίας είναι ένα κλασικό παράδειγμα ύπαρξης της υπόθεσης της αιτιότητας. Για να έχουμε μια λογική προσέγγιση στα παραπάνω πρέπει να θεωρήσουμε ότι έστω την τελευταία στιγμή κάτι γίνεται και ο ταξιδιώτης δε συναντά τον παππού του. Ίσως οι φιλοσοφικές εστιάσεις των ανθρώπων πάνω στο θέμα από παλιά είχαν κάποια λογική βάση.

Τελικά είτε υπάρχει η έννοια του χρόνου είτε όχι, η αλληλουχία των γεγονότων θα είναι πραγματικότητα και θα καθορίζει πάντα με τον πιο απροκάλυπτο τρόπο το πριν και το μετά. Γιατί αν ποτέ καταφέρουμε να αλλάξουμε τη ροή του χρόνου, ή τη διάρκειά του, αν η θεωρία και η επιστημονική φαντασία γίνουν πραγματικότητα, τότε σίγουρα θα έχει αλλάξει ο τρόπος που σκεφτόμαστε και αιθανόμαστε. Σίγουρα η λέξη άνθρωπος δεν θα έχει τη σημερινή της σημασία. Ο άνθρωπος διαμορφώνεται από το χρόνο, ο οποίος περνώντας από πάνω του προσφέρει απλόχερα γνώση και δημιουργική ανέλιξη.

◆

ΟΙ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ BACCALAUREAT ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΑ ΕΥΡΩΠΑΪΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

Του **Δημήτρη Κρέτζα,** Δρ. Φυσικού,
καθηγητή του Πειραματικού Σχολείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Κάθε χρόνο, πολύς λόγος γίνεται και πολλά γράφονται για τις εισαγωγικές εξετάσεις στα ΑΕΙ-ΤΕΙ. Αυτά αφορούν τον αριθμό των εισακτέων, τη δυσκολία των θεμάτων, τη βαθμολογία, τη μετέπειτα προοπτική εργασίας κτλ. Ακόμα πολλά λέγονται για τα διδακτικά βιβλία, την καταλληλότητά τους και τη συμβολή τους στην επιτυχία.

Η εισαγωγή στα Ανώτατα Πνευματικά Ιδρύματα της χώρας περνά μέσα από τη βαθμολογία που πρέπει να είναι άρρηκτα συνδεμένη με το αίσθημα δικαιοσύνης. Είναι όμως αυτό δυνατό όταν, πολλές φορές, η μεγάλη ευκολία κάποιων θεμάτων δημιουργεί συνωστισμό στην κορυφή, όπως συμβαίνει στις Ιατρικές Σχολές, όπου τα όρια της αβεβαιότητας της βαθμολογίας υπερκαλύπτουν την όποια διακριτική ικανότητα του φακού της επιλογής; Υπάρχει συνταίριασμα της ικανότητας του μαθητή και της επιτυχίας; Αυτό θα μπορούσε να γίνει, όταν όλοι οι μαθητές μπορούσαν να εξεταστούν σε όλη την έκταση του εξεταζόμενου αντικειμένου. Η πλήρης εξέταση του μαθητή στην απαιτούμενη γνώση είναι αδύνατη και εκ της φύσεώς τους οι εξετάσεις έχουν δειγματοληπτικό χαρακτήρα, με σκοπό τη δίκαιη κατάταξη των μαθητών. Επιτυγχάνεται όμως αυτό σε ικανοποιητικό βαθμό ή θα μπορούσαν να γίνουν κάποιες βελτιώσεις, έτσι ώστε να γίνει δίκαιη κατάταξη των μαθητών και να απομακρυνθεί κατά το δυνατόν η εγκληματική επίδραση των γριφωδών ή γελοίων θεμάτων, που πολλές φορές καθορίζουν την μελλοντική πορεία των παιδιών; Πάνω σ' αυτά θα μπορούσαν πολλά να λεχθούν.

Ας δούμε, όσον αφορά το μάθημα της Φυσικής, τι συμβαίνει στην Ελλάδα και στα Ευρωπαϊκά Σχολεία. Στην Ελλάδα ο αριθμός των θεμάτων στη Φυσική είναι τέσσερα, συνήθως όχι ισοδύναμα, με ισοδύναμη βαθμολογία. Συνήθως τα δύο θέματα αφορούν τη θεωρία, με αναφορά στο συγκεκριμένο σχολικό βιβλίο, με φυσιολογικό επακόλουθο τη δημιουργία πόλων έλξης προς την παπαγαλία και δύο προβλήματα. Οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να απαντήσουν σε όλα τα θέματα. Στην εξέταση αυτή μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής: Η αναγωγή της απάντησης σε συγκεκριμένο βιβλίο, απομακρύνει από την πραγματική μάθηση, όσο παράξενο κι αν φαίνεται, αφού αυτό οδηγεί σε τυποποίηση των απαντήσεων. Ακόμα ο διαχωρισμός θεωρίας και προβλημάτων και τα αμφίβολης ποιότητας ερωτηματολόγια κάθε άλλο παρά στη δίκαιη αξιολόγηση συμβάλλουν. Επίσης, αφού δεν είναι δυνατή η συνολική εξέταση, η υποχρεωτική απάντηση σε όλα τα θέματα ίσως να γίνεται άδικη διότι τονίζει τον παράγοντα της τύχης αφού τα αδύνατα σημεία των μαθητών διαφέρουν.

Θα αναφερθώ στην εξέταση του μαθήματος της Φυσικής όπως γίνεται στα Ευρωπαϊκά Σχολεία, για την απόκτηση του Baccalaureat. Τα Ευρωπαϊκά Σχολεία είναι πολύγλωσσα και κάθε μαθητής διδάσκεται το μάθημα της Φυσικής στη γλώσσα του. Από το προηγούμενο έτος, στους καθηγητές όλων των εθνοτήτων, δίνεται στα αγγλικά ή στην επίσημη γλώσσα του Σχολείου (π.χ. στα Ευρωπαϊκά Σχολεία των Βρυξελλών επίσημη γλώσσα είναι η γαλλική) η διδακτέα και εξεταστέα ύλη που ταυτίζονται, με σαφήνεια ως προς το πλάτος και το βάθος των απαιτήσεων. Σχολικό βιβλίο δεν υπάρχει. Ο καθηγητής μπορεί να προτείνει κάποια βιβλιογραφία στους μαθητές ή όπως γίνεται συνήθως, οι μαθητές κρατούν σημειώσεις κατά τη διάρκεια του μαθήματος και ο καθηγητής κατά διαστήματα, όποτε κρίνει, τους δίνει σχετικές σημειώσεις σε φωτοτυπίες.

Η σειρά διδασκαλίας των κεφαλαίων, ο τρόπος και οι απαιτήσεις των πρόχειρων διαγωνισμάτων και των τρίωρων επίσημων εξετάσεων (Ιανουάριος - Φεβρουάριος) του πρώτου τετραμήνου, το είδος των θεμάτων, η απαίτηση απάντησης σε όλα τα θέματα ή μέρος αυτών, είναι στην απόλυτη ελευθερία του καθηγητή.

Τα θέματα τελικών εξετάσεων του Baccalaureat είναι κοινά και δίνονται ταυτόχρονα σε όλα τα Ευρωπαϊκά Σχολεία. Ο αριθμός των θεμάτων στις Φυσικές Επιστήμες είναι έξι και ο μαθητής είναι υποχρεωμένος, σε ξεχωριστή κόλλα για κάθε θέμα, να απαντήσει στα τέσσερα. Στη Φυσική από τα έξι στα τέσσερα. Στη Χημεία από τα τρία ανόργανης και τρία οργανικής Χημεί-

ας υποχρεούται να απαντήσει σε δύο από κάθε κατηγορία. Στη Βιολογία από τα δύο θέματα που αφορούν τη φυσιολογία του κυττάρου, δύο τη γενετική και δύο την εξέλιξη, υποχρεούται να απαντήσει σε ένα από κάθε κατηγορία και για το τέταρτο επιλέγει μεταξύ φυσιολογίας του κυττάρου και γενετικής. Όλα τα θέματα είναι προβλήματα και η εξέταση της θεωρίας γίνεται με ερωτήσεις που βρίσκονται μέσα στα προβλήματα. Όλα τα θέματα είναι πραγματικά ισοδύναμα και δίπλα σε κάθε ερώτηση σημειώνεται και ο αριθμός των αντίστοιχων μονάδων. Το σύνολο των μονάδων σε κάθε θέμα είναι 25. Ο χρόνος της εξέτασης, συμπεριλαμβανομένης της ανάγνωσης των θεμάτων είναι τρεις ώρες. Η βαθμολογία γίνεται, χωρίς σημάδια πάνω στις κόλλες, ανεξάρτητα, από δύο βαθμολογητές, με προσέγγιση δεκάτου της μονάδας σε δεκαβάθμια κλίμακα, με βάση προβιβάσιμου βαθμό όχι το 5 αλλά το 6.

Ο τελικός βαθμός του μαθήματος προκύπτει από το μέσο όρο των προφορικών των δύο τετραμήνων, το γραπτό των εξετάσεων Ιανουαρίου - Φεβρουαρίου και το βαθμό του Baccalaureat με διαφορετικό όμως βάρος. Το βάρος το προσδιορίζει κάποιος αλγόριθμος, ο οποίος χονδρικά δίνει συντελεστή 0,15 στον μέσο όρο των προφορικών, 0,25 στο γραπτό του πρώτου τετραμήνου και 0,60 στον γραπτό του Baccalaureat.

Στην τελική γενική βαθμολογία σπάνια μαθητής ξεπερνά το 9 και αυτό όχι κάθε χρόνο (συγκρίνετέ το με τα δικά μας αποτελέσματα που κάθε χρόνο 1 στους 3 αριστεύει!).

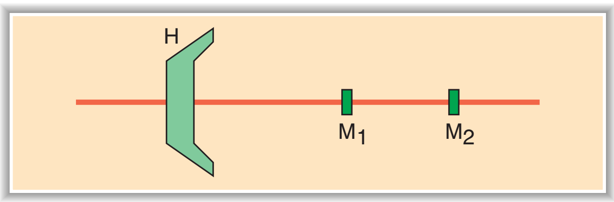
Στη συνέχεια διάλεξα να παραθέσω ένα θέμα που δόθηκε στο Baccalaureat και αφορά κοινή ύλη μεταξύ Ελληνικών και Ευρωπαϊκών Σχολείων, το κεφάλαιο των κυμάτων.

Πριν από το κείμενο του θέματος δίνω το μέρος της αντίστοιχης διδακτέας ύλης όπως δίνεται στους διδάσκοντες.

PROGRAMME HEADING	MATERIAL AND IDEAS TO BE COVERD: *definitions, units, formulae and «Savoir-Faire»*	AVENUES OF APPROACH
Section W. Waves **W1. Basics** **1.1Definitions. Sinusoidal waves**	A system of oscillators, arranged so that the energy from one may be communicated by some mechanism to its neighbours, can give rise to the propagation of **a progressive wave**. Thus energy is transported without the bulk movement of any mass. Waves may be **transverse or longitudinal** in nature, acording to whether the disturbance is respectively perpendicular or paralleel to the direction of energy travel. If the disturbance y of a given oscillator is given by $y = A \sin \omega t$ (see year 6), then it is termed a harmonic or sinusoidal oscillator, and ωt is known **as its phase angle**. The disturbance of a neighbouring oscillator will be identical in amplitude, assuming no energy loss, but different in phase angle. Its disturbance will therefore be $y' = A \sin(\omega t - \Delta\phi)$, where $\Delta\phi$ is the difference of phase angle between them. The phase angle changes linearly with displacement in the direction of movement of the wave, for a given value of time.	Demonstrations with coupled pendula etc.
1.2 Equation of a progressive wave	In a progressive wave, the phase angle of a given oscillator will change by 2π in time $2\pi/\omega$. This is the period τ of the wave the phase angle of an oscillator is modified by 2π for two oscillators separated by distance λ. This is the wavelength for two oscillators separated in distance by Δx and in time by Δt, the difference in phase angle is $\Delta\phi = 2\pi\Delta t/\tau - 2\pi\Delta x/\lambda$ The equation of a progressive wave is $y = A\sin(2\pi/\tau - 2\pi x/\lambda)$ A wave nay thus be defined as **doubly periodic** (in space and in time). The speed of propagation of a wave is $\Delta x/\Delta t = \lambda/\tau = f\lambda$, and expresses the speed of movement of a wavecrest (or other point of given phase angle).	Velocity of waves on a wire: $c^2 = F/\mu$ where $\mu = m/l$ (the linear density of the wire)
1.3 Huyghens' principle	A progressive wave may be considered to propagate by the generation of secondary wavelets along its wavefront.	
1.4 Examples	**General note:** *The concept of a wave allows apparently very dissimilar phenomena to be described by very similar wave models. This aspect should be emphasized in this section, by undelining the similarity of the behaviour (for example) of sound and radio, ather than their contrasts.* Sound or Acoustic waves may be propagaated in solids, liquids and gases. In air, the speed of propagation is about 340 $m \cdot s^{-1}$ at room temperature, but is temperature depentent. Sound waves are longitudinal in gases. Transverse waves may be propagated on wires with a velocity depentent on tension and linear density.	Velocity of sound waves: $c \propto \sqrt{T}$ wher T is absolut temperature.

Θέμα εξετάσεων

α) Τακτοποιούμε, σε ευθεία γραμμή και στη σειρά, ένα μεγάφωνο Η και δύο όμοια μικρόφωνα M_1 και M_2, ευαίσθητα στις μεταβολές της πίεσης, του παλλόμενου αέρα. Η απόσταση d που χωρίζει τα δύο μικρόφωνα, είναι σταθερή (σχήμα). Το Η τροφοδοτήθηκε από μία γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων και εξέπεμψε ένα ημιτονοειδές ηχητικό κύμα, θεωρούμενο επίπεδο. Τα M_1 και M_2, ακίνητα, είναι αμοιβαία συνδεδεμένα στις εισόδους Α και Β, ενός παλμογράφου, πάνω στην οθόνη του οποίου παρατηρεί κανείς την εμφάνιση δύο ταλαντώσεων, που έχουν καταγραφεί αντίστοιχα στα M_1 και M_2.



i. Η συχνότητα του εκπεμπόμενου από το Η ήχου, είναι $f_1 = 4{,}0$ kHz και οι λαμβανόμενες ταλαντώσεις από τα M_1 και M_2 είναι σε φάση. Γνωρίζοντας ότι ο παλμογράφος είναι κανονισμένος για κλίμακα τάσης σάρωσης $b = 5{,}0\times10^{-2}$ ms·cm^{-1} και πως η απόσταση $d = M_1M_2$ είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την HM_1 ώστε το πλάτος του ήχου να είναι πρακτικά ίδιο και για το M_1 και για το M_2, σχεδιάστε τις δύο καταγραμμένες καμπύλες (ταλαντώσεις). Το πλάτος L της οθόνης ισούται με 10 cm. (✍ 6 μονάδες)

ii. Αυξάνουμε προοδευτικά τη συχνότητα, του εκπεμπόμενου από το Η ήχου, αρχίζοντας από $f_1 = 4{,}0$ kHz μέχρι $f = 5{,}0$ kHz. Βεβαιώνουμε τότε πως οι ταλαντώσεις, στα M_1 και M_2 είναι ξανά, για πρώτη φορά, σε φάση. Για ποια τιμή της κλίμακας σάρωσης b ξαναβρίσκουμε στην οθόνη τη παλμογράφου, ακριβώς τις ίδιες καμπύλες με την i. (✍ 5 μονάδες)

iii. Γνωρίζοντας πως η ταχύτητα του ήχου στις καταστάσεις του πειράματος είναι $c = 3{,}4\times10^2$ m·s^{-1}, υπολογίστε την απόσταση d, που χωρίζει τα M_1 και M_2. (✍ 5 μονάδες)

β) Αποσύρουμε το M_2 και βάζουμε στη θέση του, κάθετα στην ευθεία HM_1, μια επίπεδη επιφάνεια S, που ανακλά τον ήχο προς το μεγάφωνο Η.

i. Αν η συχνότητα του εκπεμπόμενου από το Η ήχου είναι $f_1 = 4{,}0$ kHz ποια είναι η καταγραφή της ηχητικής ταλάντωσης στο M_1; Εξηγήστε το φαινόμενο που συμβαίνει και σχεδιάστε το παρατηρούμενο σχήμα στην οθόνη του παλμογράφου. (✍ 5 μονάδες)

ii. Εξηγήστε, ποιοτικά, την παρατηρούμενη αλλαγή πάνω στην οθόνη του παλμογράφου, αν το μικρόφωνο M_1 έχει μετατεθεί κατά μήκος (Δ), στην ευθεία (βλέπε σχήμα, προς την επιφάνεια S που ανακλά τον ήχο). (✍ 4 μονάδες)

Κάθε απάντηση πρέπει να συνοδεύεται από επεξηγηματικό κείμενο.

Απάντηση

α) i. Η τιμή του $b = 5\cdot10^{-2}$ ms·cm^{-1} δείχνει ότι κάθε cm του οριζόντιου άξονα της οθόνης του παλμογράφου σαρώνεται σε 0,05 ms και επειδή η οθόνη έχει πλάτος $L = 10$ cm θα σαρωθεί σε χρόνο

$$t = bL = 5\cdot10^{-2}\cdot10 \text{ ms}\cdot\text{cm} = 0{,}5 \text{ ms} = 0{,}5\cdot10^{-3} \text{ s}$$

Η περίοδος T_1 της ταλάντωσης είναι

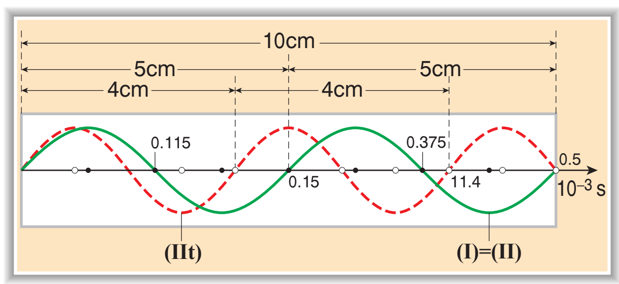
$$T_1 = \frac{t}{f_1} = \frac{1}{4\cdot10^3} = \text{Hz}^{-1} = 0{,}25\cdot10^{-3} \text{ s}$$

Επομένως ο αριθμός N των περιόδων πάνω στην οθόνη του παλμογράφου είναι

$$N = \frac{1}{T_1} = \frac{0{,}5\cdot10^{-3} \text{ s}}{0{,}25\cdot10^{-3} \text{ s}} = 2$$

και η καμπύλη (I) του παρακάτω σχήματος δίνει την ταλάντωση στο M_1.

Επειδή η ταλάντωση στο M_2 είναι σε φάση με την ταλάντωση στο M_1 (η απόστασή τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο k του μήκους κύματος λ, $d = k\lambda$) και επειδή το πλάτος ταλάντωσης είναι το ίδιο, η αντίστοιχη καμπύλη (II) συμπίπτει με την καμπύλη (I).



ii. Η νέα περίοδος είναι

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{5\cdot10^3} \text{Hz}^{-1} = 0{,}2\cdot10^{-3} \text{ s}$$

και στο χρόνο σάρωσης της οθόνης του παλμογράφου θα έχουμε

$$N' = \frac{t}{T_2} = \frac{0{,}5\cdot10^{-3} \text{ s}}{0{,}2\cdot10^{-3} \text{ s}} = 2{,}5 \text{ περίοδοι}$$

(καμπύλη (III) με διακεκομμένη γραμμή).

Για να έχουμε στην οθόνη πάλι δύο περιόδους

πρέπει να αλλάξει ο χρόνος σάρωσης από b σε b'.

Πρέπει συνεπώς να έχουμε

$$N = \frac{t}{T_1} = \frac{t'}{T_2} \Rightarrow \frac{bL}{T_1} = \frac{b'L}{T_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b' = \frac{T_2}{T_1} b = \frac{f_1}{f_2} b = \frac{4}{5} 5\cdot 10^{-2}\ \text{ms}\cdot\text{cm}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b' = 0{,}04\ \text{ms}\cdot\text{cm}^{-1}$$

iii. Επειδή όσο αυξάνει η συχνότητα ελαττώνεται το μήκος κύματος, $c = \lambda f$, συμπεραίνουμε ότι, όταν ξαναβρούμε στην οθόνη τις ίδιες καμπύλες ξανά για πρώτη φορά, η σταθερή απόσταση d των M_1, M_2 σε μήκη κύματος αυξάνει κατά 1, δηλαδή

$$s = k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2 \Rightarrow k\frac{c}{f_1} = (k+1)\frac{c}{f_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{f_1}{f_2 - f_1} = \frac{4}{5-4} = 4$$

και

$$d = k\lambda_1 = k\frac{c}{f_1} = 4\,\frac{340}{4000}\,\frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{\text{Hz}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 0{,}34\ \text{m} = 34\ \text{cm}$$

β) i. Στην επίπεδη επιφάνεια S το ηχητικό κύμα ανακλάται με αλλαγή φάσης ίση με π. Το τρέχον κύμα με το ανακλώμενο, επειδή είναι σύμφωνα, συμβάλλουν και σχηματίζουν στάσιμα κύματα, με δεσμό στο σημείο ανάκλασης. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών των στασίμων κυμάτων είναι $\lambda/2$ και επειδή

$$M_1M_2 = d = 4\lambda = 8(\lambda/2)$$

στο σημείο M_1 σχηματίζεται δεσμός και συνεπώς στον παλμογράφο το πλάτος είναι μηδέν και θα σχηματίζεται μια ευθεία γραμμή.

ii. Όταν το μικρόφωνο M_1 πλησιάζει την επίπεδη επιφάνεια S, θα συναντά διαδοχικά μέγιστα και ελάχιστα του στασίμου κύματος, που θα εναλλάσσονται κάθε $\lambda/4$. Επειδή η απόσταση $d = 4\lambda$ και συνεπώς

$$\lambda = \frac{d}{4} = \frac{34}{4}\ \text{cm} \Rightarrow \lambda = 8{,}5\ \text{cm},$$

$$\frac{\lambda}{2} = 4{,}25\ \text{cm}, \quad \frac{\lambda}{4} = 2{,}125\ \text{cm}$$

από την αρχική θέση του M_1 μέχρι την επιφάνεια S, ελάχιστα και μέγιστα θα έχουμε στις αποστάσεις ελάχιστα σε

0, 4,25, 8,5 12,75, 17, 21,25, 25,5, 29,75, 34 cm

και μέγιστα στις ενδιάμεσες θέσεις. ◆

ΧΗΜΕΙΑ ΣΕ ΜΙΚΡΟΚΛΙΜΑΚΑ

Της **Κ. Γιούρη-Τσοχατζή**, Επίκουρης καθηγήτριας του τμήματος Χημείας Α.Π.Θ.

Πειράματα χημείας σε μικροκλίμακα

Η **χημεία σε μικροκλίμακα** (microscale chemistry ή small scale chemistry), είναι η χημεία που πειραματικά χρησιμοποιεί πολύ μικρές ποσότητες χημικών αντιδραστηρίων και συχνά (όχι πάντα) απλά όργανα και συσκευές. Χημεία σε μικροκλίμακα είναι η χημεία των σταγόνων και των μικρών οργάνων.

Στο τέλος της δεκαετίας του '70 και τις αρχές του '80 στις ΗΠΑ άρχισε να προωθείται η ιδέα της αντικατάστασης των παραδοσιακών πειράματων χημείας, με πειράματα μικροκλίμακας, κυρίως για περιβαλλοντικούς και οικονομικούς λόγους.

Το 1993 ιδρύθηκε σε κολλέγιο της Μασαχουσέτης το εθνικό κέντρο χημείας σε μικροκλίμακα (MMC), με σκοπό να προωθήσει τη χρήση πειραμάτων μικροκλίμακας, ως ένα τρόπο μείωσης της ρύπανσης από απόβλητα που προέρχονταν από εργαστηριακά πειράματα.

Την ίδια εποχή στην Ευρώπη (Γερμανία, Ολλανδία, Αγγλία) άρχισαν να εφαρμόζονται στα σχολεία τα πειράματα χημείας σε μικροκλίμακα, αφού προηγήθηκαν πιλοτικά προγράμματα όπου εξετάστηκαν αναλυτικά διάφοροι παράμετροι, όπως οικονομικό κόστος ανά τάξη μαθητών, χρόνος πειραματικής διαδικασίας, κατανόηση θεωρίας, όγκος αποβλήτων κ.ά.

Ήδη τα πειράματα σε μικροκλίμακα χρησιμοποιούνται σε πολλές χώρες κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, επειδή συγκεντρώνουν πολλά πλεονεκτήματα όπως:

- είναι οικονομικά, επειδή χρησιμοποιούν μικρές ποσότητες χημικών αντιδραστηρίων και μικρά όργανα συνήθως πλαστικά, άρα αγοράζονται λιγότερες ποσότητες, ενδεχομένως σε μικρότερες συσκευασίες, οπότε είναι ευκολότερη και η αποθήκευσή τους,
- υπάρχει μείωση των χημικών αποβλήτων, επειδή ακριβώς χρησιμοποιούνται πολύ μικρές ποσότητες αντιδραστηρίων, επομένως αποφεύγεται άσκοπη σπατάλη. Η ατμόσφαιρα στο εργαστήριο είναι πιο καθαρή επειδή διαφεύγουν λιγότεροι ατμοί,
- οι μαθητές ευαισθητοποιούνται στην υπεύθυνη χρήση των χημικών ουσιών, θέμα πολύ σημαντικό για τα σύγχρονα περιβαλλοντικά προβλήματα. Η τεχνική σε μικροκλίμακα είναι ένα υπεύθυνο βήμα στη μείωση της ρύπανσης του περιβάλλοντος,
- μειώνονται οι κίνδυνοι για την προσωπική ασφάλεια, επειδή ατυχήματα από σπάσιμο γυαλικών ή φωτιά σχεδόν εξαλείφονται. Επίσης πολλά κλασικά πειράματα που χρησιμοποιούν επικίνδυνα αντιδραστήρια, π.χ. βρώμιο, μπορούν ν' αντικατασταθούν με πειράματα σε μικροκλίμακα και να γίνονται άφοβα από τους μαθητές,
- η διαδικασία των πειραμάτων είναι ευκολότερη, οπότε μειώνεται και ο χρόνος πραγματοποίησης κάθε πειράματος (π.χ. λιγότερα ή καθόλου πλυσίματα). Έτσι διάφορες οργανικές συνθέσεις μεγάλης διάρκειας, γίνονται εύκολα σχολικά πειράματα,
- πολλές φορές ορισμένες χημικές αντιδράσεις με μικρούς όγκους διαλυμάτων γίνονται καλύτερα, παρά αν χρησιμοποιηθούν μεγαλύτερες ποσότητες σε δοκιμαστικούς σωλήνες ή ποτήρια. Απαιτούν όμως πιο προσεκτική παρατήρηση, κάτι που είναι άλλωστε απαραίτητο για κάθε επιστημονική προσπάθεια,
- προσφέρουν μεγαλύτερη ποικιλία εργαστηριακών πειραμάτων, οι μαθητές μπορούν να αυτοσχεδιάσουν, οπότε αποκτούν ευκολότερα εργαστηριακή συνείδηση, ανεξαρτησία και άνεση.

Ορισμένες φορές ένα πείραμα σε μικροκλίμακα γίνεται θεαματικό πείραμα επίδειξης με προβολέα, αν τοποθετήσουμε την πλαστική διαφάνεια πάνω στην τράπεζα του προβολέα διαφανειών και ρίξουμε πάνω στη διαφάνεια περισσότερες σταγόνες (3-4 σταγόνες) από τα αντιδραστήρια του πειράματος που εκτελούμε.

Είναι γεγονός ότι ένα καλά στημένο πείραμα σε απαγωγό ή πίσω από προστατευτικό κάλυμμα ασφαλείας μακριά από τους μαθητές ή ένα πείραμα με μεγάλη χρονική διάρκεια χωρίς άμεσα ορατά αποτελέσματα, είναι λιγότερο εντυπωσιακό και διδακτικό από ένα πείραμα με απλά όργανα χωρίς περίπλοκη συναρμολόγηση και με εύκολη πειραματική διαδικασία, που γίνεται γρήγορα από τους μαθητές ή κοντά σ' αυτούς και μπορεί να επαναληφθεί ασφαλώς και εύκολα.

Όργανα που χρησιμοποιούνται στα πειράματα χημείας σε μικροκλίμακα

Τα όργανα που χρησιμοποιούνται στα πειράματα μικροκλίμακας είναι:

- **Σταγονόμετρα πλαστικά.**

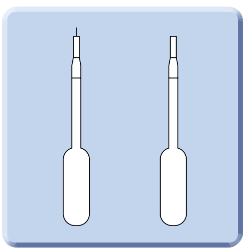
- **Ράβδοι ανάδευσης.** Οι γυάλινες ράβδοι, ανάδευσης αντικαθίστανται από πλαστικά καλαμάκια (πορτοκαλάδας).

- **Διαφανή πλαστικά φύλλα** ή διαφάνειες, που χρησιμοποιούνται και στον προβολέα διαφανειών, OHP, αντικαθιστούν τους δοκιμαστικούς σωλήνες.

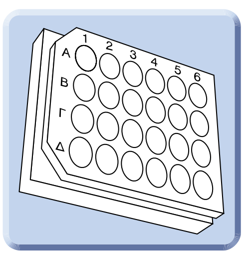
Οι μαθητές τοποθετούν πάνω στη διαφάνεια 1-2 σταγόνες διαλυμάτων για να γίνουν οι αντιδράσεις. Οι διαφάνειες αυτές όταν δεν χρησιμοποιούνται ισχυρά οξέα ή ιώδιο οπότε βάφονται, μπορούν να καθαριστούν με μαλακό χαρτί ή ύφασμα και να ξαναχρησιμοποιηθούν.

Φυσικά το σχήμα των σταγόνων στα διάφορα υδατικά διαλύματα ποικίλει και μπορεί επιπλέον να δώσει στους μαθητές ενδιαφέρουσες ιδέες, όπως για τις συνέπειες του δεσμού υδρογόνου ή της επιφανειακής τάσης.

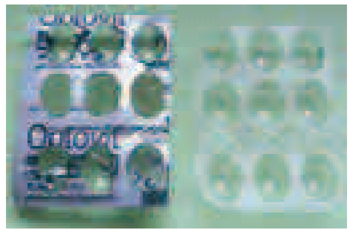
- **Πλαστικά σιφώνια** (plastic pipettes) χωρητικότητας 1 mL ή 2 mL. Αυτά τα πλαστικά σιφώνια εκτός από σιφώνια μπορούν να έχουν και άλλες χρήσεις. Αν τα κόψουμε και τα ξαναδιαμορφώσουμε μπορούμε να φτιάξουμε μικρότερα σιφώνια, σπάτουλες, χωνιά διήθησης, καθώς και μικρές φιάλες αντιδραστηρίων.



- **Πλαστικός δίσκος με κοιλότητες** ή **κυψελίδες** (plastic well plate ή cell culture cluster). Ο αριθμός των κοιλοτήτων (κυψελίδων) ποικίλει, πλέον χρήσιμος είναι αυτός που αποτελείται από 24 κοιλότητες χωρητικότητας περίπου 3 mL η καθεμία. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πειράματα οργανικής χημείας, χημικής ισορροπίας, ταχύτητας χημικών αντιδράσεων ή σε πειράματα όπου εμφανίζονται διάφορα χρώματα.



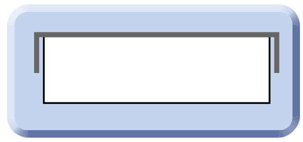
Οι πλαστικοί δίσκοι με κυψελίδες (κοιλότητες) που κυκλοφορούν στο εμπόριο, μπορούν ν' αντικατασταθούν από πλαστικές θήκες (blister packing) που χρησιμοποιούνται στη συσκευασία χαπιών, μαστίχας κ.λπ. Όταν με πίεση απομακρυνθεί το περιεχόμενό τους, σχηματίζεται «δίσκος με κυψελίδες (κοιλότητες)», ιδανικός για πειράματα σε μικροκλίμακα και ανάλογα με το μέγεθος, κάθε κοιλότητας, μπορεί να δεχθεί όγκο υγρού 1 έως 3 mL. Οι θήκες από τα χάπια ή τις μαστίχες καλύπτονται συνήθως με λεπτό αλουμινόχαρτο, που μπορεί εύκολα ν' απομακρυνθεί με τρίψιμο ή και με αραιό οξύ. Εάν οι κοιλότητες έχουν παραμορφωθεί, μπορούν με πίεση να επανέλθουν στην αρχική τους μορφή.



- **Πλαστικά κουτάκια από φωτογραφικά φιλμς** που αντικαθιστούν τα δοχεία αντιδραστηρίων.

- **Πλαστικά τριβλία petri** (plastic petri dishes) με καπάκι, με διάμετρο περίπου 4,5 cm ή 9 cm.

Το τριβλίο petri είναι μικρό ρηχό δοχείο με καπάκι που κλείνει χαλαρά, γυάλινο ή πλαστικό. Χρησιμοποιείται ειδικά στη μικροβιολογία και ονομάστηκε έτσι από τον Ιούλιο Petri, γερμανό βακτηριολόγο που πέθανε το 1921.



- **Σύριγγες** διαφόρων μεγεθών ή σύριγγες ινσουλίνης (γυάλινες ή πλαστικές) οι οποίες αντικαθιστούν τα σιφώνια μέτρησης και τους ογκομετρικούς κυλίνδρους.

- **Βελόνες σύριγγας** που στην άκρη φέρουν μεταλλικό ή πλαστικό σύνδεσμο για να συνδέονται σταθερά με τη σύριγγα, αντικαθιστούν τους λεπτούς γυάλινους σωλήνες και χρησιμοποιούνται για συνδέσεις.

- **Γυάλινα φιαλίδια** διαφόρων μεγεθών και συγκεκριμένου όγκου, με λαστιχένιο πώμα (από νοσοκομεία ή γιατρούς), αντικαθιστούν τις γυάλινες φιάλες αντιδραστηρίων. (Το γυαλί και το λαστιχένιο πώμα είναι εξαιρετικής ποιότητας).

- **Σταγονομετρικές φιάλες**. Οι σταγονομετρικές φιάλες αντικαθίστανται από μικρά φιαλίδια, συνήθως πλαστικά, που περιέχουν φάρμακο (για τη μύτη, τα αυτιά ή τα μάτια) με διαμορφωμένο άκρο, ώστε να πέφτει το υγρό κατά σταγόνες. Αφού καθαριστούν καλά, μπορούν να γεμίσουν με οργανικά ή ανόργανα υγρά αντιδραστήρια. Εκτός από την ετικέτα όπου θα αναγράφεται το περιεχόμενό τους, καλό είναι να αναφέρεται και το σύμβολο επικινδυνότητας.

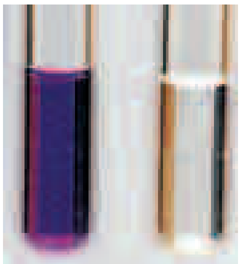
Παρακάτω περιγράφεται το ίδιο πείραμα με τον παραδοσιακό τρόπο (σε μακροκλίμακα) και σε μικροκλίμακα, για να γίνει σύγκριση των δύο μεθόδων.

Πείραμα

Αντιδράσεις οξειδοαναγωγής με υπερμαγγανικό κάλιο σε όξινο περιβάλλον

1. Οξείδωση Na_2SO_3 2. Οξείδωση KI 3. Οξείδωση $FeSO_4$ 4. Οξείδωση $(COONa)_2$

*Οι αντιδράσεις οξειδοαναγωγής είναι μια κατηγορία αντιδράσεων που περιλαμβάνουν τη μεταφορά ηλεκτρονίων από το ένα αντιδρών συστατικό στο άλλο, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται ο αριθμός οξείδωσης των ατόμων μεταξύ των οποίων γίνεται η μεταφορά των ηλεκτρονίων. Το αντιδρών συστατικό που είναι ο δότης ηλεκτρονίων ονομάζεται **αναγωγικό**, ενώ ο δέκτης των ηλεκτρονίων ονομάζεται **οξειδωτικό**.*



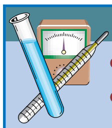
$KMnO_4$ $MnSO_4$

Το υπερμαγγανικό κάλιο, $KMnO_4$, σε όξινο περιβάλον με θειικό οξύ, δρα ως οξειδωτικό σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

$$2KMnO_4(aq) + 3H_2SO_4(aq) \longrightarrow 2MnSO_4(aq) + K_2SO_4(aq) + 3H_2O(l) + \frac{5}{2}O_2(g)$$

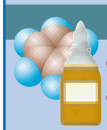
Το διάλυμα του $KMnO_4$ έχει χαρακτηριστικό ιώδες χρώμα. Σε μία αντίδραση οξειδοαναγωγής με οξειδωτικό το $KMnO_4$, ανάγεται το $KMnO_4$ και σχηματίζεται το άχρωμο $MnSO_4$, οπότε το τέλος της αντίδρασης διαπιστώνεται εύκολα από τον αποχρωματισμό του διαλύματος.
***Προσοχή:** Για την οξίνιση των διαλυμάτων του υπερμαγγανικού καλίου ΠΡΕΠΕΙ να αποφεύγεται το υδροχλωρικό οξύ HCl, γιατί θα έχουμε οξείδωση των ιόντων Cl^- προς στοιχειακό Cl_2, καθώς και το νιτρικό οξύ, HNO_3, γιατί το ίδιο το HNO_3 είναι επίσης οξειδωτικό.*

1ος τρόπος ΜΑΚΡΟΚΛΙΜΑΚΑ



Όργανα - Συσκευές

- Δοκιμαστικοί σωλήνες (4)
- Σιφώνια μέτρησης ή σταγονόμετρα (4)

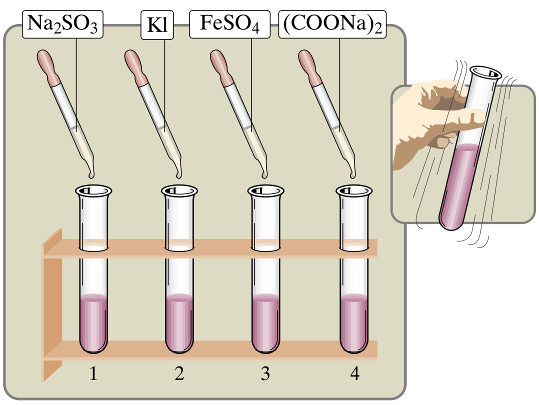


Αντιδραστήρια - Υλικά

- Υπερμαγγανικό κάλιο. $KMnO_4$*(aq)* 0,01 M
- Θειικό οξύ, H_2SO_4*(aq)* 1 M
- Θειώδες νάτριο, Na_2SO_3*(aq)* 0,1 M
- Ιωδιούχο κάλιο, KI*(aq)* 0,1 M
- Θειικός σίδηρος (ΙΙ), $FeSO_4$*(aq)* ή άλας του Mohr*, 0,1 M
- Οξαλικό νάτριο, $(COONa)_2$*(aq)* 0,1 M

* Το διάλυμα $FeSO_4$ πρέπει να είναι πρόσφατο γιατί αλλοιώνεται εύκολα. Είναι καλύτερα όταν θέλουμε άλας δισθενούς σιδήρου να χρησιμοποιούμε άλας του Mohr, $FeSO_4 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 6H_2O$, γιατί το διάλυμά του παραμένει σταθερό.

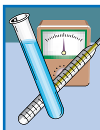
Πειραματική διαδικασία



- Σε τέσσερις πολύ καθαρούς δοκιμαστικούς σωλήνες ρίχνουμε από 3-4 mL $KMnO_4$*(aq)* στον καθένα και προσθέτουμε σ' όλους από 1 mL θειικού οξέος.
- Αριθμούμε τους σωλήνες και προσθέτουμε στον:
  1ο σωλήνα: 1 mL διαλύματος Na_2SO_3
  2ο σωλήνα: 1 mL διαλύματος KI
  3ο σωλήνα: 1 mL διαλύματος $(COONa)_2$
  4ο σωλήνα: 1 mL διαλύματος $FeSO_4$ (ή άλατος του Mohr)
- Ανακινούμε τους σωλήνες ισχυρά χωρίς να βάλουμε το δάχτυλό μας στο στόμιο του σωλήνα και τους αφήνουμε να ηρεμήσουν.
- Σημειώνουμε τις παρατηρήσεις μας στον παρακάτω πίνακα και συμπληρώνουμε τις χημικές εξισώσεις των αντιδράσεων οξειδοαναγωγής.

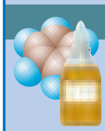
Σωλήνας	Περιεχόμενο του σωλήνα	Χρώμα	Προσθήκη	Χρώμα
1os	$KMnO_4$*(aq)* + H_2SO_4*(aq)*		Na_2SO_3*(aq)*	
2os	$KMnO_4$*(aq)* + H_2SO_4*(aq)*		KI*(aq)*	
3os	$KMnO_4$*(aq)* + H_2SO_4*(aq)*		$FeSO_4$*(aq)*	
4os	$KMnO_4$*(aq)* + H_2SO_4*(aq)*		$(COONa)_2$*(aq)*	

2ος τρόπος ΜΙΚΡΟΚΛΙΜΑΚΑ



Όργανα - Συσκευές

- Δοκιμαστικός σωλήνας
- Φύλλο εργασίας
- Πλαστική διαφάνεια
- Πλαστικά σιφώνια
- Πλαστικά καλαμάκια



Αντιδραστήρια - Υλικά

- Υπερμαγγανικό κάλιο. $KMnO_4(aq)$ 0,01 M
- Θειικό οξύ, $H_2SO_4(aq)$ 2 M
- Θειώδες νάτριο, $Na_2SO_3(aq)$ 0,1 M
- Ιωδιούχο κάλιο, $KI(aq)$ 0,1 M
- Οξαλικό νάτριο, $(COONa)_2(aq)$ 0,1 M
- Άλας του Mohr, $FeSO_4 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 6H_2O(aq)$ 0,1 M

Πειραματική διαδικασία

Σε δοκιμαστικό σωλήνα ρίχνουμε περίπου 4 mL υπερμαγγανικού καλίου και 1 mL θειικού οξέος.

Σε λευκό φύλλο εργασίας (φύλλο τετραδίου) σχεδιάζουμε μικρά κουτάκια, τα αριθμούμε και γράφουμε τα αντιδραστήρια που θα χρησιμοποιήσουμε, όπως φαίνεται παρακάτω.

Τοποθετούμε μια καθαρή διαφάνεια πάνω από αυτό το φύλλο εργασίας. Πάνω στη διαφάνεια σε κάθε κουτάκι, τοποθετούμε μια σταγόνα από το μίγμα $KMnO_4(aq)$ + $H_2SO_4(aq)$ που παρασκευάσαμε.

Προσθέτουμε κατόπιν μία σταγόνα του αντιδραστηρίου που αναγράφεται στην αντίστοιχη θέση, πάνω στις σταγόνες που έχουμε ήδη τοποθετήσει και μ' ένα πλαστικό καλαμάκι αναμιγνύουμε

Σημειώνουμε τις παρατηρήσεις μας και γράφουμε τις αντίστοιχες χημικές εξισώσεις.

Αντιδραστήρια	Χρώμα	Προσθήκη	Χρώμα
$KMnO_4(aq)$ + $H_2SO_4(aq)$	1	$Na_2SO_3(aq)$	1
$KMnO_4(aq)$ + $H_2SO_4(aq)$	2	$KI(aq)$	2
$KMnO_4(aq)$ + $H_2SO_4(aq)$	3	$FeSO_4(aq)$	3
$KMnO_4(aq)$ + $H_2SO_4(aq)$	4	$(COONa)_2(aq)$	4

Παρατηρήσεις

Παρατηρούμε ότι στο:

Σωληνάκι ή **κουτάκι 1:** το διάλυμα αποχρωματίζεται γρήγορα, επειδή σχηματίζεται το άχρωμο $MnSO_4(aq)$:

$$2KMnO_4(aq) + 5Na_2SO_3(aq) + 3H_2SO_4(aq) \longrightarrow K_2SO_4(aq) + 2MnSO_4(aq) + 5Na_2SO_4(aq) + 3H_2O(l)$$

Σωληνάκι ή **κουτάκι 2:** το διάλυμα χρωματίζεται κίτρινο, εξαιτίας της παραγωγής ιωδίου I_2 σε υδατικό διάλυμα:

$$2KMnO_4(aq) + 10KI(aq) + 8H_2SO_4(l) \longrightarrow 6K_2SO_4(aq) + 2MnSO_4(aq) + 5I_2(aq) + 8H_2O(l)$$

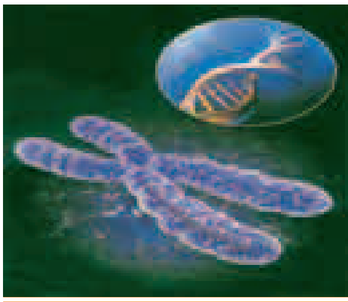
Σωληνάκι ή **κουτάκι 3:** το διάλυμα αποχρωματίζεται:

$$2KMnO_4(aq) + 10FeSO_4(aq) + 8H_2SO_4(aq) \longrightarrow K_2SO_4(aq) + 2MnSO_4(aq) + 5Fe_2(SO_4)_3(aq) + 8H_2O(l)$$

Σωληνάκι ή **κουτάκι 4:** το διάλυμα αποχρωματίζεται πολύ αργά, επειδή τα έγχρωμα υπερμαγγανικά ιόντα μετατρέπονται στα άχρωμα ιόντα του δισθενούς μαγγανίου:

$$2KMnO_4(aq) + 5(COONa)_2(aq) + 8H_2SO_4(aq) \longrightarrow K_2SO_4(aq) + 2MnSO_4(aq) + 5Na_2SO_4(aq) + 10CO_2(aq) + 8H_2O(l)$$

Η αντίδραση επιταχύνεται όταν σχηματισθεί ελάχιστη ποσότητα θειικού μαγγανίου, $MnSO_4$, που δρα ως καταλύτης, αν περάσει κάποιος χρόνος από την αρχή της αντίδρασης δηλαδή έχουμε **αυτοκατάλυση**. Αν το διάλυμα θερμανθεί ή αν προσθέσουμε έναν κόκκο $MnSO_4$ η αντίδραση γίνεται γρήγορα.



Ο 2ος ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ MENDEL ΔΙΕΥΚΟΛΥΝΕΙ ΤΗ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΕΝΕΤΙΚΗΣ

Του **Λάζαρου Γ. Μαλή**, Βιολόγου

Ο 2ος νόμος του Mendel –ο οποίος απορρέει από την τυχαία διάταξη των ζευγών των ομολόγων χρωμοσωμάτων κατά τη μετάφαση της α′ μειωτικής διαίρεσης– αναφέρει ότι τα αλληλόμορφα μιας γενετικής θέσης που ελέγχουν έναν χαρακτήρα, μεταβιβάζονται ανεξάρτητα από τα αλληλόμορφα μιας άλλης γενετικής θέσης που ελέγχουν έναν άλλο χαρακτήρα. **(Απαραίτητη προϋπόθεση είναι ότι αναφερόμαστε σε 2 ή και περισσότερες γενετικές θέσεις, που βρίσκονται σε διαφορετικά ζεύγη ομολόγων χρωμοσωμάτων)**. Το γεγονός αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως «εργαλείο» για την εύκολη λύση –φαινομενικά δύσκολων– ασκήσεων γενετικής. Παρακάτω δίνονται ορισμένες εφαρμογές, στις οποίες ο συντελεστής δυσκολίας βαθμιαία αυξάνεται.

Εφαρμογή 1

Έστω ότι Κ, κ είναι αλληλόμορφα που ελέγχουν αντίστοιχα το πράσινο και κίτρινο χρώμα του σπέρματος στο Μοσχομπίζελο, ενώ Λ, λ είναι αλληλόμορφα που ελέγχουν αντίστοιχα την λεία και τη ρυτιδωμένη υφή του σπέρματος. Να βρεθεί η Φαινοτυπική Αναλογία (Φ.Α.) των απογόνων από μια διασταύρωση ατόμων που είναι ετερόζυγα και για τους 2 χαρακτήρες (χρώμα και υφή σπέρματος).

Λύση

P♀ ΚκΛλ⊗ΚκΛλ♂

F_1:

12/16Κ-	9/16 Κίτρινα	- **Λεία**	(Κ-Λ-)	12/16Λ-
3Κ- :1κκ	3/16 Κίτρινα	- **ρυτιδωμένα**	(Κ-λλ)	3Λ- :1λλ
4/16κκ	3/16 πράσινα	- **Λεία**	(κκΛ-)	4/16λλ
	1/16 πράσινα	- **ρυτιδωμένα**	(κκλλ)	

Παρατηρούμε ότι η Φ.Α. του διυβριδισμού (9:3:3:1), είναι αποτέλεσμα σύνθεσης των επιμέρους Φ.Α. μονοϋβριδισμού (3:1), που προκύπτουν αν μελετήσουμε τον κάθε χαρακτήρα ξεχωριστά. Σχηματικά αυτό φαίνεται παρακάτω:

P♀ ΚκΛλ⊗ΚκΛλ♂

1η διασταύρωση		**2η διασταύρωση**
P_1♀Κκ⊗Κκ♂		P_2♀Λλ⊗Λλ♂
F_1: 3/4 Κ-	⊗	F_1': 3/4 Λ-
1/4 κκ		1/4 λλ

ΣΥΝΟΛΙΚΑ στην F_1

Κ-Λ- : 9/16 (3/4 Κ-⊗3/4 Λ-)
Κ-λλ : 3/16 (3/4 Κ-⊗1/4 λλ)
κκΛ- : 3/16 (1/4κκ⊗3/4 Λ-)
κκλλ : 1/16 (1/4 κκ⊗1/4 λλ)

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστεί η Φ.Α. των απογόνων από μια διασταύρωση ατόμων που είναι ετερόζυγα για αλληλόμορφα 3 γενετικών θέσεων, τα οποία έχουν σχέση επικρατούς - υπολειπόμενου.

Λύση

Έστω (Α, α), (Β, β), (Γ, γ) τα ζεύγη των αλληλομόρφων των 3 γενετικών θέσεων. Η διασταύρωση είναι:

P♀ ΑαΒβΓγ⊗ΑαΒβΓγ♂

1η διασταύρωση		**2η διασταύρωση**		**3η διασταύρωση**
P_1♀Αα⊗Αα♂		P_1♀Ββ⊗Ββ♂		P_2♀Γγ⊗Γγ♂
F_1: 3/4 Α-	⊗	F_1': 3/4 Β-	⊗	F_1'': 3/4 Γ-
1/4 αα		1/4 ββ		1/4 γγ

ΣΥΝΟΛΙΚΑ στην F_1

Α-Β-Γ- : 27/64 (3/4 Α-⊗3/4 Β-⊗3/4 Γ-)
Α-Β-γγ : 9/64 (3/4 Α-⊗3/4 Β-⊗1/4 γγ)
Α-ββΓ- : 9/64 (3/4 Α-⊗1/4 ββ⊗3/4 Γ-)

Α-ββγγ : 3/64 (3/4 Α-⊗1/4 ββ⊗1/4 γγ)
ααΒ-Γ- : 9/64 (1/4 αα⊗3/4 Β-⊗3/4 Γ-)
ααΒ-γγ : 3/64 (1/4 αα⊗3/4 Β-⊗1/4 γγ)
ααββΓ- : 3/64 (1/4 αα⊗1/4 ββ⊗3/4 Γ-)
ααββγγ : 1/64 (1/4 αα⊗1/4 ββ⊗1/4 γγ)

- **Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τους γονότυπους των ατόμων που θα προκύψουν από μία διασταύρωση, όπως φαίνεται στις εφαρμογές 3 και 4.**

Εφαρμογή 3

Να βρεθεί η αναλογία των απογόνων της διασταύρωσης:

Ρ♀ ΑαΒβΓγΔδΕεΖζΗηΘθ⊗ΑαΒβΓγΔδΕεΖζΗηΘθ♂

που έχουν ίδιο γονότυπο με τους γονείς τους.

Λύση

Ρ♀ ΑαΒβΓγΔδΕεΖζΗηΘθ⊗ΑαΒβΓγΔδΕεΖζΗηΘθ♂

1η διασταύρωση		**2η διασταύρωση**		**8η διασταύρωση**
P_1♀Αα⊗Αα♂	⊗	P_1♀Ββ⊗Ββ♂	⊗....... ⊗	P_8♀Θθ⊗Θθ♂
F_1: 2/4 Αα		F_1: 2/4 Ββ		F_1 : 2/4 Θθ

ΣΥΝΟΛΙΚΑ στην F_1

ΑαΒβΓγΔδΕεΖζΗηΘθ= $\underbrace{\text{2/4 Αα⊗2/4 Ββ⊗...⊗2/4 Θθ}}_{\text{8 φορές}}$= $(2/4)^2$

Εφαρμογή 4

Να βρεθεί η αναλογία των απογόνων της διασταύρωσης:

Ρ♀ ΑαΒΒΓγΔδεε⊗ΑαΒβΓγΔδΕΕ♂,

που θα έχουν γονότυπο

ααΒΒΓγΔΔΕε

Λύση

Ρ♀ ΑαΒβΓγΔδεε⊗ΑαΒβΓγΔδΕΕ♂

1η διασταύρωση		**2η διασταύρωση**		**3η διασταύρωση**		**4η διασταύρωση**		**5η διασταύρωση**
P_1♀Αα⊗Αα♂	⊗	P_2♀ΒΒ⊗Ββ♂	⊗	P_3♀Γγ⊗Γγ♂	⊗	P_4♀Δδ⊗Δδ♂	⊗	P_5♀εε⊗ΕΕ♂
F_1: 1/4 αα		F_1: 1/2 ΒΒ		F_1: 2/4 Γγ		F_1: 1/4 ΔΔ		F_1: 1/4 Εε

ΣΥΝΟΛΙΚΑ στην F_1

ααΒΒΓγΔΔΕε = 1/4⊗1/2⊗2/4⊗1/4⊗1 = 2/128

- Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, χρησιμοποιήθηκαν αλληλόμορφα που έχουν σχέση επικρατούς - υπολειπόμενου. Είναι ευνόητο ότι η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για αλληλόμορφα που έχουν οποιαδήποτε άλλη σχέση (ατελώς επικρατή, συνεπικρατή) ή και σε πολλαπλά αλληλόμορφα. Ας δούμε λοιπόν την επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή 5

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός διαφορετικών φαινοτύπων που θα προκύψουν στους απογόνους, από μια διασταύρωση ατόμων που είναι ετερόζυγα για αλληλόμορφα 2 διαφορετικών γενετικών θέσεων;

Λύση

Εξετάζουμε πρώτα τα αλληλόμορφα γονίδια της μίας γενετικής θέσης. Οι σχέσεις των αλληλομόρφων γονιδίων, μπορεί να είναι:

α) Επικρατές - υπολειπόμενο

Κ = κίτρινο χρώμα σπέρματος στο Μοσχομπίζελο
κ = πράσινο χρώμα σπέρματος στο Μοσχομπίζελο

Ρ♀ Κκ⊗Κκ♂
F_1: ΚΚ: 2Κκ: κκ
3 Κίτρινα: 1 πράσινο

- Προκύπτουν άτομα με 2 διαφορετικούς φαινότυπους (κίτρινο - πράσινο)

β) Ατελώς επικρατή

K^1 = κόκκινο χρώμα άνθους
K^2 = λευκό χρώμα άνθους
K^1K^2 = κόκκινο χρώμα
K^1K^2 = ροζ χρώμα
K^2K^2 = λευκό χρώμα

Ρ♀ K^1K^2 ⊗ K^1K^2♂
F_1 : K^1K^1 : $2K^1K^2$: K^2K^2
1 κόκκινο : 2 ροζ : 1 λευκό

- Προκύπτουν άτομα με 3 διαφορετικούς φαινότυπους (κόκκινο - ροζ - λευκό).

γ) Συνεπικρατή

I^K = κόκκινο χρώμα
$I^Λ$ = λευκό χρώμα

$K^K K^K$ = κόκκινο χρώμα
$I^K I^Λ$ = ερυθρόλευκο χρώμα
$I^Λ I^Λ$ = λευκό χρώμα

Ρ♀ $I^K I^Λ$ ⊗ $I^K I^Λ$♂
F_1: $I^K I^K$: $2I^K I^Λ$: $I^Λ I^Λ$
1 κόκκινο, 2 ερυθρόλευκο, 1 λευκό

- Προκύπτουν 3 διαφορετικοί φαινότυποι (κόκκινο, ερυθρόλευκο, λευκό).

δ) Πολλαπλά αλληλόμορφα

I^A = ομάδα αίματος Α

I^B = ομάδα αίματος Β
ι = ομάδα αίματος Ο

$$P \ ♀ \ I^A\iota \otimes I^B\iota \ ♂$$

$$F_1: \ I^AI^B : I^A\iota : I^B\iota : \iota\iota$$
$$1AB : 1A : 1B : 1O$$

- Προκύπτουν 4 διαφορετικοί φαινότυποι (ομάδες αίματος Α, Β, ΑΒ και Ο)

Είναι λοιπόν ευνόητο, ότι αν λάβουμε υπόψη μας και τα αποτελέσματα από τις αντίστοιχες περιπτώσεις (α, β, γ, δ) της δεύτερης γενετική θέσης, μπορούμε να έχουμε τον εξής συγκεντρωτικό πίνακα:

1η ΓΕΝΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ		2η ΓΕΝΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ	
• Σχέση αλληλομόρφων γονιδίων	• Μέγιστος αριθμός φαινοτύπων	• Μέγιστος αριθμός φαινοτύπων	• Σχέση αλληλομόρφων γονιδίων
Α Επικρατές - υπολειπόμενο	2	2	Α′ Επικρατές - υπολειπόμενο
Β Ατελώς επικρατή ή συνεπικρατή	3	3	Β′ Ατελώς επικρατή ή συνεπικρατή 3
Γ Πολλαπλά αλληλόμορφα	4	4	Γ′ Πολλαπλά αλληλόμορφα

ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΕ ΔΙΥΒΡΙΔΙΣΜΟ

• Σχέσεις αλληλομόρφων	• Μέγιστος Αριθμός Φαινοτύπων
I Και στις 2 γενετικές θέσεις τα αλληλόμορφα έχουν σχεση επικρατούς - υπολειπόμενου Α – Α′	2 Χ 2 = 4
II Στη 1 γενετική θέση τα αλληλόμορφα έχουν σχέση επικρατούς - υπολειπόμενου και στην άλλη ατελούς επικρατών ή συνεπικρατών Α – Β′ ή Β – Α′	2 Χ 3 = 6
III Στη 1 γενετική θέση τα αλληλόμορφα έχουν σχέση επικρατούς - υπολειπόμενου και στην άλλη είναι πολλαπλά αλληλόμορφα Α – Γ′ ή Α′ – Γ	2 Χ 4 = 8
IV Και στις 2 γενετικές θέσεις τα αλληλόμορφα έχουν σχέση ατελώς επικρατών ή συνεπικρατών Β – Β′	3 Χ 3 = 9
V Στη 1 γενετική θέση τα αλληλόμορφα έχουν σχέση ατελώς επικρατών ή συνεπικρατών και στην άλλη είναι πολλαπλά αλληλόμορφα Β – Γ′ ή Β′ – Γ	3 Χ 4 = 12
VI Και στις 2 γενετικές θέσεις υπάρχουν πολλαπλά αλληλόμορφα Γ – Γ′	4 Χ 4 = 16

Είναι φανερό ότι η διαδικασία που προηγήθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αντίστροφα. Αν για παράδειγμα από μία διασταύρωση διυβριδισμού προκύψουν στους απογόνους **9** διαφορετικοί φαινότυποι (= **3⊗3**), τότε ισχύει:

α. Οι 2 γενετικές θέσεις βρίσκονται σε 2 διαφορετικά ζεύγη ομολόγων χρωμοσωμάτων (παίρνουμε όλους τους συνδυασμούς φαινοτύπων στους απογόνους).

β. Τα άτομα είναι ετερόζυγα και για τις 2 γενετικές θέσεις.

γ. Και στις 2 γενετικές θέσεις τα αλληλόμορφα έχουν σχέση ατελώς επικρατών ή συνεπικρατών.

• ΕΠΙΜΥΘΙΟ
(ή πώς ο δεύτερος νόμος του Mendel διευκολύνει τη λύση ασκήσεων γενετικής)

Όταν σε μια διασταύρωση μας δίνουν τους φαινότυπους των απογόνων και μας ζητούν τους γονότυπους των γονέων, εστιάζουμε την προσοχή μας σε κάθε ιδιότητα ξεχωριστά. Δίνονται 2 παραδείγματα τέτοιων ασκήσεων (μία λυμένη και μία άλυτη).

1ο Παράδειγμα

Το μαύρο χρώμα στα κουνέλια οφείλεται στο επικρατές αλληλόμορφο Μ, ενώ το καστανό στο αλληλόμορφό του μ. Το κοντό τρίχωμα οφείλεται στο επικρατές αλληλόμορφο Κ, ενώ το μακρύ στο αλληλόμορφό του κ. Διασταυρώνουμε θηλυκά άτομα (που έχουν όλα τον ίδιο γονότυπο), με αρσενικά άτομα (που έχουν επίσης όλα τον ίδιο γονότυπο). Στην F_1 πήραμε τα ακόλουθα άτομα:

310 μαύρα με κοντό τρίχωμα
290 καστανά με κοντό τρίχωμα
295 μαύρα με μακρύ τρίχωμα
302 καστανά με μακρύ τρίχωμα

Να βρείτε τους γονότυπους των γονέων.

Λύση

Από τους απογόνους προκύπτει:

- Πήραμε όλους τους συνδυασμούς φαινοτύπων (μαύρα - κοντό, μαύρα - μακρύ, καστανά - κοντό, καστανά - μακρύ), άρα οι 2 γενετικές θέσεις βρίσκονται σε 2 διαφορετικά ζεύγη ομολόγων χρωμοσωμάτων (2ος νόμος του Mendel).
- Δεν υπάρχουν διαφορές στις Φ.Α. μεταξύ ♀ και ♂ απογόνων, άρα οι γενετικές θέσεις βρίσκονται σε αυτοσωμικά χρωμοσώματα.

Εστιάζουμε την προσοχή μας σε κάθε ιδιότητα ξεχωριστά:

1. Μήκος τριχώματος

Απόγονοι → 605 Μαύρα: 592 καστανά (1:1)

↓

P_1 Μμ⊗μμ

2. Χρώμα τριχώματος

Απόγονοι → 600 κοντό: 597 μακρύ (1:1)

↓

P_2 Κκ⊗κκ

Από τα **1** και **2** προκύπτει ότι οι γονότυποι των γονέων είναι:

P♀ ΜμΚκ⊗μμκκ♂
ή ♀ μμκκ⊗ΜμΚκ♂
ή ♀ Μμκκ⊗μμΚκ♂
ή ♀ μμΚκ⊗Μμκκ♂

} (Σύνθεση της P_1 και P_2)

2ο Παράδειγμα

Διασταυρώνουμε αρσενικά έντομα με κοκκινόασπρες πτέρυγες και μακριές σμήριγγες με θηλυκά που έχουν μακριές σμήριγγες και άσπρες πτέρυγες και παίρνουμε 164 άτομα που παρουσιάζουν τους εξής φαινότυπους:

32 αρσενικά με μακριές σμήριγγες και άσπρες πτέρυγες
32 θηλυκά με μακριές σμήριγγες και άσπρες πτέρυγες
31 αρσενικά με μακριές σμήριγγες και κοκκινόασπρες πτέρυγες
28 θηλυκά με μακριές σμήριγγες και κόκκινες πτέρυγες
10 αρσενικά με κοντές σμήριγγες και κοκκινόασπρες πτέρυγες
11 θηλυκά με κοντές σμήριγγες και άσπρες πτέρυγες
10 θηλυκά με κοντές σμήριγγες και κόκκινες πτέρυγες
10 αρσενικά με κοντές σμήριγγες και άσπρες πτέρυγες

Να εξηγήσετε τον τρόπο κληρονόμησης των γνωρισμάτων αυτών και να βρείτε τους γονότυπους των γονέων

Απάντηση

Μ = μακριές σμήριγγες
μ = κοντές σμήριγγες
Μ, μ αυτοσωμικά
I^K = κόκκινες πτέρυγες
I^A = άσπρες πτέρυγες
I^K, I^A = φυλοσύνδετα (XX→♂, XY→♀)

P♂ $X^{I^A}X^{I^K}$Μμ ⊗ X^{I^A}Y Μμ♀

ΑΣ ΑΠΑΛΛΑΓΟΥΜΕ ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΤΩΠΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ...

Του **Στέργιου Βλαχόπουλου**, Οικονομολόγου

Υποθέστε ότι διδάσκουμε στους μαθητές της Α′ Λυκείου το μάθημα «Αρχές Οικονομίας». Υποθέστε ακόμη ότι κατά την τρέχουσα εβδομάδα το αντικείμενο διδασκαλίας μας είναι το κεφάλαιο: «Χρήμα και Τραπεζικό Σύστημα». Υποθέστε, τέλος, ότι η μέθοδος διδασκαλίας μας θα είναι η ομαδο-συνεργατική και θα βασίζεται στην τεχνική των μικρο-ερευνών από τους μαθητές μας (Μέθοδος Project).

Α. Προετοιμασία της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό

Στο στάδιο αυτό μας ενδιαφέρει ως διδάσκοντες να βρούμε τρόπους που θα υποκινούν το ενδιαφέρον των μαθητών για το αντικείμενο της διδασκαλίας, που θα τους εμπλέκουν ενεργητικά στην αναζήτηση και στην παραγωγή της σχετικής γνώσης.

1ο ΒΗΜΑ Προκαθορίζουμε τους διδακτικούς στόχους ανά ενότητα

1η Ενότητα: Ανταλλαγές χωρίς χρήμα – Ανταλλαγές με χρήμα

α) Να κατανοήσουν οι μαθητές:

- ότι κατά το απώτερο παρελθόν οι συναλλαγές μεταξύ των επιμέρους κοινωνιών ή κοινωνικών ομάδων ήταν πολύ περιορισμένες
- ότι οι περιορισμένες αυτές συναλλαγές είχαν συγκεκριμένες αιτίες (Κοινωνίες της αυτάρκειας και της αυτοκατανάλωσης, Κοινωνίες με ελάχιστο κοινωνικό καταμερισμό εργασιών).

β) Να κατανοήσουν οι μαθητές ότι κατά το παρελθόν οι συναλλαγές μεταξύ των ανθρώπων διέφεραν ως προς:

1. την ποσότητα
2. τη συχνότητα
3. την έκταση
4. τους τρόπους

γ) Να κατανοήσουν οι μαθητές τον **αντιπραγματισμό** ως μορφή ανταλλαγών και τις δυσκολίες του.

δ) Να κατανοήσουν οι μαθητές ότι το χρήμα με τις σημερινές μορφές του δεν είναι ένα αντικείμενο που πάντοτε χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι στις συναλλαγές τους (Ιστορία του Χρήματος).

ε) Να γνωρίσουν οι μαθητές τις παλαιότερες και τις σύγχρονες μορφές του χρήματος

- Το χρήμα-προϊόν, περιεκτικό χρήμα
- Παραστατικό χρήμα [Μεταλλικό χρήμα (Κέρματα), Χαρτονομίσματα]
- Πιστωτικό χρήμα (Επιταγή, Συναλλαγματική)
- Πλαστικό χρήμα (Πιστωτικές κάρτες)

2η Ενότητα: Τραπεζικό Σύστημα – Κεντρική Τράπεζα – Εμπορικές Τράπεζες

α) Να γνωρίσουν οι μαθητές:

- την προέλευση της λέξης «Τράπεζα» και τις δραστηριότητες των πρώτων τραπεζιτών.
- την εξέλιξη των τραπεζιτικών εργασιών από την εμφάνισή τους μέχρι σήμερα:

β) Να γνωρίσουν οι μαθητές:

Α. Τη σχέση: Τράπεζα και προνόμιο έκδοσης τραπεζογραμματίων

Β. Τις δραστηριότητες της κεντρικής τράπεζας

1. Καταθέσεις εμπορικών τραπεζών
2. Έλεγχος διατραπεζικού δανεισμού
3. Ρύθμιση βασικού επιτοκίου
4. Κανόνες χορήγησης δανείων
5. Νομισματικές ισοτιμίες
6. Δημόσια έσοδα – Δημόσιες δαπάνες

Γ. Τις δραστηριότητες των εμπορικών τραπεζών

1. Καταθέσεις όψεως
2. Καταθέσεις ταμιευτηρίου
3. Καταθέσεις προθεσμίας
4. Δάνεια προς επιχειρήσεις
5. Δάνεια προς καταναλωτές (Στεγαστικά – Καταναλωτικά)

6. Δάνεια προς το κράτος
7. Άλλες δραστηριότητες

2ο ΒΗΜΑ Επιλέγουμε τα υλικά - ερεθίσματα που θα προσφέρουμε στους μαθητές μας με στόχους:

– Να προσελκύσουμε το ενδιαφέρον τους
– Να επικεντρώσουμε την προσοχή τους

Παρατήρηση: Τα υλικά αυτά πρέπει:
– να εμπεριέχουν οπωσδήποτε φωτογραφίες και κείμενα
– να επιτυγχάνουν τη βιωματική επαφή με το αντικείμενο

Β. Έναρξη διδασκαλίας

Παροχή βιωματικών υλικών – ερεθισμάτων από τον διδάσκοντα σε ολόκληρη την τάξη

Πρώτη διδακτική ώρα

– Κυκλοφορούμε στην τάξη τόμους από μια νομισματική εγκυκλοπαίδεια και καταγράφουμε τις αντιδράσεις των μαθητών. Ζητάμε από τους μαθητές μας να εκφράσουν τις εντυπώσεις και τις παρατηρήσεις τους. Θα προκύψουν παρατηρήσεις, π.χ., για την τεράστια ποικιλία των νομισμάτων.
– Ζητούμε από τους μαθητές να αναζητήσουν κριτήρια με βάση τα οποία διαφοροποιούνται τα νομίσματα. Θα προκύψουν έτσι οι έννοιες του σχήματος, του βάρους, των μεταλλικών συστατικών τους, των εγχάρακτων απεικονίσεων κτλ.
– Ορισμένοι μαθητές θα αναρωτηθούν για τις τεχνικές κατασκευής των νομισμάτων. Άλλοι θα τονίσουν τη σχετικά πρόσφατη χρήση των χαρτονομισμάτων. Μερικοί θα πουν ότι οι γονείς τους έχουν στο σπίτι νομίσματα παλαιότερων εποχών και ίσως θελήσουν την επόμενη φορά να τα δείξουν στους συμμαθητές τους. Κάποιοι άλλοι θα θυμηθούν τα νομίσματα που είδαν σε κάποιο αρχαιολογικό μουσείο. Μερικοί θα αναρωτηθούν αν οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν πάντοτε χρήματα στις συναλλαγές τους. Άλλοι θα συνδέσουν το χρήμα με τις τράπεζες κτλ.

Σημείωση: Ο διδάσκων καταγράφει με επιγραμματικό τρόπο τα θέματα που έθιξαν οι μαθητές αντιδρώντας στο υλικό που προσφέρθηκε στην τάξη. Στα θέματα αυτά θα επικεντρωθεί το επόμενο μάθημα. Στόχος είναι μέσα από τις αντιδράσεις των μαθητών στα ερεθίσματα να αναδειχτούν δύο ή τρείς θεματικές ενότητες που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα τους. Αφού κατά την πρώτη διδακτική ώρα προκύψουν οι σχετικές θεματικές ενότητες, οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και οργανώνουν την ομαδική έρευνα καθοδηγούμενοι από το διδάσκοντα. Τελικός στόχος είναι να παράγουν οι ίδιοι οι μαθητές τη σχετική γνώση, παρά να τους προσφερθεί αυτή με τον παραδοσιακό τρόπο της μετωπικής διδασκαλίας.

Υποθέτουμε ότι από τις αντιδράσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας ο διδάσκων διαπιστώνει την ανάδειξη τριών κυρίως θεματικών ενοτήτων:

1η Οι ανταλλαγές των ανθρώπων στο χρόνο και το χώρο. Η οικονομία του Ροβινσώνα Κρούσου

2η Παλαιότερες και σύγχρονες μορφές χρήματος. Ορισμός, λειτουργίες και ιδιότητες του χρήματος

3η Τραπεζικό σύστημα, Τραπεζικές δραστηριότητες, Καταθέσεις, Δάνεια

Υποθέτουμε ακόμη ότι οι μαθητές αποφάσισαν να δημοσιεύσουν τα συμπεράσματα των ερευνών τους στη σχολική ή στην τοπική εφημερίδα.

Με τα παραπάνω δεδομένα, ο διδάσκων κατασκευάζει ένα απλό ερωτηματολόγιο σχετικό με τις τρείς θεματικές ενότητες που προαναφέρθηκαν.

Δεύτερη διδακτική ώρα

Με την έναρξη της δεύτερης διδακτικής ώρας, μοιράζεται το ερωτηματολόγιο στους μαθητές. Ζητείται από αυτούς να επιλέξουν τη μία από τις τρείς θεματικές ενότητες που τους ενδιαφέρει περισσότερο. Η επεξεργασία των απαντήσεων του ερωτηματολογίου γίνεται από ομάδα μαθητών που αναλαμβάνει τη σχετική ευθύνη. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται τρείς ομάδες, κάθε μία από τις οποίες αναλαμβάνει να συγκεντρώσει υλικό για μια συγκεκριμένη θεματική ενότητα.

Τρίτη διδακτική ώρα

Κάθε μία από τις τρείς ομάδες καταλαμβάνει συγκεκριμένο χώρο μέσα στην τάξη, ορίζει ένα γραμματέα και τα μέλη της, μετά από σχετική παρότρυνση του διδάσκοντα, προσπαθούν να συνεισφέρουν ιδέες σχετικές με την έρευνα της θεματικής ενότητας που έχουν επιλέξει.

ΟΜΑΔΑ Α **Θεματική ενότητα:** ***Οι ανταλλαγές των ανθρώπων στο χρόνο και το χώρο. Η οικονομία του Ροβινσώνα Κρούσου***

Πρώτο σενάριο

Ο διδάσκων, για να προσανατολίσει την ομάδα, ρωτά τα μέλη της αν γνωρίζουν την «ιστορία» του Ρο-

βινσώνα Κρούσου. Αν κάποιος μαθητής γνωρίζει την «ιστορία» αυτή, του ζητείται να την αφηγηθεί στους άλλους. Στην περίπτωση που κανείς δε γνωρίζει ή δε θυμάται τη σχετική «ιστορία», ο διδάσκων προσφέρει στην ομάδα φωτοτυπημένα αποσπάσματα από το σχετικό βιβλίο και παρακινεί τους μαθητές να τα μελετήσουν. Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να «μπουν» στη θέση του Ροβινσώνα Κρούσου και να καταγράψουν τις ενέργειες θα έκαναν για να αντιμετωπίσουν τις ανάγκες τους στο ερημονήσι.

Δεύτερο σενάριο

Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να φανταστούν ότι ενώ ταξίδευαν με ένα πλοίο, ναυάγησαν σε κάποιο ερημονήσι. Στόχος της ομάδας ναυαγών είναι η οργάνωση της ζωής των μελών της στο ερημονήσι. Αφού περιγραφούν από τους μαθητές οι προσπάθειες αντιμετώπισης των βασικών αναγκών (τροφή, ενδυμασία, ασφάλεια, κατοικία), ο διδάσκων εισάγει ένα νέο δεδομένο: την ύπαρξη στο νησί μιας φιλειρηνικής φυλής. Πώς θα αναπτύξει η ομάδα σχέσεις με τη φυλή αυτή; Τι είδους ανταλλαγές μπορούν να γίνουν μεταξύ της ομάδας των ναυαγών και της φυλής με δεδομένο ότι η τελευταία δε γνωρίζει το χρήμα: Αν η ομάδα διαθέτει ένα προϊόν που δεν το έχει η φυλή του νησιού, ποιες δυσκολίες θα συναντήσει στην προσπάθεια να το ανταλλάξει με προϊόντα της φυλής αυτής;

Με την καθοδήγηση του διδάσκοντα, οι μαθητές, κατά τη διάρκεια της τρίτης διδακτικής ώρας θα παράγουν γνώση σχετικά με τις αυτάρκεις και αυτό-καταναλωτικές κοινωνίες του παρελθόντος. Θα συνειδητοποιήσουν τους λόγους για τους οποίους στις κοινωνίες αυτές, οι ανταλλαγές είναι σπάνιες και όταν συμβαίνουν, αφορούν ανταλλαγές ενός πράγματος με άλλο πράγμα και όχι με χρήμα. Θα τοποθετήσουν στο χρόνο το φαινόμενο του αντιπραγματισμού και θα αντιληφθούν τις δυσκολίες του.

Στη συνέχεια, τα μέλη της ομάδας, προκειμένου να ενημερώσουν τους υπόλοιπους συμμαθητές τους για τα αποτελέσματα της εργασίας τους, αποφασίζουν να συγκεντρώσουν πληροφορίες για τις πρωτόγονες κοινωνίες. Τις πληροφορίες αυτές θα τις παρουσιάσουν στην τάξη και θα τις επεξεργαστούν περαιτέρω κατά τη διάρκεια της τέταρτης διδακτικής ώρας.

ΟΜΑΔΑ Β — **Θεματική ενότητα:** ***Παλαιότερες και σύγχρονες μορφές χρήματος. Ορισμός, λειτουργίες και ιδιότητες του χρήματος***

Πρώτο Πρόβλημα

Ο διδάσκων για να προσανατολίσει την ομάδα θέτει στα μέλη της το εξής πρόβλημα: Ελένη έχεις πορτοκάλια και θέλεις να τα ανταλλάξεις με μήλα. Πέτρο έχεις μήλα και θέλεις να τα ανταλλάξεις με ψωμί. Γιώργο έχεις ψωμί και θέλεις να το ανταλλάξεις με πορτοκάλια. Με τα δεδομένα αυτά μπορείτε να κάνετε τις ανταλλαγές που σας ενδιαφέρουν;

Η ομάδα συζητά το πρόβλημα και διαπιστώνει ότι οι ανταλλαγές μεταξύ των τριών συμμαθητών είναι αδύνατες. Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να γράψουν ένα κείμενο όπου να εξηγούν τους λόγους για τους οποίους, κατά τη γνώμη τους, είναι αδύνατες οι παραπάνω συναλλαγές. Οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι ο βασικός λόγος που εμποδίζει τις ανταλλαγές είναι το γεγονός ότι δε συμπίπτουν οι επιθυμίες των τριών μαθητών.

Δεύτερο πρόβλημα

Στη συνέχεια, ο διδάσκων ρωτά π.χ., το Γιώργο και τον Αντώνη αν είναι διατεθειμένοι να ανταλλάξουν μεταξύ τους τα πέντε μολύβια που έχει ο ένας με το ένα CD που έχει ο άλλος. Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος συμφωνεί και ο Αντώνης διαφωνεί. Ο διδάσκων ζητά από την ομάδα να συζητήσει και να καταγράψει τους λόγους για τους οποίους δεν έγινε η ανταλλαγή των πραγμάτων μεταξύ των δύο συμμαθητών. Οι μαθητές θα αντιληφθούν εύκολα τα εξής:

Α) Για να γίνει μια ανταλλαγή πρέπει να συμπίπτουν οι επιθυμίες των ανθρώπων (Θέλω το προϊόν που έχεις και θέλεις το προϊόν που έχω)

Β) Οι άνθρωποι πρέπει να συμφωνούν στις ανταλλασσόμενες ποσότητες (Συμφωνία ότι π.χ., 10 μολύβια ανταλλάσσονται με 1 CD).

Τρίτο πρόβλημα

Οι μαθητές έχουν ήδη κατανοήσει τις δυσκολίες του αντιπραγματισμού και ο διδάσκων μπορεί να τροφοδοτήσει τον προβληματισμό της ομάδας με νέες πληροφορίες. Μοιράζει π.χ., το εξής κείμενο:

«Σε παλαιότερες εποχές οι άνθρωποι είχαν αποφασίσει να χρησιμοποιούν ποικίλα προϊόντα ως χρήματα. Τέτοια προϊόντα ήταν τα ζώα στη Μεσόγειο, τα αποξηραμένα ψάρια στη Νέα Γη, το τσάϊ στο Θιβέτ, ο καπνός στη Βιρτζίνια, τα κοχύλια στην Πολυνησία, το αλάτι κτλ. Είχαν συμφωνήσει π.χ., ότι το αλάτι θα είναι το προϊόν που θα χρησιμοποιείται και ως γενικό μέσο στις ανταλλαγές. Έτσι, ο άνθρωπος Χ που είχε πλεόνασμα υφάσματος, μπορούσε να ανταλλάξει το ύφασμα με οποιονδήποτε άνθρωπο Ψ που ήταν διατεθειμένος να του δώσει σε αντάλλαγμα καθορισμένη ποσότητα αλατιού. Κατέχοντας πλέον ο Χ αλάτι μπορούσε να το ανταλλάξει με άλλα προϊόντα».

Ο διδάσκων, μετά την ανάγνωση του συγκεκριμένου κειμένου από τους μαθητές, τους ζητά να συμ-

φωνήσουν ότι τα μολύβια θα είναι το προϊόν που όλοι αποδέχονται ως χρήμα. Στη συνέχεια τους ζητά να κάνουν εικονικές ανταλλαγές, χρησιμοποιώντας ως χρήμα τα μολύβια και να αναζητήσουν απαντήσεις στα ερωτήματα:

1ο Τα μολύβια ως χρήμα κάνουν τις ανταλλαγές τους πιο εύκολες και γιατί;

2ο Ποιες δυσκολίες θα αντιμετωπίζαμε σήμερα αν χρησιμοποιούσαμε ως χρήμα το αλάτι;

3ο Αν ως χρήμα χρησιμοποιήσουμε το χρυσάφι αντί του αλατιού ποιες θα είναι οι διαφορές;

Από τη σχετική συζήτηση οι μαθητές θα κατανοήσουν εύκολα την έννοια του χρήματος γενικώς και την έννοια του περιεκτικού χρήματος ειδικότερα. Θα αντιληφθούν ότι το χρήμα πρέπει να εξυπηρετεί όλες τις συναλλαγές, ότι δεν πρέπει να φθείρεται γρήγορα, ότι θα πρέπει να είναι διαιρετό σε μικρότερες μονάδες και ότι θα πρέπει να μεταφέρεται εύκολα.

Η τρίτη διδακτική ώρα ολοκληρώνεται με τον προγραμματισμό των εργασιών των μελών της ομάδας Β. Στόχος της ομάδας είναι να συγκεντρώσει πληροφορίες για τα είδη του χρήματος και τις λειτουργίες του και να τις παρουσιάσει στην τάξη κατά την τέταρτη διδακτική ώρα.

ΟΜΑΔΑ Γ — **Θεματική ενότητα: *Τραπεζικό σύστημα, Τραπεζικές δραστηριότητες. Καταθέσεις, Δάνεια***

Ο διδάσκων, για να προσανατολίσει τις εργασίες της ομάδας ζητά από τα μέλη της να κάνουν έναν κατάλογο με τις τράπεζες που γνωρίζουν και στη συνέχεια να καταγράψουν τις τραπεζικές εργασίες που γνωρίζουν. Είναι βέβαιο ότι ο κατάλογος των τραπεζών θα είναι ελλιπής και η περιγραφή των τραπεζικών εργασιών στοιχειώδης. Το βέβαιο είναι ότι θα καταγραφούν μερικές τράπεζες και θα εντοπιστούν οι δραστηριότητες των καταθέσεων και των δανείων. Τα ζητήματα αυτά θα είναι ερεθίσματα για περαιτέρω διερεύνηση από τους μαθητές.

Αν κριθεί απαραίτητο, ο διδάσκων προτείνει ένα κατάλογο μικρών ερευνών σχετικών με το τραπεζικό σύστημα:

α) Αναζήτηση πληροφοριών για την ίδρυση τραπεζών στην Ελλάδα από το 1833 και εντεύθεν (Εθνική Τράπεζα, Ιονική Τράπεζα, Αγροτική Τράπεζα, Κρατική Τράπεζα κτλ.)

β) Προέλευση της λέξης «τράπεζα», αρχικές δραστηριότητες, εξέλιξη δραστηριοτήτων

γ) Κατηγορίες τραπεζικών καταθέσεων

δ) Κατηγορίες τραπεζικών δανείων

ε) Ίδρυση και δραστηριότητες της Κρατικής-Κεντρικής τράπεζας (Τράπεζα Ελλάδας)

Οι μαθητές της ομάδας συζητούν και κατόπιν συμφωνίας αναλαμβάνουν την υλοποίηση των σχετικών ερευνών. Τα πορίσματα των ερευνών αυτών θα παρουσιάσουν στην τάξη κατά την τέταρτη διδακτική ώρα.

Τέταρτη διδακτική ώρα

Οι μαθητές των τριών ομάδων παρουσιάζουν τις εργασίες τους στην τάξη. Αν χρειαστεί, για τον ίδιο σκοπό διατίθενται δύο επιπλέον διδακτικές ώρες (πέμπτη και έκτη).

Κατά τη διάρκεια των παρουσιάσεων γίνονται ερωτήσεις, δίνονται απαντήσεις και διευκρινίσεις από τους μαθητές. Ο διδάσκων είναι ο οργανωτής και ο συντονιστής όλων αυτών των δραστηριοτήτων. Παρεμβαίνει όταν χρειάζεται και, κυρίως, ανακεφαλαιώνει τις γνώσεις που παράχθηκαν και αποκτήθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές.

Παρατηρήσεις

1η Η ομαδο-συνεργατική διδασκαλία, μόνη ή σε συνδυασμό με τη μέθοδο Project είναι πολύ αποτελεσματική όταν έχει προετοιμαστεί σωστά από τον διδάσκοντα. Ο τελευταίος οφείλει να **προβλέψει** τις κατάλληλες δραστηριότητες και να έχει στη διάθεση των μαθητών του τα κατάλληλα υλικά – ερεθίσματα.

2η Είναι ευνόητο ότι τα παραπάνω υλικά - ερεθίσματα που προσφέρθηκαν από το διδάσκοντα στους μαθητές και οι δραστηριότητες που υλοποιήθηκαν έχουν ενδεικτικό και μόνο χαρακτήρα. Σε κάθε περίπτωση, τα υλικά πρέπει να προσαρμόζονται και να αναπροσαρμόζονται διαρκώς από τον διδάσκοντα, λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές συνθήκες του σχολείου στο οποίο διδάσκει, τις ιδιαίτερες ανάγκες των μαθητών του και τα ιδιαίτερα ενδιαφέροντά τους.

3η Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εξής πρόσθετες ή εναλλακτικές δραστηριότητες: Επισκέψεις ιστοσελίδων τραπεζών, Συνέντευξη με τον διευθυντή μιας τράπεζας, Επίσκεψη της τάξης σε μια τράπεζα, Συγκέντρωση τραπεζικών εντύπων, Συγκέντρωση πληροφοριών για τις τραπεζικές εργασίες μέσω ερωτηματολογίου στο οποίο απαντούν πελάτες των τραπεζών, Επίσκεψη στο Νομισματοκοπείο κτλ.

«νομοθετητέον περί παιδείας ...»

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΑ ΠΟΛΙΤΙΚΑ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Του **Δ. Πασχαλίδη**, Φιλολόγου

Την αφορμή για την αναφορά μας στην έμφαση που δίνει ο Αριστοτέλης τόσο στο ρόλο της παιδείας σε κάθε πολίτευμα όσο και στην ανάγκη νομοθετικής παρέμβασης της πολιτείας μάς τη δίνει η 20η ενότητα του Φιλοσοφικού λόγου (Γ' Λυκείου), που περιλαμβάνεται στο 8ο (και τελευταίο) βιβλίο των *Πολιτικών* του μεγάλου φιλοσόφου. Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στη μεγάλη σημασία της παιδείας για τη σωστή εξέλιξη ενός πολιτεύματος. Έχει προηγηθεί (7ο βιβλίο) η αναφορά στο υπέρτατο αγαθό για το άτομο και την πόλη καθώς και η απεικόνιση της άριστης πολιτείας και του εκπαιδευτικού της συστήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σ' αυτά που τονίζει ο Αριστοτέλης για το άριστο πολίτευμα (6ο και 7ο βιβλίο) λείπει τόσο η συνοχή και η συνέπεια των πλατωνικών σχεδιασμάτων όσο και η ριζοσπαστικότητα των αιτημάτων που συζητούνται εκεί (στο πλατωνικό έργο). Στο σύνολο όμως του έργου ο Αριστοτέλης ακολουθεί το δάσκαλό του, τον Πλάτωνα, όταν αναγνωρίζει ότι **η παιδεία είναι η πιο σπουδαία προϋπόθεση για την εξέλιξη ενός πολιτεύματος**. Μόνο χάρη στην παιδεία μπορεί να δημιουργηθεί μια κοινότητα μέσα στην οποία θα καταστεί δυνατό να εκπληρωθεί το νόημα του πολιτεύματος, να δοθεί δηλαδή στην ανθρώπινη φύση η δυνατότητα να αναπτύξει τις έμφυτες ιδιότητές της[1]. **Αν η παιδεία των νέων παραμεληθεί στις πόλεις, βλάπτεται, πριν απ' όλα, το ίδιο το πολίτευμα**. Η σχέση της παιδείας με το πολίτευμα και, επομένως, ο έντονα πολιτικός χαρακτήρας της γίνεται φανερός ιδιαίτερα στα δύο πρώτα κεφάλαια του 8ου βιβλίου των *Πολιτικών*.

Στο **1ο κεφάλαιο** ο Αριστοτέλης τονίζει τα εξής:

1. Είναι υποχρέωση του νομοθέτη να ασχοληθεί πολύ σοβαρά με το θέμα της παιδείας των νέων.
2. Η παραμέληση της παιδείας βλάπτει το ίδιο το πολίτευμα.
3. Οι νέοι πρέπει να παίρνουν μόρφωση ταιριαστή με το πολίτευμα της πόλης τους.
4. Όπως για την εκμάθηση κάποιας τέχνης, έτσι και για τις πράξεις της αρετής χρειάζεται η άσκηση.
5. Η παιδεία πρέπει να είναι μία και η ίδια για όλους.
6. Η φροντίδα για την παιδεία πρέπει να αφήνεται στο δημόσιο και όχι στην ιδιωτική πρωτοβουλία.
7. Για την επίτευξη ενός στόχου κοινού για όλους, κοινή πρέπει να είναι και η άσκηση.
8. Ο κάθε πολίτης πρέπει να πιστεύει πως όλοι οι πολίτες ανήκουν στην πόλη και όχι στον εαυτό τους.
9. Η φροντίδα για το κάθε ξεχωριστό μόριο (πολίτη) της πόλης πρέπει να είναι απολύτως συνταιριασμένη με τη φροντίδα για το σύνολο.
10. Αξίζει έπαινος στους Λακεδαιμονίους για την αγωγή των παιδιών τους και για το κοινό για όλους εκπαιδευτικό σύστημα.

Στο **2ο κεφάλαιο** ο Αριστοτέλης αναφέρεται στους στόχους που πρέπει να έχει ένα νομοθετικό σύστημα και στο πόσο συμβάλλουν στην αγωγή των νέων μαθήσεις που ήταν καθιερωμένες στο εκπαιδευτικό σύστημα της εποχής του: η ανάγνωση και η γραφή, η γυμναστική, η μουσική και (μερικές φορές) το σχέδιο και η ζωγραφική.

Στο κεφάλαιο αυτό ο Σταγειρίτης φιλόσοφος καταθέτοντας τις απόψεις του για την παιδεία βάζει δύο προϋποθέσεις:

α) Πρέπει να ορίζονται νόμοι που να ρυθμίζουν τα θέματα της παιδείας και

β) πρέπει η παιδεία να είναι ίδια για όλους.

Οι δύο αυτές προϋποθέσεις όμως δεν απαντούν σε δύο βασικά ερωτήματα : «ποιος θα είναι ο χαρακτήρας αυτής της παιδείας» και «με ποιον τρόπο θα πρέπει να ασκείται αυτή». Το πρώτο από τα ερωτήματα θέτει την ουσία του προβλήματος, ενώ το δεύτερο θέτει την αξιολογική βάση του.

Η πρώτη διαπίστωση του Αριστοτέλη είναι ότι δεν υπάρχει ταυτότητα απόψεων για το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, δηλαδή για το τι πρέπει να μαθαίνουν οι νέοι

1. Albin Lesky, Ιστορία της Αρχαίας Ελληνικής Λογοτεχνίας, Θεσσαλονίκη, 1964.

προκειμένου να κατακτήσουν την αρετή και να κατευθυνθούν στον καλύτερο δυνατό τρόπο ζωής.

Η δεύτερη διαπίστωσή του είναι ότι υπάρχει ασάφεια ως προς το στόχο της παιδείας, αν δηλαδή πρέπει να έχει στόχο της την καλλιέργεια και την άσκηση του νου ή τη διαμόρφωση ηθικού χαρακτήρα. Αναφερόμενος μάλιστα στην εκπαίδευση που παρέχεται στην εποχή του, τονίζει τη σύγχυση και την ασάφεια σχετικά με τους στόχους της παρεχόμενης εκπαίδευσης. Η σύγχυση αυτή γίνεται φανερή στον προβληματισμό που υπάρχει σχετικά με το αν η παιδεία πρέπει να προσφέρει:

α) αυτά που είναι χρήσιμα για τη ζωή,

β) αυτά που οδηγούν στην αρετή ή

γ) τα πέρα από τις καθημερινές πρακτικές ανάγκες μας (αυτά που απλώς προάγουν τη γνώση).

Η τρίτη διαπίστωσή του είναι ότι δεν υπάρχει καμιά απολύτως συμφωνία για το ποιες σπουδές οδηγούν στην αρετή (δεν έχουν μάλιστα την ίδια ιδέα ούτε για την αρετή, πόσο μάλλον για τις σπουδές που οδηγούν σ' αυτήν). Αυτό έχει ως επακόλουθο να υπάρχει μεγάλη ποικιλία απόψεων και ως προς τον τρόπο με τον οποίο μπορεί ένα άτομο να ασκηθεί στην αρετή.
Αναφερόμενος ο Αριστοτέλης στους στόχους της παρεχόμενης εκπαίδευσης δέχεται καταρχάς ότι τα παιδιά πρέπει να μαθαίνουν χρήσιμα πράγματα, αλλά από αυτά μόνο εκείνα που α) είναι πρώτης ανάγκης β) ταιριάζουν σε ελεύθερους ανθρώπους και γ) δεν κάνουν ευτελή και τιποτένιο εκείνον που τα μαθαίνει. Είναι φανερό πως δέχεται τη σύζευξη του χρήσιμου με το ηθικό. Σε παρακάτω, βέβαια, χωρίο των Πολιτικών θεωρεί ότι ένα παιδευτικό αγαθό χρήσιμο και για ηθικούς σκοπούς και για τη διαμόρφωση του άριστου βίου είναι και η μουσική.

Από τα επιχειρήματα και τις απόψεις του Αριστοτέλη που παρατίθενται στα δύο πρώτα κεφάλαια του 8ου βιβλίου είναι φανερό ότι γι' αυτόν η παιδεία έχει πολιτικό χαρακτήρα. Οι βασικές του θέσεις είναι ότι:

1. Η παιδεία πρέπει να κινεί το ενδιαφέρον του πολιτικού και του νομοθέτη.
2. Η παιδεία έχει πολύ μεγάλη σημασία τόσο για τη συνολική ζωή του κράτους όσο και για τη ζωή του κάθε πολίτη ξεχωριστά.
3. Αν παραμεληθεί το θέμα της παιδείας των νέων, βλάπτεται -πριν απ' όλα- το πολίτευμα της πόλης τους.
4. Η φροντίδα για την παιδεία ανήκει στο δημόσιο και όχι στην ατομική πρωτοβουλία, επειδή οι πολίτες έχουν να επιτελέσουν ως σύνολο ένα σκοπό.
5. Όλοι οι πολίτες ανήκουν στην πόλη και όχι στον εαυτό τους και, επομένως, κοινή πρέπει να είναι και η άσκηση για την επίτευξη ενός κοινού στόχου. Αυτή την κοινή άσκηση, που θα οδηγήσει τους πολίτες σε πράξεις αρετής, την εξασφαλίζει η δημόσια παιδεία.
6. Η φροντίδα για το άτομο πρέπει να γίνεται σε απόλυτο συνταίριασμα με τη φροντίδα για το σύνολο. Αυτό πετυχαίνεται με την αγωγή που προσφέρεται με ένα δημόσιο, κοινό για όλους σύστημα.
7. Τα θέματα της παιδείας πρέπει να τα ρυθμίζει η *πολιτεία* με νόμους.
8. Από αυτά συνάγεται ότι το θέμα της παιδείας είναι θέμα που αφορά την πόλη ως σύνολο και, επομένως, έχει έντονο πολιτικό χαρακτήρα.

Στο **3ο κεφάλαιο** ο Αριστοτέλης τονίζει το ρόλο των διάφορων μαθήσεων: μ' αυτές η παιδεία ευαισθητοποιεί τους ανθρώπους, τους διδάσκει να εκτιμούν την ομορφιά του σώματος και να μην αναζητούν παντού το χρήσιμο.

Στο **4ο κεφάλαιο** γίνεται λόγος για τη λειτουργία της γυμναστικής και της μουσικής στην εκπαίδευση των νέων. Η γυμναστική θεωρείται απολύτως απαραίτητη για τη φυσιολογική ανάπτυξη του ανθρώπινου σώματος και συντελεί στην καλλιέργεια της ανδρείας. Κατά τον Αριστοτέλη δεν πρέπει να επιδιώκεται με αυτήν ο πρωταθλητισμός.

το **5ο κεφάλαιο** γίνεται διεξοδικότερη αναφορά στο ρόλο και τη σημασία της μουσικής στην εκπαίδευση των νέων και εξετάζεται από τρεις σκοπιές: ως διασκέδαση, ως ηθική αγωγή και ως πνευματική καλλιέργεια. Η κατάλληλη μουσική επιδρά στη διαμόρφωση του χαρακτήρα, ωθεί σε αξιόλογες πράξεις και προάγει την αρετή.

Στο **6ο** και τελευταίο κεφάλαιο του 8ου βιβλίου των *Πολιτικών* συνεχίζεται η εξέταση της μουσικής και γίνεται αναφορά στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να γίνεται η διδασκαλία της, στα μουσικά όργανα που πρέπει να αποφεύγονται και στο πού πρέπει να οδηγεί αυτή («στην κάθαρση της ψυχής»). Ο ίδιος δείχνει να προτιμά τη δωρική αρμονία, επειδή αποτελεί «μεσότητα».

Το συμπέρασμα με το οποίο κλείνουν τα *Πολιτικά* είναι ότι στην εκπαίδευση πρέπει να εφαρμόζουμε τρία στοιχεία: το **μέσον** (=τη μεσότητα), το **δυνατόν** και το **πρέπον**[2].

2. Θ. Γ. Μαυρόπουλου, ΦΙΛΟΛΟΓΟΣ, τ. 100

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ

ΣΩΚΡΑΤΗΣ 2400 ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΘΑΝΑΤΟ ΤΟΥ. Ο ΦΙΛΟΣΟΦΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΡΕΤΗΣ

Του **Παναγιώτη Δρέλλια** Πτυχιούχου Φυσικομαθηματικής,
και Φιλοσοφικής Σχολής (ΦΠΨ) Ιωαννίνων

1. Εισαγωγικές Σκέψεις

Η φιλοσοφία κατέχει μία ξεχωριστή θέση στην ιστορία του πολιτισμού. Η μελέτη ειδικότερα της Αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας είναι ουσιαστική γνωριμία με μία από τις διαστάσεις του είναι μας.

Οι Αρχαίοι Έλληνες κλασικοί σε μία χιλιόχρονη προσπάθεια καθόρθωσαν να περιορίσουν το μύθο και την πλάνη, να διευρύνουν τα όρια της ανθρώπινης συνείδησης και να δώσουν στον άνθρωπο το θάρρος να αναλάβει την ευθύνη για τις πράξεις του (δηλαδή να γίνει ελεύθερος).

2. Αττική Φιλοσοφία - Σωκράτης

Από τις κορυφαίες μορφές της φιλοσοφίας που αναπτύχθηκε με κέντρο την πόλη των Αθηνών είναι ο Σωκράτης, ο πιο αινιγματικός διανοητής της Δυτικής σκέψης, ο ιδρυτής της ηθικής φιλοσοφίας και ο επινοητής της διαλεκτικής ως φιλοσοφικής μεθόδου για την αναζήτηση της αλήθειας.

Τα ερωτήματα που έθεσε παραμένουν ως σήμερα ζωντανά και επίκαιρα. Το έργο του είναι προέκταση της σοφιστικής παράδοσης να αμφισβητούνται τα θεμέλια της παραδοσιακής κοινωνικής τάξης. Αλλά ενώ οι Σοφιστές με το σκεπτικισμό τους έφθασαν στη σχετικότητα θεσμών και αξιών, ο Σωκράτης έζησε και έδρασε με την πεποίθηση ότι πέρα από τις γνώμες και τις εικασίες υπάρχει αλήθεια αντικειμενική και ότι αυτή είναι προσιτή με τον ορθό λόγο.

Ο θάνατός του ήταν η επισφράγιση μιας ζωής αφιερωμένης στην επιδίωξη της αλήθειας. Όπως και η Αντιγόνη (στο Σοφοκλή), οδηγήθηκε στην εσχάτη των ποινών από ένα υψηλό αίσθημα ευθύνης και μία αυστηρή προσήλωση σε ηθικές επιταγές και υψηλές αρχές.

3. Ηθική - Διαλεκτική: Τα θεμέλια της Σωκρατικής Φιλοσοφίας

Ο Σωκράτης δεν υπήρξε επαγγελματίας δάσκαλος και δεν άφησε συγγράμματα.

Οι μοναδικές πηγές γι' αυτόν είναι τα έργα των μαθητών του: του Ξενοφώντα και κυρίως του Πλάτωνα, που τον παρουσιάζουν να συνδυάζει την κριτική οξύνοια με τη βαθιά θρησκευτικότητα, το νηφάλιο ορθολογισμό με τη μυστική πίστη.

Ο Σωκράτης δεν μεταδίδει γνώσεις, δεν κηρύσσει καθιερωμένες ιδέες, αλλά αντίθετα απορεί, αμφιβάλει, αμφισβητεί διδάσκοντας τη μέθοδο της **αυτογνωσίας**.

Η διαλεκτική του είναι ο πρόδρομος της ηθικής του. Η μαιευτική του μέθοδος, δηλαδή η διαλογική αντιπαράθεση με την **πρόφαση της άγνοιας** («εν οίδα ότι ουδέν οίδα»), οι ερωταποκρίσεις με τον συνομιλητή του, συνιστά μορφή αναζήτησης της αλήθειας που αποδεσμεύεται από τη δύναμη της συνήθειας, από την αυταπάτη, την ψευδαίσθηση, την τυπολατρεία και κατευθύνει ασφαλέστερα στην αυτογνωσία και στην εσωτερική ελευθερία.

Η βασική ηθική αντίληψη του Σωκράτη ότι **«η αρετή είναι γνώση»** τον οδηγεί στην ύπαρξη ενός ηθικού κόσμου πέρα από τις υποκειμενικές εκτιμήσεις, προτείνοντας οι πράξεις του ανθρώπου να έχουν ως κριτήριο την ομορφιά της ψυχής.

Η ηθική γνώση (η αρετή) είναι διδακτή με τη βοήθεια του λογικού του ανθρώπου και οι ανεπίτρεπτες πράξεις είναι προϊόν άγνοιας, αφού κατά τον Σωκράτη **«ουδείς εκών κακός»** (εδώ αναδεικνύεται η σημασία της παιδείας).

Ιδιαίτερη έμφαση έδινε ο Σωκράτης στη συνεχή αυτοεπισκόπηση της ψυχής (**«γνώθι σ' αυτόν»**) και στον αυτοέλεγχο, ώστε να αποκτηθεί η αρετή που είναι επιστήμη, προετοιμάζοντας έτσι τον περίφημο «κόσμο των ιδεών» του μεγάλου συνεχιστή του: Πλάτωνα.

4. Κριτική Αποτίμηση

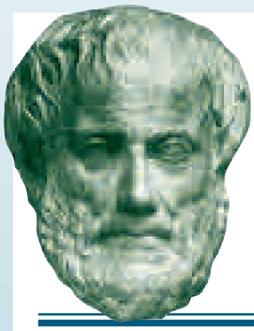
Η μέθοδος σκέψης που εφηύρε ο σπουδαίος φιλόσοφος έφερε νέα προβληματική στο φιλοσοφικό στοχασμό, αφού αναζήτησε ένα σταθερό έδαφος πάνω στο οποίο θα καθοριστεί αυστηρά και αμετάκλητα κάθε έννοια: καλού, αρετής, σοφίας.

Ο Σωκράτης επιδιώκοντας τη γνώση του απόλυτου και απορρίπτοντας το σχετικό, αναζητώντας την **ουσία της ηθικής πράξης και όχι τα φαινόμενα της δράσης**, σημάδεψε οριστικά την Ιστορία της Φιλοσοφίας, υποδεικνύοντας το Λόγο σαν μοναδικό μέσο προς την Αλήθεια, το Καθολικό και το Αιώνιο.

Η αισιόδοξη πίστη του Σωκράτη, ότι **η γνώση και η αρετή μπορούν να αλλάξουν τον κόσμο**, αποτελεί και σήμερα πολύτιμο οδηγό πορείας για το παρόν και το μέλλον της ανθρωπότητας.

Βιβλιογραφία

1) **Πέτρου Α. Γέμτου:** «Οι Κοινωνικές Επιστήμες» Αθήνα 1995, Εκδόσεις Τυπωθήτω.
2) **E. Zeller - W. Nestle:** «Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας» (Μετάφραση: Χ. Θωοδωρίδη) Αθήνα 1990, Εκδόσεις ΕΣΤΙΑ.
3) **Απ. Κακλαμάνη:** «Ο Διάλογος ως Πολιτική Ηθική» Εισήγηση στο Διεθνές Συνέδριο για το έτος Σωκράτη, Ρόδος 2001.



ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ

Η ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ: ΚΟΡΥΦΑΙΑ ΚΑΙ ΑΥΘΕΝΤΙΚΗ ΕΩΣ ΣΗΜΕΡΑ

Του **Παναγιώτη Δρέλλια** Πτυχιούχου Μαθηματικού ,
και Φιλοσοφικής Σχολής (ΦΠΨ) Ιωαννίνων

1. Εισαγωγικές Σκέψεις

Η μελέτη της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας είναι ουσιαστική γνωριμία με μία από τις διαστάσεις του είναι μας, αφού κατά γενική ομολογία ταυτίζεται με τη μελέτη της καταγωγής και των αρχών του σύγχρονου πολιτισμού.

Οι Αρχαίοι Έλληνες κατόρθωσαν να ερμηνεύσουν την πραγματικότητα όχι μυθικά, αλλά λογικά και δημιούργησαν γνώση έγκυρη και αντικειμενική, αυτό που ονομάζουμε επιστήμη.

Η ανάπτυξη των επιστημών, η τεχνολογική πρόοδος, οι ελευθερίες και οι κάθε είδους κοινωνικές κατακτήσεις στην εποχή μας, έχουν την αρχή τους στο φωτεινό πνεύμα του Αρχαίου Ελληνισμού.

2. Αριστοτέλης και Πολιτική Φιλοσοφία

Το έργο του Αριστοτέλη που αναφέρεται στα πολιτικά φαινόμενα, (κυρίως τα «Πολιτικά») θεωρείται ως το αποκορύφωμα της αρχαίας ελληνικής πολιτικής φιλοσοφίας και ο Αριστοτέλης ο σημαντικότερος συγγραφέας μέσα στους κλασικούς της παγκόσμιας πολιτικής σκέψης.

Ο Αριστοτέλης δεν υπήρξε απλά θεωρητικός του πολιτικού φαινομένου, αλλά ικανός στοχαστής, που γνωρίζει τα προβλήματα και από την πρακτική τους άποψη.

Αρχικά συμμεριζόμενος της ιδέες του Πλάτωνα, θεωρεί την πολιτική κοινότητα, όχι όπως οι σοφιστές, ως συμβατικό δημιούργημα, αλλά ως **οντολογική πραγματικότητα.** Αποτελεί δηλαδή οντολογικό χαρακτηριστικό για τον άνθρωπο η συγκρότηση της πολιτικής κοινότητας.

Ο άνθρωπος υπάρχει πάντοτε ως μέλος ενός συνόλου, που έχει έναντι του ατόμου σαφή **οντολογική προτεραιότητα** (**«φύσει κοινωνικόν όν»**).

Η πολιτεία συγκροτείται στη βάση της ικανότητας του ανθρώπου να έρχεται σε σχέσεις φιλίας με τους συνανθρώπους του.

Δικαιοσύνη - φιλία - οικειότητα: αποτελούν τους αριστοτελικούς συνδετικούς δεσμούς κάθε πολιτικής κοινότητας.

Η πολιτεία δεν μπορεί να θεωρηθεί ποτέ ως αυτοσκοπός, αλλά προορισμός της είναι να παρέχει στους πολίτες τα μέσα απόκτησης της **αρετής**. Είναι δηλαδή ίδρυμα που αποσκοπεί στην ηθική εξύψωση του ανθρώπου, η δε **πόλις** κατά την αριστοτελική **θέση** είναι τέλεια κοινωνία «**γινομένη μεν ουν του ζην ένεκα, ούσα δε του ευ ζην**».

3. Μορφές Πολιτευμάτων - Πολιτειακή Οργάνωση

Στηριζόμενος ο Αριστοτέλης στη μελέτη της ιστορικής ζωής και στο θεωρητικό στοχασμό ερεύνησε τις βασικές αρχές των διαφόρων πολιτευμάτων και τις κατέταξε σε ορισμένες μορφές.

Διακρίνει τις «**ορθές πολιτείες**» από τις αντίστοιχες «**παρεκβάσεις**» (διαστρεβλωμένες μορφές πολιτικής ζωής).

Στις ορθές πολιτείες το κριτήριο σύνταξης και λειτουργίας του πολιτεύματος είναι το «**κοινόν συμφέρον**», ενώ στις παρεκβάσεις το «**ίδιον συμφέρον**».

Σχηματικά η **τριαδική διαίρεση** των πολιτευμάτων κατά τον Αριστοτέλη έχει ως εξής:

Α. Ορθές Πολιτείες		**Β. Εκτροπές**
I. βασιλεία		I. τυραννία
II. αριστοκρατία	⟶	II. ολιγαρχία
III. δημοκρατία		III. οχλοκρατία

Η παραπάνω διάκριση εξαρτάται από τον αριθμό και τον τρόπο των ασκούντων την πολιτική εξουσία.

Πολύτιμη είναι η αριστοτελική αντίληψη που αναφέρεται στην έννομη τάξη της πολιτικής κοινότητας, στην οποία πρέπει να άρχουν οι νόμοι και όχι οι άνθρωποι. Διαιρεί τους νόμους:

α) σε εκείνους που καθορίζουν το ***πνεύμα της πολιτείας*** και
β) σε εκείνους που καθορίζουν τις μεταξύ των πολιτών ***νομικές σχέσεις***.

Ο διαχωρισμός αυτός αναδεικνύει τον Αριστοτέλη ως τον πρώτο κατά χρονολογική τάξη **θεωρητικό συνταγματολόγο,** αφού επίσης προσδιόρισε τις εξουσίες που δρουν στην πολιτεία (**πολιτική, βουλευτική, δικαστική)**.

4. Κριτική Αποτίμηση

Το πολιτειακό σύστημα του Αριστοτέλη υπήρξε ρεαλιστικό, διότι στηρίχθηκε: σε εφικτές αρχές, σε πραγματικούς ανθρώπους, σε υπαρκτές κοινωνίες της εποχής.

Η προτίμηση του Αριστοτέλη προς ένα πολίτευμα, που συνδυάζει **δημοκρατικά και ολιγαρχικά στοιχεία** βασιζόταν: όχι σε Πλατωνικές εξιδανικεύσεις, αλλά σε προσεκτική μελέτη των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων όλων των δυνατών μορφών κοινωνικής οργάνωσης.

Απόλυτα άριστο πολίτευμα κατά τον Αριστοτέλη δεν υπάρχει, όπως δεν υπάρχει ο τέλειος άνθρωπος ή η τέλεια ηθική ζωή. Η αντίθεσή του εδώ με τον ιδεαλισμό του Πλάτωνα, είναι ουσιώδης και του απέδωσε τον τίτλο του «**ανατρεπτικού**» μαθητή.

Το πολιτειακό οικοδόμημα του Αριστοτέλη επικρίθηκε από πολλούς μεταγενέστερους θεωρητικούς της Πολιτικής Επιστήμης κυρίως διότι:

α) διατήρησε το θεσμό της **δουλείας**
β) στέρησε την **ατομική ελευθερία** του πολίτη
γ) περιόρισε την πολιτειακή οργάνωση μέσα στα **στενά όρια** της ελληνικής **πόλης**.

Η κατανόηση όμως της αξίας και της διαχρονικότητας **ενός στοχαστή** παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον όταν γίνεται: όχι με τα σημερινά κριτήρια και τις σύγχρονες γνώσεις, αλλά με βάση τις αντιλήψεις και τις δυνατότητες που είχαν οι άνθρωποι στο παρελθόν.

Στο έργο του Αριστοτέλη εντοπίζουμε την πρώτη προσπάθεια συστηματικής **ανάλυσης**, **περιγραφής** και **εξήγησης** των **πολιτικών φαινομένων**, γι' αυτό οι απόψεις του επηρέασαν σε σημαντικό βαθμό την πολιτική σκέψη και της εποχής μας.

Βιβλιογραφία

1) **E. Zeller, W. Nestle**: « Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας», Αθήνα 1990, «ΕΣΤΙΑ».
2) **Γεωργούλας Κ.Δ.**: «Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας», Αθήνα 1975, «ΠΑΠΑΔΗΜΑΣ».
3) **Γέμτος Π.Α.:** «Οι Κοινωνικές Επιστήμες», Αθήνα 1995, «ΤΥΠΩΘΗΤΩ».

Η ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

(Έννοια και σπουδαιότητα της διαθεματικότητας)

Του **Παναγή Κομητόπουλου**, Δάσκαλου - Υπεύθυνου Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης

Είναι κοινή πεποίθηση όλων ότι τα τελευταία χρόνια έχουμε μια αδιάλειπτη κινητικότητα όλων των επιστημών. Έτσι έχουμε σαν αποτέλεσμα τις ραγδαίες αλλαγές και εξελίξεις σε όλες τις επιστήμες και στην τεχνολογία. Ο ρυθμός παραγωγής γνώσεων και πληροφοριών αυξάνεται αλματωδώς αφού η έρευνα και η πρόοδος των επιστημών κάνει σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα τεράστια βήματα.

Έτσι παρατηρείται από τη μια να έχουμε τεράστιο όγκο συσσωρευμένων γνώσεων και από την άλλη τον ανελέητο βομβαρδισμό των παιδιών με ένα σωρό γνώσεις και πληροφορίες. Αυτό συντελεί στο να κυριαρχεί μια αβεβαιότητα και μια πολυπλοκότητα στο σημερινό κόσμο και ένας μικρός πανικός στους μικρούς μαθητές. Κάθε τόσο δε βλέπουμε να μορφοποιείται ένα νέο γνωστικό τοπίο. Απέναντι σ' αυτό το τοπίο κάθε φορά, πρέπει το Σχολείο να προσαρμόζεται συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη του ότι έχει χάσει το μονοπωλιακό ρόλο μετάδοσης της γνώσης. Η ανάγκη μάλιστα αυτή είναι επιτακτική διότι μόνον έτσι (το Σχολείο) θα μπορεί να προφυλάξει τους μαθητές ώστε να μην γίνονται δέκτες ετερόκλητων γνώσεων που έρχονται απ' έξω χωρίς να είναι παιδαγωγικά πιστοποιημένες και ηχούν σαν «παραπλανητικές σειρήνες». Δεν πρέπει να αφήνει αυτές «τις παραπλανητικές σειρήνες» να ηχούν και να μεταμορφώνουν τα μηνύματα που μεταφέρει και πρέπει να μεταφέρονται στους μαθητές.

Από την άλλη όταν η γνώση και η πληροφορία παρέχεται από ένα συγκεκριμένο πεδίο μιας μόνο επιστήμης τότε αυτή είναι αποσπασματική και ξεκομμένη. Δημιουργεί δε στο μαθητή περισσότερη σύγχυση στην προσπάθειά του να δομήσει το δικό του κοσμοείδωλο. Γι' αυτό οι κατακερματισμένες κατά επιστημονικό πεδίο γνώσης δε συνιστούν γνώση ιδιαίτερα όταν προσφέρονται στους μαθητές με τον στερεότυπο τρόπο διδασκαλίας.

Όλα τα παραπάνω μας επιβάλλουν να ακολουθήσουμε ένα διαφορετικό τρόπο προσέγγισης της γνώσης από τους μαθητές, που απέχει πολύ από τα μέχρι τώρα ισχύοντα. Σύμφωνα με αυτά η γνώση πρέπει να είναι πολύπλευρη, ολόπλευρη και απαιτεί συγκεκριμένη παιδαγωγική διαδικασία για να δομηθεί σωστά. Η διαδικασία δε αυτή δεν μπορεί να βασίζεται πουθενά αλλού παρά στην διαθεματική και ως επί το πλείστον σφαιρική και ολιστική προσέγγιση του κάθε γνωστικού αντικειμένου. Γνώμονας πρέπει να είναι η πολυεπίπεδη πολυεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης. Επίσης η μάθηση πρέπει να συντελείται στα πλαίσια μιας συλλογικής επικοινωνίας και διαλλεκτικής αντιπαράθεσης. Επιπρόσθετα πρέπει να γίνεται με λειτουργικό τρόπο ώστε να αξιολογείται από τα ίδια τα παιδιά και να αξιοποιείται για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας. Όλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι είναι δυνατόν να επιτευχθούν με τη Διαθεματική Προσέγγιση της γνώσης και της πληροφορίας.

Με αυτό τον τρόπο προσέγγισης της γνώσης στο Σχολείο θα ξεφύγει από τον παραδοσιακό γνωσιοκεντρικό χαρακτήρα, τη στείρα διδασκαλία και την παθητική μετάδοση αποσπασματικών γνώσεων, αγνοώντας την πρόοδο και την εξέλιξη πολλών κλάδων επιστημών. Μόνο έτσι θα μπορέσει να «εφοδιάσει» τους μαθητές με τον κατάλληλο «μορφωτικό μανδύα» ώστε να μπορούν να αντιμετωπίζουν επιτυχέστερα τις «μπόρες της ζωής» και τις «νέες προκλήσεις» που παρουσιάζονται. Έτσι θα μπορέσουμε να διαμορφώσουμε πολίτες που θα μπορούν να προσαρμόζονται στις έντονες αλλαγές που συντελούνται πάρα πολύ συχνά. Επίσης θα βοηθήσει στην αναμόρφωση του σχολικού χρόνου, στην ορθολογική διευθέτησή του και στην ισόρροπη κατανομή της διδακτέας ύλης κατά τάξη έτσι ώστε αυτή να μπορεί σταδιακά και σταθερά να οικοδομείται από τους ίδιους τους μαθητές χωρίς να εξαναγκάζεται από τον δάσκαλο - εξεταστή.

Ακόμα από την εφαρμογή των «διαθεματικών σχεδίων εργασίας», τα "projects" όπως λέγονται, (τα οποία συνδέονται άμεσα με τη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης), θα καλλιεργηθεί η πρωτοβουλιακή, συνεργατική δράση για την προσέγγιση της γνώσης από τους μαθητές, θα αναπτυχθεί η κριτική σκέψη, η συλλογική προσπάθεια, η βιωματική τους δράση και έτσι θα μπορέσουν να ανακαλύψουν γνώσεις και πληροφορίες που δεν είναι εύκολο να προβληθούν στο

επίπεδο της τυπικής διδασκαλίας που έτσι κι αλλιώς δεν μπορεί να αντέξει το σχολικό πρόγραμμα. Οι εν λόγω γνώσεις αφορούν την καθημερινότητα και ενδιαφέρουν άμεσα τον μαθητή αφού προέρχονται από θέματα που κεντρίζουν το ενδιαφέρον του και έχει τη δυνατότητα να επιλέξει να μάθει αυτό που τον ενδιαφέρει περισσότερο.

Ακόμα και η διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης, (βασική αρχή των projects), θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να αποκτήσουν αξιόλογη ευελιξία και εφευρετικότητα στον τρόπο πρόσληψης και κατάκτησης νέων πληροφοριών καθώς και να αναπτύξουν ειδικές γνώσεις, στάσεις και δεξιότητες που απαιτούνται στη σημερινή ελληνική κοινωνία και πραγματικότητα μέσα από βιωματικές δραστηριότητες. Θα βοηθήσει στην καλλιέργεια της δημιουργικής σκέψης του μαθητή και της συναισθηματικής του νοημοσύνης. Αυτός θα γίνει «συνερευνητής» μαζί με το δάσκαλο, ο οποίος αποκτά ρόλο καθοδηγητικό, διαμεσολαβητικό, συμβουλευτικό και υποστηρικτικό. Ο ίδιος ο μαθητής είναι εκείνος ο οποίος σχεδιάζει και οργανώνει την οδό προς τη γνώση και κάνει πράξη αυτό που λέμε «μαθαίνει πώς να μαθαίνει». Και στο τέλος έρχεται ο ίδιος να αξιολογήσει την ίδια του την προσπάθεια. Οι ακαδημαϊκές και συνεργατικές διαδικασίες που αναπτύσσει η ομάδα αποκτούν ιδιαίτερη σπουδαιότητα και εξετάζονται.

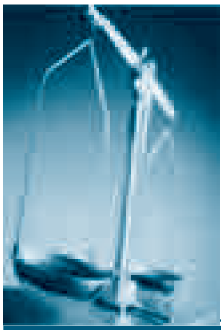
Επίσης είναι αξιοσημείωτο ότι μέσα από όλα αυτά οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα χρήσης ποικίλων πηγών και εργαλείων πληροφόρησης και επικοινωνίας και ικανότητα επίλυσης διαφόρων προβλημάτων μέσα από την καλλιέργεια των απαραίτητων διεξιοτήτων και στρατηγικών σχεδιασμού, ελέγχου, ανατροφοδότησης και διορθωτικής παρέμβασης.

Αλλά και το Σχολείο γίνεται χώρος χαράς, ζωής και δημιουργικής δράσης των μαθητών. Μέσα σ' αυτό ενισχύεται η συνεργατική μάθηση, η οποία επιβάλλει τη συμμετοχή όλων των μελών της ομάδας στα πλαίσια της επικοινωνιακής προσέγγισης.

Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι η διαθεματική - διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης δεν είναι κάτι το πρωτόγνωρο και καινούργιο για την εκπαίδευση. Προσπάθειες τέτοιες έχουν ξεκινήσει εδώ και πολλά χρόνια με την πρόσθεση θεμάτων αγωγής υγείας, αγωγής του κατανλωτή κ.λπ. σε προϋπάρχουσες ενότητες διαφόρων μαθημάτων. Ακόμα με την αυτοτελή εφαρμογή προγραμμάτων Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης, Αγωγής υγείας και του καταναλωτή η διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης γίνεται «πρωταρχικό σύνθημα». Και να που ήρθε η ώρα να γίνει «πρωταρχικό σύνθημα» σε όλα τα πεδία των επιστημών που διδάσκονται στο Σχολείο, για τους λόγους που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία. Και πρέπει να τονίσουμε ότι αυτό γίνεται με έναν υπεύθυνο τρόπο από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο με την αναμόρφωση των Αναλυτικών Προγραμμάτων στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Και πιστεύουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι θετικότατο.

Βιβλιογραφία

1. Aldrich, R. and J. White (1998): «The national curriculum beyond 2000: the QCA and the aims of education» University of London, London.
2. Kellv, A. (1999): «The curriculum. Theory and Practice», Inaugular Lecture Institute of Education, University of London.
3. Le Metais, J. (1999): «Values and aims in the curriculum and assessment frameworks: A 16 nation review» in «Curriculum in Contex» by eds B. Moon and P. Murphy, pp. 93-113.
4. Ravitz, D. and Viteritti, J. Eds. (1997): «New schools for a new centuru: the redesing of urban education. New Haven: Yale University Press.
5. Ryle, G. (1987): «Thinking and self-teaching» Proceedings of the Philosophy of Education Society of Great Britain.
6. Walker, D. and Soltiw, J. (1997): «Curriculum and aims», Teachers Collage, Columbia, University, New York and London.
7. Yong, M. (1999): «Knowledge, Learning and the curriculum of the future» Institute of Education Publications, University.
8. Γιαννακόπουλος Κ. (1949): «Το βιωματικό Σχολείο», Αθήνα.
9. Μασσιάλας Β. (1984): «Το Σχολείο Εργαστήρι Ζωής», Αθήνα.
10. Ματσαγγούρας Η. (1998): «Στρατηγικές Διδασκαλίας», Αθήνα.
11. Ματσαγγούρας Η. (1995): «Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία», Αθήνα.
12. Χρυσαφίδης Κ. (1994): «Βιωματική Επικοινωνιακή Διδασκαλία», Αθήνα.



ΠΡΟΤΑΣΗ για την ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ του ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ της ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Του Δρ **Χρήστου Παπαϊωάννου**, Φυσικού, Δ/ντή Ι.Ε.Κ.

1. Εισαγωγή

Η αξιολόγηση, με έννοια κατά πολύ ευρύτερη της "εξέτασης", αποτελεί πλέον ευδιάκριτη και αυτοτελή επιστημονική περιοχή.

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε ένα σχήμα αξιολόγησης του εκπαιδευτικού προσωπικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, το οποίο συνίσταται από προτεινόμενο θεωρητικό πλαίσιο για την διεξαγωγή της αξιολόγησης και από την επιλεγείσα μεθοδολογία για την υλοποίηση του θεωρητικού πλαισίου.

Ως πυξίδα για την ανάπτυξη αυτού του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν απόψεις και θέσεις περί αξιολόγησης που προέρχονται από την βιβλιογραφία [1], αλλά και οι ιδιαιτερότητες που επιδεικνύει ο χώρος της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (π.χ. δυσπιστία των Εκπαιδευτικών απέναντι στην καθιέρωση της αξιολόγησής τους).

2. Θεωρητικό πλαίσιο της αξιολόγησης

2.1. Αντικείμενο αξιολόγησης

Αντικείμενο αξιολόγησης είναι οι Εκπαιδευτικοί (δόκιμοι, μόνιμοι ή και αναπληρωτές και ωρομίσθιοι), οι οποίοι παρέχουν διδακτικό έργο στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, δημόσια και ιδιωτική.

2.2. Στόχοι ή Σκοποί της αξιολόγησης

Αναμφίβολα η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού προσωπικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης εντάσσεται στο γενικό πλαίσιο βελτίωσης της παρεχομένης εκπαίδευσης.

Η άποψη που εκφράζεται σε σχετική Υπουργική Απόφαση για την «Αξιολόγηση του Εκπαιδευτικού Εργου και του Εκπαιδευτικού Προσωπικού» [2], ότι «*σκοπός της αξιολόγησης των εκπαιδευτικών είναι η ενίσχυση της αυτογνωσίας τους ως προς την επιστημονική τους συγκρότηση, την παιδαγωγική τους κατάρτιση και τη διδακτική τους ευστοχία, ο σχηματισμός θεμελιωμένης εικόνα για την απόδοση στο έργο τους, η προσπάθεια βελτίωσης της προσφοράς τους στον μαθητή με την αξιοποίηση των διαπιστώσεων και οδηγιών των αξιολογητών, η επισήμανση των αδυναμιών τους στην προσφορά του διδακτικού έργου τους και η προσπάθεια εξάλειψης αυτών, η ικανοποίηση των εκπαιδευτικών από την αναγνώριση του έργου τους και η παροχή κινήτρων σε όσους επιθυμούν να εξελιχθούν και να υπηρετήσουν σε θέσεις στελεχών της εκπαίδευσης, καθώς και η διαπίστωση των αναγκών επιμόρφωσής τους και ο προσδιορισμός του περιεχομένου της επιμόρφωσης αυτής*»,παρά την πομπώδη διατύπωση επιφέρει σύγχυση, αφού διατυπώνεται καταιγισμός εφικτών και ανέφικτων σκοπών, ρεαλιστικών αλλά και εξωπραγματικών επιδιώξεων και γι' αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός στην πρότασή μας.

Ο στόχος της αξιολόγησης του εκπαιδευτικού προσωπικού πρέπει να προσδιορίζεται σε συνάρτηση με τους δέκτες της διδασκαλίας του και με το γνωστικό αντικείμενό της διδασκαλίας του και να μη συγχέεται με τις κρίσεις για την βαθμολογική εξέλιξη του εκπαιδευτικού προσωπικού.

Η αξιολόγηση λοιπόν του Εκπαιδευτικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης πρέπει να αποσκοπεί στην συνεχή βελτίωση της διδασκαλίας και του περιεχομένου των μαθημάτων και στον καθορισμό των πλαισίων των δραστηριοτήτων που θα οδηγήσουν στην βελτίωση αυτή, ώστε να επιτυγχάνεται η καλύτερη δυνατή κατάρτιση των μαθητών στα συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα.

2.3. Είδη και προσεγγίσεις αξιολόγησης

Οι αναφερόμενες στην βιβλιογραφία [1] μέθοδοι αξιολόγησης των εκπαιδευτικών των συμβατικών ιδρυμάτων δεν είναι αναγκαστικά όλες εφαρμόσιμες στην ελληνική πραγματικότητα (π.χ. το «Τεστ Διδακτικής Πράξης», ή «η Αξιολόγηση με Συμβόλαιο»). Κάποιες μέθοδοι από αυτές βέβαια μπορούν να εφαρμοσθούν είτε αυτούσιες είτε κατάλληλα τροποποιημένες, όπως:

- *Η Συστηματική Παρατήρηση.* Συγκαταλέγεται στο είδος της "αξιολόγησης διαδικασίας". Οι επί μέρους

δραστηριότητες του αξιολογούμενου συγκρίνονται με προκαθορισμένες επιθυμητές συμπεριφορές.

- *Το Τεστ Επιστημονικής Κατάρτισης.* Ανήκει στην “αξιολόγηση διαδικασίας”. Η διαδικασία πρόσληψης του εκπαιδευτικού προσωπικού δεν διασφαλίζει την αποδοχή της επιστημονικής κατάρτισής του. Επιπλέον η ραγδαία επιστημονική και τεχνολογική εξέλιξη καθιστά αναγκαία την συνεχή επιμόρφωσή του, η οποία προάγεται με την εκτίμηση της στάθμης του σε θέματα ειδικότητας και διδασκαλίας.
- *Η Αυτοαξιολόγηση.* Ο εκπαιδευτικός σταθμίζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του με συγκεκριμένες προαποφασισμένες επιδιώξεις, οπότε κριτήριο είναι ο βαθμός επίτευξης των επιδιώξεων αυτών.
- *Η Αλληλοαξιολόγηση.* Οι εκπαιδευτικοί της ίδιας ειδικότητας εκτιμούν και σχολιάζουν αμφίδρομα τους χειρισμούς σε θέματα που άπτονται των αρμοδιοτήτων και των υποχρεώσεών τους. Είναι διαδικασία "διαμορφωτικής αξιολόγησης", αφού μπορεί να συντελείται σε κάθε φάση εφαρμογής του προγράμματος σπουδών.
- *Η Απόδοση των Σπουδαστών.* Οι επιδόσεις των μαθητών στις περιοδικές γραπτές εργασίες, οι επιδόσεις των σπουδαστών στις τελικές εξετάσεις καθώς και η παρουσία και συμμετοχή τους στο μάθημα συνιστούν βασικό κριτήριο εκτίμησης της αποδοτικότητας του διδάσκοντος.

2.4. Αξονες αξιολόγησης

- Οι άξονες επάνω στους οποίους θα συντελεσθεί η αξιολόγηση πρέπει να είναι:
- η συμπεριφορά του εκπαιδευτικού απέναντι στους μαθητές,
- η επιστημονική και διδακτική κατάρτιση του εκπαιδευτικού,
- το επιστημονικό έργο του εκπαιδευτικού,
- η απόδοση των μαθητών.

3. Μεθοδολογικό πλαίσιο της αξιολόγησης

3.1. Κριτήρια Αξιολόγησης και Κλίμακες Μέτρησης

Για τον προσδιορισμό του κάθε άξονα αξιολόγησης επιλέγεται σύνολο κριτηρίων, τα οποία μπορεί να παριστάνουν μετρήσιμες μεταβλητές. Η εγκυρότητα και η αξιοπιστία τους εξασφαλίζει αντίστοιχα την εγκυρότητα και την αξιοπιστία του άξονα αξιολόγησης. Αναλυτική παρουσίαση των κριτηρίων που προτείνουμε για έκαστο άξονα αξιολόγησης με το αντίστοιχο είδος της κλίμακας μέτρησης γίνεται στον πίνακα 1.

3.2. Πηγές

Οι απαραίτητες πληροφορίες μπορούν να αντληθούν από τα εμπλεκόμενα πρόσωπα στην διαδικασία της διδασκαλίας, ήτοι τους μαθητές, τον ίδιο τον αξιολογούμενο, τους συναδέλφους του, από το ενημερωμένο αρχείο της σχολικής μονάδας, αλλά και από το πρόσωπο που έχει επιφορτισθεί με την συλλογή των στοιχείων (συλλέκτης).

Για την συλλογή των στοιχείων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ερωτηματολόγια που απευθύνονται στους μαθητές και στους διδάσκοντες, συνεντεύξεις που λαμβάνει ο συλλέκτης από τους αξιολογούμενους, τους μαθητές τους και τους συναδέλφους τους, αλλά και οι παρατηρήσεις του συλλέκτη. Τα στατιστικά στοιχεία των μαθητών, των εκπαιδευτικών, καθώς και τις ακαδημαϊκές διακρίσεις των εκπαιδευτικών, ο συλλέκτης μπορεί να τα προμηθευτεί από τα των σχολικών μονάδων

Στον παραπάνω πίνακα αναγράφονται επίσης οι προτεινόμενες πηγές των πληροφοριών για έκαστο κριτήριο αξιολόγησης.

3.3. Η επιλογή του φορέα εποπτείας, του αξιολογητή και του συλλέκτη - οριοθέτηση των αρμοδιοτήτων τους

Η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού προσωπικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αφορά πρωτίστως του ίδιους τους εκπαιδευτικούς και τις σχολικές μονάδες. Είναι δηλαδή βασικά εσωτερικό ζήτημα της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Συνεπώς επιβάλλεται η σύσταση κατάλληλου φορέα εντός της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ο οποίος θα είναι επιφορτισμένος με την εποπτεία της αξιολόγησης του εκπαιδευτικού προσωπικού, όπως για παράδειγμα μία Μονάδα Εσωτερικής Αξιολόγησης της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (Μ.Ε.Α.Δ.Ε.).

Από τον διευθυντή του φορέα αξιολόγησης (Μ.Ε.Α.Δ.Ε.) καθορίζεται το θεωρητικό και το μεθοδολογικό πλαίσιο της αξιολόγησης του εκπαιδευτικού προσωπικού και επιλέγονται για την πραγματοποίησή της δύο πρόσωπα από κάθε ειδικότητα του διδακτικού προσωπικού για κάθε νομό, στο έναν εκ των οποίων ανατίθεται η συλλογή των προκαθορισμένων στοιχείων (δευτερεύων ενεργός φορέας) και στο άλλο τα καθήκοντα του αξιολογητή (κύριος φορέας της αξιολόγησης). Ο αξιολογητής πρέπει να διαθέτει ακριβείς στατιστικές και μεθοδολογικές γνώσεις καθώς και θεωρητικές γνώσεις στο αντικείμενο της αξιολόγησης.

Αρμοδιότητα του συλλέκτη είναι η συλλογή των στοιχείων μέσω:

- ερωτηματολογίου που διανέμεται στους μαθητές, στον αξιολογούμενο και στους συναδέλφους του, του οποίου οι ερωτήσεις αντιστοιχούν σε κριτήρια των αξόνων αξιολόγησης,

Πίνακας 1

Άξονας αξιολόγησης	Κριτήρια	Κλίμακα	Πηγές
Συμπεριφορά	Επικοινωνία με τους μαθητές	Τακτική	Οι μαθητές, ο ίδιος (αυτοαξιολόγηση), οι συνάδελφοι (αλληλοαξιολόγηση), φορέας αξιολόγησης
	Παρακολούθηση της πορείας σπουδών των μαθητών	Τακτική	Οι μαθητές, ο ίδιος (αυτοαξιολόγηση), οι συνάδελφοι (αλληλοαξιολόγηση)
	Υποστήριξη και ενθάρρυνση των μαθητών	Τακτική	Οι μαθητές, ο ίδιος (αυτοαξιολόγηση), οι συνάδελφοι (αλληλοαξιολόγηση)
	Ευχέρεια στη λύση ειδικών προβλημάτων	Τακτική	Οι μαθητές, ο ίδιος (αυτοαξιολόγηση), οι συνάδελφοι (αλληλοαξιολόγηση)
Επιστημονική και διδακτική κατάρτιση	Παρακολούθηση συνεδρίων, διαλέξεων, μετεκπαίδευση	Ονομαστική, αναλογική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
	Εξέταση σε θέματα ειδικότητας και διδακτικής	Αναλογική	Τεστ
	Διδασκαλία με χρήση σύγχρονων τεχνολογιών	Ονομαστική	Οι μαθητές, ο ίδιος (αυτοαξιολόγηση), οι συνάδελφοι (αλληλοαξιολόγηση)
Επιστημονικό έργο	Συγγραφικό έργο (δημοσιεύσεις, ανακοινώσεις, συγγράμματα)	Ονομαστική, αναλογική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
	Ανάπτυξη και αξιοποίηση εκπαιδευτικού υλικού και μεθόδων διδασκαλίας	Ονομαστική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
	Έρευνα στο πεδίο της εκπαίδευσης	Ονομαστική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
Απόδοση των σπουδαστών	Επιδόσεις των μαθητών στις γραπτές εργασίες και τα διαγωνίσματα	Αναλογική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
	Επιδόσεις των μαθητών στις τελικές εξετάσεις	Αναλογική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
	Αριθμός μαθητών που διέκοψε τις σπουδές	Αναλογική	Αρχείο της σχολικής μονάδας
	Παρουσίες των μαθητών	Αναλογική	Παρουσιολόγιο

- λήψης συνεντεύξης από τον αξιολογούμενο, από τους συναδέλφους του και απόαντιπροσωπευτικό δείγμα των σπουδαστών του βάσει ερωτήσεων που επίσης αντιστοιχούν σε κριτήρια των αξόνων αξιολόγησης,
- παρατήρησης του αξιολογουμένου στην αίθουσα διδασκαλίας και σύγκριση των επί μέρους δραστηριοτήτων του με προκαθορισμένη επιθυμητή συμπεριφορά.

Ολα αυτά στοιχεία, αφού τα ταξινομήσει και τα τοποθετήσει σε φάκελο, τα παραδίδει στον αξιολογούμενο, ο οποίος λαμβάνει γνώση του συλλεχθέντος υλικού.

Στη συνέχεια ο αξιολογούμενος, αφού αντικαταστήσει το όνοματεπώνυμό του από το υλικό με έναν δικό του κωδικό, αποστέλλει τον φάκελο στον αξιολογητή. Ο αξιολογητής προχωρά στην κωδικοποίηση, στην επεξεργασία και στην ανάλυση των δεδομένων.

Η επιλογή δύο προσώπων από κάθε ειδικότητα σε συνδιασμό και με την χρήση κωδικών εμφανίζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- τα πρόσωπα αυτά γνωρίζουν πολύ καλά το γνωστικό αντικείμενο των αξιολογουμένων,
- δεν διασαλεύεται η ηρεμία των σχολικών μονάδων κάθε περιοχής με την παρουσία ξένων προσώπων,
- ο εκπαιδευτικός δεν αισθάνεται "φακελωμένος" και απειλούμενος, αφού ουσιαστικά δεν υπάρχει κριτής ούτε κρίση ούτε κρινόμενος,
- εξασφαλίζεται η προθυμία του εκπαιδευτικού σε μία διαδικασία αλληλοαξιολόγησης, στην οποία δεν κυριαρχεί η κρίση αλλά η ουδέτερη συγκέντρωση δεδομένων,
- δεν δημιουργούνται εχθροί, αφού ο προσδιορισμός της διαδικασίας είναι ουδέτερος,
- η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού είναι μεν προσωπική, όμως με την χρήση κωδικών δεν είναι μετωπική, είναι συνεργατική και όχι επιθετική.

3.4. Επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων - Εκφραση των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης

Ο αξιολογητής θα παρουσιάσει τα αποτελέσματα της ανάλυσης, ιδιαίτερα τα προερχόμενα από ποσοτικές αναλύσεις, υπό μορφή γραφικών παραστάσεων

και πινάκων, ώστε να υποβοηθηθεί στην έκφραση των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης, τα οποία θα αποδόσει με την μορφή:

- *Ομαδοποίησης,* ήτοι ταξινόμησης κατά ομάδες των εκπαιδευτικών (δηλαδή των κωδικών τους) με βάση την εμφάνιση παρόμοιων χαρακτηριστικών ή την εκδήλωση παρεμφερούς συμπεριφοράς.
- *Αριθμητικής διάκρισης,* δηλαδή τοποθέτησης των εκπαιδευτικών (των κωδικών τους) πάνω σε μία αριθμητική κλίμακα ως προς κάποιο χαρακτηριστικό, ή καθορισμού του βαθμού, στον οποίο κάθε εκπαιδευτικός (κωδικός) διακρίνεται ως προς ένα χαρακτηριστικό.

Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης θα συγκριθούν τόσο με προηγούμενα (αν υπάρχουν) για να διαπιστωθεί αν σημειώθηκε εξέλιξη, όσο και με σύγχρονα άλλων ερευνών (αν υπάρχουν) για να εκτιμηθεί ο βαθμός εγκυρότητάς της. Επίσης θα αναφερθεί, αν έμειναν αναπάντητα ερωτήματα, τα οποία σε επόμενη αξιολόγηση πρέπει να διερευνηθούν.

3.5. Πιθανά προβλήματα

Για να έχει ολοκληρωμένη μορφή η ανάπτυξη ενός σχήματος αξιολόγησης του εκπαιδευτικού προσωπικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, επιβάλλεται να προβλεφθούν τα προβλήματα που θα μπορούσαν να εμφανισθούν κατά τον σχεδιασμό, την οργάνωση και την διεξαγωγή της αξιολόγησης, ώστε οι εμπλεκόμενοι φορείς να είναι προετοιμασμένοι για την ελαχιστοποίησή τους. Ας σημειωθεί, ότι η παρουσία προβλήματος σε κάποια φάση της αξιολόγησης μοιραία επιφέρει αντίστοιχο σφάλμα αξιολόγησης.

Στην περίπτωσή μας –όπως βέβαια σε κάθε αξιολόγηση εκπαιδευτικών–, επειδή λείπει το καθολικά αποδεκτό πρότυπο του ιδανικού εκπαιδευτικού για να χρησιμοποιηθεί ως απόλυτο μέτρο σύγκρισης (το οποίο έτσι κι αλλιώς θα διαφοροποιούνταν καθώς εξελίσσονται οι κοινωνικές αντιλήψεις περί αγωγής, παιδείας και εκπαίδευσης) είναι αναπότρεπτη η εμφάνιση προβλήματος σε αρκετά ίσως κριτήρια.

Ενα ακόμη πρόβλημα ίσως εμφανισθεί λόγω της ιδιαιτερότητας του εκπαιδευτικού έργου, αφού πολλά άτομα αδυνατούν να τεκμηριώσουν, γιατί τους αρέσει ή όχι ένας εκπαιδευτικός και η εργασία του.

Αν βέβαια τα αποτελέσματα της αξιολόγησης δεν αξιοποιηθούν, τότε θα μιλάμε για την εμφάνιση ενός ακόμη προβλήματος.

3.6. Σφάλματα

Η αναφορά των σφαλμάτων που πιθανώς θα εμφανισθούν κατά την διαδικασία της αξιολόγησης αλλά και ο προσδιορισμός του ποσοστού παραμόρφωσης των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης που επιφέρουν επιβάλλεται, όπως άλλωστε σε κάθε σοβαρή ερευνητική εργασία.

Για την περίπτωση της αξιολόγησης του εκπαιδευτικού προσωπικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, όπως εδώ προτείνεται με τον ορισμό δύο προσώπων αξιολόγησης για κάθε ειδικότητα και την χρήση κωδικών, τα σφάλματα θα είναι μάλλον περιορισμένα, σε σύγκριση με αυτά που αναφέρει η βιβλιογραφία [1], και εκτιμούμε ότι θα είναι τα ακόλουθα:

- *Το σφάλμα κριτηρίου*, το οποίο οφείλεται στο πρόβλημα των κριτηρίων που ανα-φέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, και προέρχεται από την ελαστικότητα και την σχετικότητα των κριτηρίων και των κλιμάκων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση ποιοτικών χαρακτηριστικών.
- *Το σφάλμα γνωριμίας* ίσως υπεισέλθει κατά την συλλογή των στοιχείων από τον συλλέκτη.
- *Το σφάλμα στερεοτύπου* ίσως υπεισέλθει κατά την συλλογή των στοιχείων από τον συλλέκτη.
- *Το λογικό σφάλμα*, στο οποίο πιθανώς να υποπέσει ο αξιολογητής, όταν αξιολογεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερα χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού.

3.7. Αποδέκτες - Αξιοποίηση των αποτελεσμάτων

Αποδέκτες των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης είναι πρωτίστως τα μέλη του εκπαιδευτικού προσωπικού, οι σχολικοί σύμβουλοι και ο φορέας αξιολόγησης (Μ.Ε.Α.Δ.Ε.).

Η χρήση κωδικών διασφαλίζει, ότι κάθε εκπαιδευτικός θα λάβει γνώση των ικανοτήτων του αλλά και των αδυναμιών του και ελλείψεών του στο διδακτικό και ερευνητικό έργο, χωρίς να κινδυνεύει να γίνει αντικείμενο εκμετάλλευσης αλλά και χλευασμού και κακόβουλων σχολίων ίσως από κάποιους κακεντρεχείς.

Ο διευθυντής του φορέα αξιολόγησης (Μ.Ε.Α.Δ.Ε.), σε συνεργασία με τους σχολικούς συμβούλους, θα προσδιορίσει το μέγεθος της απόκλισης της απόδοσης του εκπαιδευτικού προσωπικού της κάθε ειδικότητας από τον επιθυμητό βαθμό και θα προωθήσει τρόπους και μεθόδους βελτίωσης εντός του χρονικού πλαισίου έως την επόμενη αξιολόγηση. Μετά την επόμενη αξιολόγηση θα διαπιστωθεί ο βαθμός αποτελεσματικότητας της διορθωτικής λειτουργίας που προωθήθηκε...

4. Συμπεράσματα

Η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης πρέπει να εντάσσεται στα πλαίσια της συνεχούς βελτίωσης της διδασκαλίας και του περιεχομένου των μαθημάτων και όχι να επικεντρώνεται

στις κρίσεις του για βαθμολογική προαγωγή.

Η ανάπτυξη του σχήματος αξιολόγησης αυτού του προσωπικού στηριχθήκε μεν στις γενικές μεθόδους και απόψεις περί αξιολόγησης του προσωπικού της εκπαίδευσης [1], όμως λαμβανομένων υπόψιν των συνθηκών στην ελληνική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, έγινε επιλεκτική επιλογή των πλέον καταλλήλων ειδών και προσεγγίσεων αξιολόγησης, αξόνων και κριτηρίων αξιολόγησης.

Η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού προσωπικού της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, επειδή είναι εσωτερικό ζήτημα της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, πρέπει να διεξάγεται υπό την εποπτεία φορέα αξιολόγησης της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και να ανατίθεται σε δύο μέλη από κάθε ειδικότητα (συλλέκτης στοιχείων, αξιολογητής), τα οποία γνωρίζουν πολύ καλά το γνωστικό αντικείμενο των αξιολογουμένων και τις ειδικές συνθήκες των ειδικοτήτων τους. Μετά την συγκέντρωση των στοιχείων, αντικαθίστανται τα ονόματα των εκπαιδευτικών με κωδικούς και ακολουθεί η επεξεργασία, ανάλυση και έκφραση των αποτελεσμάτων. Η χρήση κωδικών αποτρέπει τις ανταγωνιστικές σχέσεις και διασφαλίζει την προστασία των αξιολογουμένων από ανεπιθύμητες παρενέργειες που δεν συνάδουν με τους στόχους της αξιολόγησης, χωρίς να καθίσταται εμπόδιο στην αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της έρευνας.

Βιβλιογραφία

1. Ευστ. Γ. Δημητρόπουλος, "Εκπαιδευτική Αξιολόγηση" (Μέρος πρώτο, "Η Αξιολόγηση της Εκπαίδευσης και του Εκπαιδευτικού Εργου"), εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα (1991)
2. Ν.2525/97 για την "Αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου και των εκπαιδευτικών".

ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗ ΤΗΣ ΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Απόσπασμα απο το βιβλίο «Σεισμοί της Ελλάδας» των **Βασίλη Παπαζάχου** και **Κατερίνας Παπαζάχου**

Μετανάστευση της σεισμικής δράσης στην ευρύτερη περιοχή του Αιγαίου έχει παρατηρηθεί σε διάφορες περιπτώσεις. Έχει, παραδείγματος χάριν, παρατηρηθεί ότι η ενδιαμέσου βάθους σεισμική δράση ακολουθείται από επιφανειακή δράση (Galanopoulos 1956, Karnik 1972). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η κατακόρυφη μετανάστευση που έχει παρατηρηθεί στην περιοχή των Σαρωνικού – Κορινθιακού κόλπου κατά την περίοδο 1962–1970 (Papazachos 1977). Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου έγιναν έξι ισχυροί σεισμοί ($M \geqslant 5.5$) στην περιοχή αυτή. Οι πρώτοι δύο (1962, 1964) έγιναν σε βάθη 120 km και 150 km, αντίστοιχα, ο τρίτος (1965) έγινε σε βάθος 75 km και ακολούθησαν (1965, 1968, 1970) τρεις επιφανειακοί σεισμοί ($h \sim 10$km). Δηλαδή, παρατηρήθηκε μια σαφής προς τα επάνω μετανάστευση της σεισμικής δράσης.

Κατά τη διάρκεια της περιόδου 1954–1970 παρατηρήθηκε στην ευρύτερη περιοχή του βορείου Αιγαίου μια προς τα ανατολικά μετανάστευση ισχυρών σεισμών ($M \geqslant 6.0$). Αυτή άρχισε στη Θεσσαλία (1954–1957), συνεχίσθηκε στο βόρειο Αιγαίο (1964–1968) και τελείωσε στη δυτική Τουρκία (1969–1970). Στο ανατολικό μέρος της ίδιας περιοχής (Μαγνησία) μια νέα σεισμική δραστηριότητα άρχισε το 1980 και συνεχίσθηκε στο βόρειο Αιγαίο (1981–1983) και στη δυτική Τουρκία (1983) (Papazachos and Papadimitriou 1984).

Έχει πρόσφατα διαπιστωθεί (Papazachos et al. 2000b) ότι η γένεση πολύ ισχυρών σεισμών ($M \geqslant 7.0$) στη θάλασσα του Μαρμαρά (βορειοδυτική Τουρκία) έχει ως συνέπεια τη διέγερση ισχυρών σεισμών στο Αιγαίο. Θεωρείται έτσι πιθανό ότι ο σεισμός της Αθήνας (7.9.1999) διεγέρθηκε από τη γένεση του μεγάλου σεισμού της Νικομήδειας (15.8.1999, $M = 7.6$). Η γένεση του σεισμού της Σκύρου στις 26 Ιουλίου 2001 ($M = 6.4$) αποτελεί πρόσθετο στοιχείο για την επανάληψη αυτής της φυσικής διαδικασίας μετά το σεισμό της Νικομήδειας.

Η πιο ενδιαφέρουσα, ίσως, περίπτωση μετανάστευσης ισχυρής σεισμικής δράσης στο Αιγαίο και τις γύρω περιοχές είναι το ότι οι μεγάλοι σεισμοί ($M \geqslant 7.0$) των τελευταίων εκατό ετών παρουσιάζουν μια διαδοχική μετανάστευση με κατεύθυνση βορράς – νότος – βορράς (Papadimitriou et al. 1985). Έτσι, κατά την περίοδο 1900–1932 (για περισσότερο από 32 έτη) όλοι οι μεγάλοι επιφανειακοί σεισμοί έγιναν στο βόρειο μέρος της περιοχής, ενώ μεγάλοι σεισμοί ενδιαμέσου μεγέθους έγιναν στο νότιο Αιγαίο κατά την περίοδο αυτή. Κατά την περίοδο 1933–1957 (25 έτη) όλοι οι σεισμοί ήταν επιφανειακοί, εκτός από έναν, και έγιναν στο κεντρικό και νότιο μέρος της περιοχής. Κατή την περίοδο 1958–2001 (44 έτη) η σεισμική δραστηριότητα μετανάστευσε ξανά στο βόρειο και κεντρικό τμήμα της περιοχής. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 44 ετών δεν έγινε σεισμός (επιφανειακός ή βάθους) με μέγεθος $M > 6.5$ στο νότιο μέρος της περιοχής. Είναι, συνεπώς, πολύ πιθανό ισχυρή σεισμική δραστηριότητα να αρχίσει στο νότιο Αιγαίο σύντομα με τη γένεση και πολύ ισχυρών σεισμών ($M > 6.5$).

ΜΟΛΙΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ