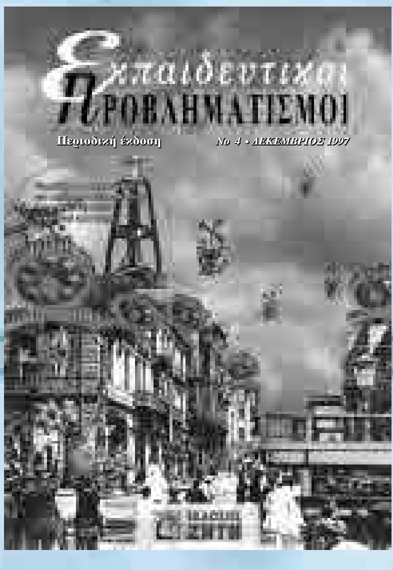
Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Περιοδική έκδοση

Νο 4 • ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1997



Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί
Νο 4 - Δεκέμβριος 1997

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ • ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
Π. ΖΗΤΗ & Σια Ο.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ:
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 17057, 542 10 Θεσσαλονίκη
Τηλ. - Fax: 0392/72.222 (3 γραμμές)
e-mail: ziti@hyper.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Θεσσαλονίκης:
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
Τηλ.: 031/203.720 • Fax: 031/211.305
Θεσσαλονίκη 546 35

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Αθηνών:
«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5)
Αθήνα 105 64
Τηλ.-Fax: 01/32 11 097

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISSN 1106-9252

ΕΤΗΣΙΑ ΣΥΝΔΡΟΜΗ (3 τεύχη)
Εκπαιδευτικοί: 3.000 δρχ.
Βιβλιοθήκες: 5.000 δρχ.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ - ΑΠΟΣΤΟΛΕΣ
ΑΝΝΗ ΖΗΤΗ
Τ.Θ. 17057, 542 10 Θεσσαλονίκη
Τηλ. - Fax: 0392/72.222
e-mail: ziti@hyper.gr

Τα πρώτα τεύχη διανέμονται ΔΩΡΕΑΝ στους Εκπαιδευτικούς

Ο εκδοτικός μας οίκος βρίσκεται στην ευχάριστη θέση να σας πληροφορήσει, ότι η ανταπόκριση των εκπαιδευτικών στα 3 προηγούμενα τεύχη των "Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ" που έχουν ήδη κυκλοφορήσει, ήταν πολύ μεγάλη (το 3ο τεύχος διενεμήθη σε 5.000 αντίτυπα). Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι οι στόχοι μας αγγίζουν τους διδακτικούς προβληματισμούς των εκπαιδευτικών μας και επιβεβαιώνει την επιτυχία της προσπάθειας του Οίκου μας να συμβάλει με την έκδοση του περιοδικού στην εκπαιδευτική διαδικασία στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Αισθανόμενοι την υποχρέωση που συνεπάγεται η επιτυχία αυτή, θα συνεχίσουμε να διανέμουμε δωρεάν και τα επόμενα τεύχη. Τα τεύχη μπορούν οι εκπαιδευτικοί να τα προμηθεύονται δωρεάν από τα βιβλιοπωλεία μας. Όταν δεν τα βρίσκουν μπορούν να τα ζητήσουν, με επιστολή τους ή συμπληρώνοντας το ένθετο ερωτηματολόγιο, να αποστέλλονται στο σχολείο τους.

Πελαγία Ζήτη

Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 10.000 δρχ. για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. (031) 203.720, Fax: (031) 211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: (01) 32 11 097

Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το "άμεσο περιβάλλον" της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,

- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Η έκδοση των «Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ», είναι μια σημαντική πρωτοβουλία του Εκδοτικού Οίκου ΖΗΤΗ στην προσπάθειά του να συμβάλει στην επιτυχία της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο.

Εμείς, οι επιστημονικοί υπεύθυνοι των «Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ», γνωρίζαμε τις δυσκολίες που έχει ένα τέτοιο εγχείρημα, αλλά πιστεύαμε ότι με τη δική σας συμβολή θα μπορούσαμε να προσφέρουμε πολύτιμη βοήθεια στο μαχόμενο εκπαιδευτικό μας.

Πρέπει να σας δηλώσουμε, από τη θέση αυτή, ότι δικαιωθήκαμε πέρα από κάθε προσδοκία.

Τονίζοντας και πάλι τους στόχους μας θα επαναλάβουμε ότι επιδιώκουμε:

- ***Οι «Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ» να αποτελέσουν στα χέρια σας ένα σημαντικό βοήθημα στην εκπαιδευτική πράξη και***
- ***να είναι ένας πρακτικός, χρήσιμος και σύντομος οδηγός, ο οποίος θα εξυπηρετεί καθαρά διδακτικούς σκοπούς, ενώ θα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και από τους μαθητές. Για το λόγο αυτό επιδιώκουμε τα παρουσιαζόμενα θέματα να προέρχονται, κατά προτεραιότητα, από ερεθίσματα και προτάσεις σας. Θεωρούμε αυτονόητο ότι οι προτάσεις σας, τις οποίες η Συντακτική Επιτροπή θεωρεί κατάλληλες, θα δημοσιεύονται επώνυμα.***

Περιμένοντας την ανταπόκρισή σας
Με εκτίμηση

Γεώργιος Παντελίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Επειδή η σύνταξη του περιοδικού μας κατακλύζεται από προτάσεις με κριτικές του τρόπου παρουσίασης της ύλης στα σχολικά βιβλία, με ασκήσεις ή διαφορετικές λύσεις μιας άσκησης θέλουμε να σας επισημάνουμε ότι μέσα στους στόχους, που έχουν από την αρχή θέσει οι Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, δεν περιλαμβάνεται

- *η κριτική των εγκεκριμένων σχολικών βιβλίων και των μεθόδων διδασκαλίας (εκτός και αν υπάρχει κάποιο λάθος), γιατί θα προκαλέσουμε σύγχυση στον μαχόμενο εκπαιδευτικό, ούτε και*
- *η παράθεση ασκήσεων ή όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων κάποιων ασκήσεων αφού αυτό καλύπτεται από το μεγάλο αριθμό βοηθημάτων που κυκλοφορούν.*

Στόχος μας είναι ο σχολιασμός και η επιστημονική (στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) ανάλυση θεμάτων, προτάσεων και φαινομένων που εξυπηρετούν καθαρά διδακτικούς σκοπούς καθώς και ασκήσεων ή λύσεων που υποδεικνύουν μεθόδους και τρόπους αντιμετώπισης προβλημάτων που εμφανίζονται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Με εκτίμηση
Γεώργιος Παντελίδης

Περιεχόμενα

Μαθηματικά

Φυσική

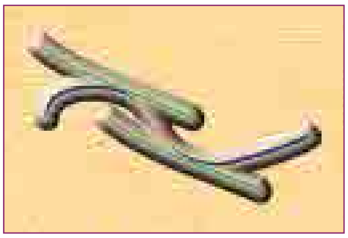
Χημεία

Βιολογία

Φιλολογικά

Από τα γνωρίζατε;

Παράδειγμα στην ερώτηση



Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Του **Γ. Παντελίδη**, Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Στο σχολικό βιβλίο (Ανάλυση Γ Λυκείου) παρουσιάζεται η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως μιας συναρτήσεως ως οριακή θέση ημιευθειών, με άλλα λόγια γεωμετρικά. Όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (υπενθυμίζουμε ότι η f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και το x_0 Δ), τότε ως εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ορίζεται (σελ. 137) να είναι η ευθεία

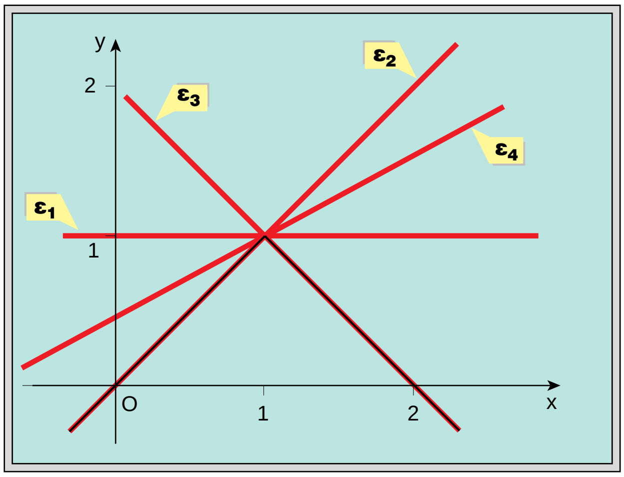
(*) $$y = f(x_0) + f\ (x_0)(x - x_0).$$

Έχοντας υπόψη τη χρήση της έννοιας της *επαφής* και της *εφαπτομένης*, που στην καθομιλούμενη σημαίνουν «βρίσκονται πολύ κοντά», «μόλις ακουμπούν», τίθενται τα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποια είναι η μαθηματική ερμηνεία και διατύπωση αυτών των εννοιών;
- Γιατί οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (σχ. 1) δεν είναι εφαπτομένες της συναρτήσεως

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases};$$

Θα προσπαθήσουμε εδώ να οδηγηθούμε στον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης και να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα.



Σχ.1

Η εφαπτομένη (*), που είναι η ευθεία η οποία περνά από το σημείο A και έχει συντελεστή διευθύνσεως $f\ (x_0)$, είναι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$g(x) = f(x_0) + f\ (x_0)(x - x_0).$$

Για να ερμηνεύσουμε πόσο "κοντά" στην περιοχή του σημείου x_0 βρίσκονται οι συναρτήσεις f, g θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πηλίκου

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$$

όταν το x x_0. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

(#) $$\lim_{x \quad x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Τι σημαίνει όμως η ισότητα

$$\lim_{x \quad x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0;$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x)-g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 ισχύει

$$\lim_{x \quad x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = f(x_0) - g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Εξάλλου, από την (#) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, έστω $\varepsilon = 10^{-3}$, υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x Δ με $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\left|\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\right| < 10^{-3}$$

ή

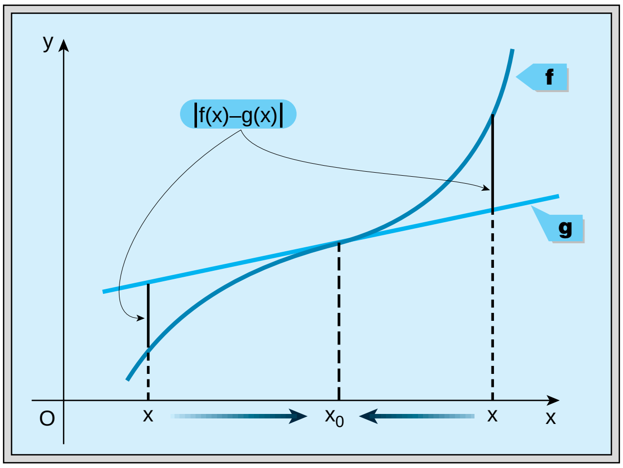
$$|f(x) - g(x)| < 10^{-3}\,|x - x_0|,$$

που σημαίνει ότι η διαφορά $f(x)-g(x)$ τείνει ταχύτερα στο 0 από ό,τι το $|x-x_0|$.

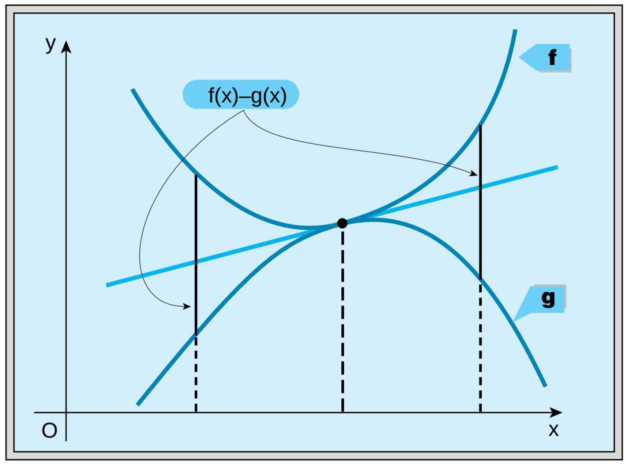
Επομένως "κοντά" στο x_0 η απλή **γραμμική συνάρτηση**

$$g(x) = f(x_0) + f\ (x_0)(x - x_0)$$

μπορεί να αντικαταστήσει την $f(x)$ με ικανοποιητική προσέγγιση (σχ. 2).



Σχ.2



Σχ.3

Ορισμός: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο X και συνεχείς στο $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f, g **εφάπτονται στο** x_0, όταν

(**) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=0.$$

1. Από την ισότητα (**) και επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 έπεται
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=f(x_0)-g(x_0)=0,$$
δηλ. $f(x_0)=g(x_0)$, που σημαίνει ότι για να εφάπτονται δύο συναρτήσεις στο x_0 πρέπει να διέρχονται από το σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$.

2. Και στην περίπτωση αυτή είναι άμεση η διαπίστωση ότι οι διαφορές $f(x)–g(x)$ τείνουν ταχύτερα στο 0 από ό,τι οι διαφορές $x–x_0$, όταν το $x\to x_0$.

3. Αν οι συναρτήσεις f, g και οι συναρτήσεις g, h εφάπτονται στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις f, h εφάπτονται στο x_0. Αυτό είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων των ορίων και της ισότητος:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-h(x)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}=0.$$

Επομένως, η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως μιας συναρτήσεως στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ πρέπει να είναι μια ευθεία της μορφής
$$g(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0)$$
και να ικανοποιεί την (**). Με άλλα λόγια η απλούστερη συνάρτηση που ικανοποιεί την (**).

Για την περίπτωση ύπαρξης της εφαπτομένης ισχύει η πρόταση:

Πρόταση: Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και $x_0 \in Δ$. Τότε η ευθεία
$$g(x)=f(x_0)+\alpha(x–x_0)$$
εφάπτεται της f στο x_0, όταν, και μόνο όταν, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\alpha = f'(x_0)$.

Απόδειξη: Από τις ισότητες
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)}{x-x_0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\alpha$$
έχουμε:

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε αποδείξει (βλ. #) ότι για $\alpha = f'(x_0)$ οι f, g εφάπτονται.
- Αν οι f, g εφάπτονται, τότε από την ισότητα
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\alpha=0$$
προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x_0)=\alpha$.

Συμπέρασμα: Διαπιστώσαμε ότι, όταν η f είναι παραγωγίσιμη, η εφαπτομένη (*) **υπάρχει**, είναι **μοναδική** και **προσεγγίζει ικανοποιητικά** τις τιμές της συναρτήσεως.

Παρατήρηση: Οι ευθείες που περνούν από το σημείο A(1, 1) (σχ. 1) έχουν εξίσωση $g(x) = 1+\alpha(x–1)$, που για $\alpha=0$ είναι η ε_1, για $\alpha=1$ η ε_2, για $\alpha=–1$ η ε_3 και για $0<\alpha<1$ η ε_4.

Το πηλίκο
$$\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=\begin{cases}1-\alpha, & x\le 1\\ -1-\alpha, & x>1\end{cases}$$
δεν έχει όριο για καμιά τιμή του α.

Συνεπώς καμιά από τις ευθείες $g(x) = 1+\alpha(x–1)$ δεν μπορεί να ικανοποιεί την (**). Αυτό σ'υμφωνα με την πρόταση, ήταν αναμενόμενο αφού η f(x) δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

Το σχόλιο που ακολουθεί στοχεύει να ενημερώσει το διδάσκοντα και δεν πρέπει να παρουσιαστεί στο μάθημα:

Σημείωση: Όταν η προσέγγιση της f με τις τιμές της γραμμικής συναρτήσεως $g(x) = f(x_0)+f(x_0)(x–x_0)$ δεν είναι ικανοποιητική, τότε καταφεύγουμε σε πολυώνυμα ανωτέρου βαθμού.

Ορισμός: Δίνονται οι συναρτήσεις f, h δύο φορές παραγωγίσιμες στο x_0 Δ. Θα λέμε ότι οι f, h έχουν επαφή δευτέρας τάξεως όταν τόσο οι f, h, όσο και οι f, h εφάπτονται στο x_0, δηλ.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-h(x)}{x-x_0}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-h(x)}{x-x_0}=0.$$

Έτσι για να έχει η παραβολή

$$h(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + b(x-x_0)^2$$

με τη συνάρτηση f επαφή δευτέρας τάξεως θα πρέπει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-h(x)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)-b(x-x_0)^2}{x-x_0}=f(x_0)-\alpha=0,$$

δηλ. $\alpha = f(x_0)$, και

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-h(x)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x)-2b(x-x_0)}{x-x_0}=f(x_0)-2b=0,$$

δηλ. $b=\dfrac{f(x_0)}{2}$.

Επομένως, η παραβολή πρέπει να έχει τη μορφή

$$h(x) = f(x_0) + f(x_0)(x-x_0) + \frac{f(x_0)}{2}(x-x_0)^2 .$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε η h προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-h(x)}{(x-x_0)^2}=0$$

(χρησιμοποιείστε για την απόδειξη τον κανόνα de L'Hospital), που σημαίνει ότι οι διαφορές $f(x)–h(x)$ τείνουν ταχύτερα στο 0 από ό,τι το $(x–x_0)^2$, δηλ. ταχύτερα από ό,τι οι διαφορές $x–x_0$. Επομένως οι τιμές $h(x)$ προσεγγίζουν ικανοποιητικότερα τις τιμές $f(x)$ από ό,τι οι της $g(x)$.

Αυτό το γνωρίζατε

Υπάρχει καμπύλη του επιπέδου που καλύπτει καθε σημείο του τετραγώνου [0, 1] [0, 1]

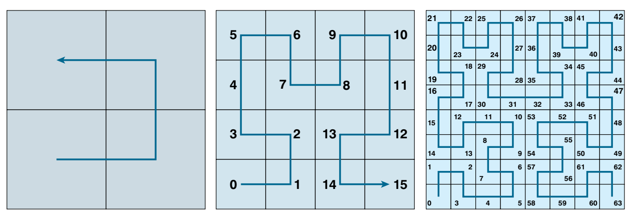
Του Γ. Παντελίδη, Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Μαθηματικά μια **καμπύλη** του επιπέδου ορίζεται από δύο συνεχείς συναρτήσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ ορισμένες σ' ένα διάστημα $I = [\alpha, \beta]$ και το σύνολο των σημείων $\Gamma = \{(x(t), y(t))\ \mathbb{R}^2,\ t\ [\alpha, \beta]\}$. Εσφαλμένα στην καθομιλουμένη ονομάζουμε καμπύλη το **ίχνος** της, δηλ. το σύνολο Γ.

Μετά από τον ορισμό αυτό το παραπάνω ερώτημα διατυπώνεται ως εξής: **Το ίχνος μιας καμπύλης μπορεί να διέρχεται από κάθε σημείο του τετραγώνου [0, 1] [0, 1];**

Η αυτονόητη ερμηνεία ότι μια καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως η τροχιά ενός κινούμενου σημείου, που δεν κάνει άλματα, δηλ. μαθηματικά, η συνεχής εικόνα ενός διαστήματος, είχε παραπλανήσει τόσο τους μαθηματικούς όσο και τους φυσικούς. Ήταν λοιπόν μια έκπληξη, όταν ο Giuseppe Peano (1858-1932) το 1890 κατασκεύασε μια καμπύλη που ποτέ δε θα μπορούσε να θεωρηθεί ως τέτοια, αφού το ίχνος της "***καλύπτει*** **πλήρως ένα τετράγωνο**". Μια τέτοια καμπύλη ονομάζεται ***καμπύλη Peano***.

Ο David Hilbert κατασκεύασε το 1891 μια καμπύλη Peano, της οποίας η ακριβής συνεχής "διαδρομή", που καλύπτει το τετράγωνο, δεν μπορεί να αποδοθεί. Μπορούμε όμως να πάρουμε μια ιδέα της "διαδρομής" προσεγγίζοντάς την με μια ακολουθία πολυγώνων $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ Παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις των πολυγώνων P_1, P_2 και P_3, που συνδέουν τα κέντρα των $4^1=4$, $4^2=16$ και $4^3=64$ τετραγώνων αντίστοιχα,



στα οποία διαιρούμε το τετράγωνο [0, 1] [0, 1].

Σημείωση: Το ίχνος της καμπύλης Peano έχει εμβαδόν 1 ενώ το διάστημα [0, 1] έχει εμβαδόν 0. Σύμφωνα με ένα σημαντικό θεώρημα του L.E.J. Brouwer (1911) δεν μπορεί να υπάρχει αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής απεικόνιση (*τοπολογική απεικόνιση*) του [0, 1] στο [0, 1] [0, 1] γιατί τότε θα είχαν την ίδια διάσταση.

Βιβλιογραφία:

1. Karl Strubecker, *Einführung in die Höhere Mathematik II,* München-Wien 1967.
2. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de Analizà Mathematicà II,* Bucuresti 1964.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BERNOULLI

Του **Δ. Κραββαρίτη,** Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Στο σχολικό βιβλίο (Ανάλυση Γ Λυκείου) παρουσιάζεται η **ανισότητα Bernoulli:**

> *Για α>–1, και κάθε ν ℕ* ισχύει η ανισότητα* ***Bernoulli:***
>
> $$(1+\alpha)^{\nu} \geq 1+\nu\alpha.$$

Η ανισότητα ισχύει και για α=–1.

Η απόδειξή της γίνεται με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Εδώ θα παρουσιάσουμε, ως ένα χρήσιμο παράδειγμα εφαρμογής των παραγώγων, την **ανισότητα Bernoulli** για την περίπτωση, που ο εκθέτης ν δεν είναι ένας φυσικός αριθμός αλλά ένας πραγματικός αριθμός.

Γενικευμένη ανισότητα Bernoulli:

> **α)** Αν x>–1, τότε για κάθε τ ℝ με τ≥1 ισχύει:
>
> **(*)** $$\mathbf{(1+x)^{\tau} \geq 1+\tau x.}$$
>
> Ειδικότερα, η (*) ισχύει για τ ℕ*.
>
> **β)** Αν x>–1, τότε για κάθε τ ℝ με 0<τ<1 ισχύει:
>
> **(**)** $$\mathbf{(1+x)^{\tau} \leq 1+\tau x.}$$

Απόδειξη: Η ισότητα στην (*) ισχύει, όταν τ=1 καθώς και όταν x=0, ενώ στην (**) όταν x=0, γι' αυτό, χάριν απλότητας, δε θα συμπεριλάβουμε τις περιπτώσεις αυτές στην παρακάτω μελέτη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (1+x)^{\tau},\ x>-1,\ \tau>0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I = (–1, +•). Τότε για κάθε x (–1, +•), σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για το διάστημα [x, 0], αν x<0 (αντ. [0, x], αν x>0), υπάρχει

$$\xi\ (x, 0)\ \ (-1, 0)\ \ \big(\text{αντ. } \xi\ (0, x)\ \ (0\ +\bullet)\big)$$

τέτοιο, ώστε

$$f(x) - f(0) = f\,(\xi)(x-0)$$

ή

(#) $$f(x) = f(0) + f\,(\xi)x = 1 + f\,(\xi)x.$$

α) Επειδή για τ>1 ισχύουν

$$f\,(x) = \tau(1+x)^{\tau-1} = \begin{cases} <\tau, \text{ αν } -1<x<0 \\ >\tau, \text{ αν } \quad x>0 \end{cases}$$

από την (#) προκύπτει

$$f(x) > 1+\tau x,\ \text{ δηλ. } (1+x)^{\tau} > 1+\tau x.$$

Αν τ>1, τότε στην αποδεικτέα σχέση ισχύει η ισότητα, μόνο όταν x=0.

β) Επειδή για 0<τ<1, δηλ. τ–1<0, ισχύουν

$$f\,(x) = \tau(1+x)^{\tau-1} = \begin{cases} >\tau, \text{ αν } -1<x<0 \\ <\tau, \text{ αν } \quad x>0 \end{cases}$$

από την (#) προκύπτει

$$f(x) < 1+\tau x,\ \text{ δηλ. } (1+x)^{\tau} < 1+\tau x.$$

◆

ΜΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Του **Γιάννη Χ. Θωμαΐδη**, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, 1ο Λύκειο Ηλιούπολης

Νεώτερες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση: Οι αντιλήψεις για τη μάθηση που κυριαρχούν τα τελευταία χρόνια τη Διδακτική των Μαθηματικών έχουν δημιουργήσει ένα νέο "τοπίο" στη διδασκαλία: ο μαθητής δεν θεωρείται "αποδέκτης" μιας έτοιμης μαθηματικής θεωρίας αλλά συμμετέχει ενεργά στην οικοδόμησή της μέσα από ειδικές καταστάσεις-προβλήματα. Από την άλλη μεριά, ο καθηγητής δεν είναι "αναμεταδότης" αλλά οργανωτής και εμψυχωτής τέτοιων καταστάσεων, που δίνει ιδέες και καθοδηγεί τη δραστηριότητα των μαθητών. Οι αρχές αυτές συνιστούν, σε γενικές γραμμές, τους άξονες γύρω από τους οποίους υλοποιούνται τα τελευταία χρόνια σημαντικά προγράμματα μεταρρύθμισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε διάφορες χώρες. Οι νέες αυτές αντιλήψεις, στο βαθμό που θα αφομοιωθούν από τα επίσημα σχολικά συστήματα και τη καθημερινή διδακτική πράξη, μπορούν να μεταβάλλουν ριζικά την καθιερωμένη εικόνα για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Θα επιχειρήσουμε στα επόμενα να αποσαφηνίσουμε τις συνέπειες αυτών των νέων αντιλήψεων, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα την έννοια της απόλυτης τιμής.

Η παραδοσιακή διδασκαλία της απόλυτης τιμής: Οι αντιλήψεις για τη μάθηση που κυριαρχούν τα τελευταία χρόνια τη Διδακτική των Μαθηματι διδασκαλία αυτής της έννοιας ακολουθεί παραδοσιακά μια "τριμερή" πορεία, η οποία καθιερώθηκε διεθνώς την περίοδο της μεταρρύθμισης των "Νέων Μαθηματικών" (αρχές της δεκαετίας του 1960) για να υποστηριχτεί διδακτικά η συστηματική διδασκαλία της Ανάλυσης που εισάγονταν τότε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Αρκετές έρευνες που έγιναν τα τελευταία χρόνια (βλ. [4]) έχουν επαληθεύσει μια κοινή διδακτική εμπειρία, που συμμερίζονται όσοι διδάσκουν Μαθηματικά στο Λύκειο. Η συντριπτική πλειψηφία των μαθητών δυσκολεύεται εξαιρετικά να χρησιμοποιήσει την έννοια της απόλυτης τιμής εκεί που είναι πραγματικά απαραίτητη: δηλαδή στο χειρισμό των ανισοτικών σχέσεων που αποτελούν τη "ραχοκοκκαλιά" των εψιλοντικών ορισμών και αποδείξεων της Ανάλυσης. Παρουσιάζει όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι ερμηνείες και η "απόδοση ευθυνών" γι' αυτήν την αποτυχία εστιάζονται κυρίως στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Στο Γυμνάσιο για παράδειγμα, η αποκλειστική ενασχόληση με την απόλυτη τιμή συγκεκριμένων αριθμών και με ασκήσεις του είδους "Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\Omega-3\Omega+\Omega+5\Omega-\Omega-6\Omega$", καλλιεργεί την αντίληψη ότι "απόλυτη τιμή είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του". Αυτή η "γνώση", η οποία είναι ικανοποιητική για τα ζητήματα που εμφανίζονται στο επίπεδο του Γυμνασίου, σταθεροποιείται και γίνεται αργότερα στο Λύκειο ένα σημαντικό εμπόδιο για να κατανοηθεί ο γενικός ορισμός της απόλυτης τιμής-συνάρτησης:

$$\Omega x\Omega = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Από την άλλη μεριά, οι ασκήσεις επίλυσης εξισώσεων με απόλυτες τιμές στην Α'Λυκείου, που συνοδεύονται από διαδικασίες "απομάκρυνσης" του συμβόλου της απόλυτης τιμής (π.χ. πίνακες προσήμων), καλλιεργούν την αντίληψη ότι η απόλυτη τιμή δεν είναι παρά ένα "σύμβολο που πρέπει να φύγει". Μια τέτοια αντίληψη όμως δεν βοηθά καθόλου στην κατανόηση των ανισοτικών σχέσεων που εκφράζονται με την βοήθεια του συμβόλου της απόλυτης τιμής, στις οποίες το τελευταίο όχι μόνο δεν "φεύγει" αλλά γίνεται ουσιαστικό εργαλείο του αλγεβρικού λογισμού. Όπως δείχνουν λοιπόν αυτές οι ερμηνείες για τις δυσκολίες των μαθητών, η "σπειροειδής" διδασκαλία που έχει υιοθετηθεί όχι μόνο δεν διευκολύνει τη μάθηση αλλά εισάγει γνώσεις-εμπόδια για την επιδιωκόμενη χρήση της απόλυτης τιμής στην Ανάλυση.

Πώς πρέπει να διδάσκεται η απόλυτη τιμή; Τα παραπάνω, θεωρούμενα από τη σκοπιά των νεώτερων αντιλήψεων που αναφέραμε, επιβάλλουν μια ριζική αλλαγή του πλαισίου διδασκαλίας της

απόλυτης τιμής. Έχοντας ως βασικό αλλά απώτερο διδακτικό στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές τον τρόπο χρησιμοποίησης της απόλυτης τιμής στη στοιχειώδη Ανάλυση, δεν υπάρχει κατ' αρχήν κανένας λόγος εισαγωγής αυτής της έννοιας στο Γυμνάσιο. Οι κανόνες των πράξεων των ακεραίων μπορούν να διατυπωθούν εξίσου (αν όχι περισσότερο) κατανοητά χωρίς καμμιά αναφορά στην απόλυτη τιμή! Επίσης, οι βασικές ανισοτικές σχέσεις που εκφράζονται τυπικά με το σύμβολο της απόλυτης τιμής (όπως π.χ. η τριγωνική ανισότητα) αποκτούν νόημα μέσα στο πλαίσιο τυπικής διαπραγμάτευσης προσεγγιστικών τεχνικών (π.χ. εκτιμήσεις σφαλμάτων), προέκταση των οποίων υπήρξαν ιστορικά οι εψιλοντικές τεχνικές της Ανάλυσης. Δεν βλέπουμε λοιπόν κανένα λόγο μιας θεωρητικής διαπραγμάτευσης των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής στην Α'Λυκείου με τον τρόπο που γίνεται σήμερα, δηλαδή τελείως αποκομμένη από τη διδασκαλία των εννοιών της σύγκλισης και του ορίου.

Εδώ βέβαια τίθεται το εύλογο ερώτημα: Πότε και με ποιόν τρόπο θα εισάγουμε για πρώτη φορά την έννοια της απόλυτης τιμής; Η απάντηση είναι, κατά την άποψή μας, απλή και σύνθετη ταυτόχρονα. Η εισαγωγή θα γίνει τη στιγμή που η έννοια αυτή είναι πράγματι απαραίτητη και οι μαθητές μπορούν σχετικά εύκολα να αντιληφθούν την αναγκαιότητα και το ρόλο της.

Ποιά ζητήματα όμως της σχολικής μαθηματικής ύλης αναδεικνύουν αυτά τα στοιχεία;

Έχοντας πραγματοποιήσει αλλού (βλ. [4]) μια λεπτομερή ιστορική και διδακτική ανάλυση της έννοιας της απόλυτης τιμής, πιστεύουμε ότι υπάρχουν τρία τέτοια ζητήματα στα οποία μπορούν να δημιουργηθούν καταστάσεις-προβλήματα που αναδεικνύουν τη σημασία αυτής της έννοιας.

Απόλυτη τιμή και ρίζες. Το πρώτο ζήτημα έχει σχέση με το μονότιμο του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας και συγκεκριμένα με την ισότητα

$$\sqrt{x^2} = x\,.$$

Στην ενότητα του σχολικού βιβλίου που διαπραγματεύεται τις ιδιότητες των ριζών, αυτή η ισότητα εμφανίζεται ως μια απλή εφαρμογή της ήδη γνωστής (από το Γυμνάσιο!) έννοιας της απόλυτης τιμής. Τα πράγματα όμως δεν είναι τόσο απλά όσο θέλει να πιστεύει η διδασκαλία, αν λάβουμε υπόψη το πλήθος των μαθητών που "επιμένουν" ότι

$$\sqrt{x^2} = \Omega x \Omega$$

αλλά και την αποδοχή αυτής της ισότητας κατά το παρελθόν από τους μαθηματικούς (βλ. [5]).

Το ζήτημα της μονοτιμίας των ριζών δεν αποτελεί "απλή εφαρμογή" αλλά, αντίθετα, προσφέρει ένα κατάλληλο πλαίσιο προβληματισμού μέσα από το οποίο ο γενικός ορισμός της απόλυτης τιμής προβάλλει ως αναγκαιότητα (κάτι ανάλογο, όπως θα δούμε παρακάτω, συνέβη και ιστορικά). Προτείνουμε λοιπόν να αντιστραφεί η διδακτική ακολουθία που χρησιμοποιείται σήμερα και η εισαγωγή της απόλυτης τιμής να γίνει για πρώτη φορά στο σημείο όπου θίγεται η μονοτιμία των ριζών.

Αφού εξηγήσουμε γιατί χρησιμοποιείται μόνο η θετική τιμή μιας τετραγωνικής ρίζας (στο σχολείο αυτό θα μπορούσε π.χ. να γίνει με την παρατήρηση ότι οι ισότητες $\sqrt{16} = +4$ και $\sqrt{16} = -4$ οδηγούν στο αποτέλεσμα $+4 = -4$), θέτουμε στους μαθητές το εξής ερώτημα: "Με τι ισούται το σύμβολο $\sqrt{x^2}$ όταν το x είναι μια μεταβλητή που διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών;"

Αφού συζητηθούν διάφορες προτάσεις, ιδιαίτερα η "φυσιολογικά" αναμενόμενη απάντηση $\sqrt{x^2} = x$ και εξεταστεί η προϋπόθεση κάτω από την οποία αυτή ισχύει, τότε δημιουργούνται οι προϋποθέσεις για να φτάσουν οι μαθητές (με την κατάλληλη, εννοείται, διδακτική παρέμβαση) στο συμπέρασμα ότι πρέπει να είναι

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Αυτή είναι μια αναλυτική έκφραση "διπλού τύπου", την πρώτη ίσως που συναντούν οι μαθητές, που δίνει ευκαιρίες για συζήτηση πάνω στη "μορφολογία" των αλγεβρικών παραστάσεων, τους τύπους των συναρτήσεων κ.λ.π. Είναι χαρακτηριστικό ότι το ίδιο ακριβώς παράδειγμα χρησιμοποίησε ο Cauchy στα μέσα του 19ου αιώνα, για να καταπολεμήσει τις αντιλήψεις που συσχέτιζαν την έννοια της συνέχειας των συναρτήσεων με το είδος της αναλυτικής τους παράστασης. Εμείς μπορούμε να θέσουμε εδώ το ζήτημα μιας πιο "οικονομικής" έκφρασης και την ανάγκη ενός νέου συμβόλου, γεγονός που θα μας οδηγήσει στην εισαγωγή της "νέας έννοιας":

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases} = \Omega x \Omega$$

Μέχρι εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το ζήτημα της μονοτιμίας των τετραγωνικών ριζών για να "κατασκευάσουμε" μέσω αυτού το γενικό ορισμό της απόλυτης τιμής. Θεωρούμε όμως ότι η αναγκαιότητα και η αυτονομία της έννοιας δεν εδραιώνονται ικανοποιητικά μόνο μέσα από το συγκεκριμένο ζήτημα. Κατ' αρχήν, για να δικαιολογηθεί η χρήση του όρου "απόλυτη τιμή", θα πρέπει να γίνει φανερό ότι η εφαρμογή του παραπάνω ορισμού σε συγκεκριμένους αριθμούς έχει ως αποτέλεσμα την "αποδέσμευσή" τους από το αρνητικό πρόσημο (σύμφωνα με την ερμηνεία: "απολύω

= αποδεσμεύω" και "απόλυτος = αδέσμευτος"). Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να φανερωθεί η λειτουργικότητα της νέας έννοιας και σε άλλα ζητήματα.

Απόλυτη τιμή και ανισότητες: Το δεύτερο ζήτημα από τη σχολική ύλη που αναδεικνύει την έννοια της απόλυτης τιμής είναι ο λογισμός των ανισοτήτων, στον οποίο οι δυσκολίες των μαθητών ως γνωστόν είναι τεράστιες. Για παράδειγμα, σε μια έρευνα που δημοσιεύσαμε πρόσφατα (βλ. [6]), ελάχιστοι μόνο μαθητές της Α'Λυκείου ήταν σε θέση να απαντήσουν σωστά στο ερώτημα "τι συμπέρασμα προκύπτει για τους πραγματικούς αριθμούς x και y από την ανισότητα $x^2 < y^2$; " Αυτό ακριβώς όμως το ερώτημα υπήρξε ιστορικά ένα από τα πρώτα ζητήματα στα οποία εμφανίστηκε, σχεδόν με υπονοούμενο τρόπο, η έννοια της απόλυτης τιμής. Ο Lagrange ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε στα μέσα του 18ου αιώνα εκφράσεις του είδους "αν $x^2 < y^2$ τότε $x < y$, ανεξάρτητα από τα πρόσημα", σε εργασίες του στις οποίες έκανε εκτεταμένη χρήση του λογισμού των ανισοτήτων. Η προηγηθείσα εισαγωγή της απόλυτης τιμής μέσα από το ζήτημα της μονοτιμίας των τετραγωνικών ριζών, μας δίνει την ευκαιρία να διευρύνουμε το ρόλο αυτής της έννοιας, προτείνοντας στους μαθητές το προηγούμενο ερώτημα ως ένα πρόβλημα προς διερεύνηση. Μπορούμε να αρχίσουμε αυτή τη διερεύνηση με την αντικατάσταση συγκεκριμένων τιμών των μεταβλητών x και y στην ανισότητα $x^2 < y^2$, την απόρριψη της "εύλογης" απάντησης ότι "αν $x^2 < y^2$ τότε $x < y$" και να καταλήξουμε, διερύνοντας διαδοχικά την κατάσταση προβληματισμού, σε μια "τυπική" εξαγωγή του σχετικού αποτελέσματος:

$$x^2 < y^2 \qquad \sqrt{x^2} < \sqrt{y^2} \qquad ΩxΩ < ΩyΩ$$

Απόλυτη τιμή και απόσταση: Το τρίτο ζήτημα που αναδεικνύει το ρόλο της απόλυτης τιμής στο επίπεδο της μαθηματικής ύλης της Α'Λυκείου, είναι η αναλυτική παράσταση της απόστασης 2 σημείων στην αριθμητική ευθεία. Αυτή συνδέεται και σήμερα με την εισαγωγή της απόλυτης τιμής στα βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου, αλλά μένει αναπάντητο το ερώτημα: "Γιατί πρέπει να εκφράσουμε αναλυτικά την απόσταση 2 σημείων στην αριθμητική ευθεία;" Το ερώτημα παραπέμπει βέβαια στην τοπολογία του R και τελικά στην έννοια της σύγκλισης, αλλά αυτά τα ζητήματα δεν αφορούν την ύλη της Α'Λυκείου. Μια άλλη εύλογη απάντηση μπορεί να δοθεί αν η εισαγωγή των συντεταγμένων συνδυαστεί (όπως συνέβη ιστορικά) με την ανάγκη αναλυτικής αντιμετώπισης προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έτσι η πρώτη εμφάνιση της απόλυτης τιμής-απόστασης θα συνδυαστεί με την απόδειξη του σημαντικότατου τύπου της απόστασης 2 σημείων στο επίπεδο, όπου έχουμε μια φυσιολογική γενίκευση της σχέσης

$$Ωx_1 - x_2Ω = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

στην

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$$

μέσω του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Η σύνδεση απόλυτης τιμής και απόστασης αποτελεί το βασικό πλαίσιο στο οποίο θα κινηθεί από εδώ και πέρα η διδασκαλία. Οι κλασικές ασκήσεις αλγεβρικών παραστάσεων, εξισώσεων ή ανισώσεων με απόλυτες τιμές, που αντιμετωπίζουμε χρησιμοποιώντας τεχνικές "απομάκρυνσης των απολύτων τιμών", αποκτούν τελείως διαφορετικό νόημα όταν θεωρηθούν από την τοπολογική οπτική της απόστασης πάνω στην αριθμητική ευθεία. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά:

Παράδειγμα α

Αν $-1 < x < 4$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = Ωx+1Ω+Ωx-4Ω$$

Θεωρώντας ότι αυτή η παράσταση εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του x από τους αριθμούς -1 και 4, τότε με τη βοήθεια της αριθμητικής ευθείας διαπιστώνουμε αμέσως ότι για κάθε x ανάμεσα στα -1 και 4, θα είναι A=5.

Παράδειγμα β

Να λυθεί η εξίσωση

$$A = Ωx+2Ω+Ωx-2Ω$$

(ή: Να βρεθούν οι αριθμοί που το άθροισμα των αποστάσεων τους από το –2 και το 2 ισούται με 6)

Αν λάβουμε υπόψη ότι η απόσταση του –2 από το 2 είναι 4, τότε με τη βοήθεια της αριθμητικής ευθείας διαπιστώνουμε ότι λύσεις της εξίσωσης είναι οι x=–3 και x=3.

Παράδειγμα γ

Να λυθεί η ανίσωση

$$Ωx-2Ω> 3$$

Εδώ ζητούνται οι αριθμοί που η απόστασή τους από το 2 είναι μικρότερη από το 3. Εντοπίζοντας στην αριθμητική ευθεία τους αριθμούς που απέχουν από το 2 ακριβώς 3 διαπιστώνουμε ότι λύση της ανίσωσης είναι κάθε x με $-1 < x < 5$.

Στα παραδείγματα αυτά γίνεται, όπως βλέπουμε, μια συνεχής προσφυγή στην αριθμητική ευθεία. Αυτός ο τρόπος επίλυσης έχει ασφαλώς διδακτική αξία για την εξοικείωση των μαθητών με τη σχέση απόλυτης τιμής και απόστασης, αλλά ούτε επιθυμητός ούτε εφικτός είναι σε όλες τις περιπτώσεις παρόμοιων προβλημάτων. Αντί να καταφύγουμε όμως σε τεχνικές "απομάκρυνσης των απολύτων τιμών", μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα προβλήματα για να δείξουμε τη σημασία της διατύπωσης γενικών θεωρημάτων που επιτρέπουν την ενιαία διαπραγμάτευσή τους. Π.χ., η επίλυση της ανίσωσης $\Omega 2x-3\Omega<5$ με τη βοήθεια αποστάσεων προϋποθέτει το μετασχηματισμό της στη μορφή $\Omega x-\frac{3}{2}\Omega<\frac{5}{2}$ και στη συνέχεια μια μάλλον κουραστική αναζήτηση κλασμάτων στην αριθμητική ευθεία. Προτείνουμε αντίθετα να τονιστεί, με αφετηρία ένα τέτοιο παράδειγμα, η ανάγκη και η σπουδαιότητα γενικών αποτελεσμάτων όπως η ιδιότητα $\Omega x\Omega<\theta \quad -\theta<x<\theta$.

Οι μαθητές μπορούν να συνάγουν αυτήν την ιδιότητα με αφετηρία τη σχέση απόλυτης τιμής-απόστασης στην αριθμητική ευθεία και στη συνέχεια να επιδιώξουν μια τυπική απόδειξη χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόλυτης τιμής. Ο γενικός χαρακτήρας αυτής της ιδιότητας μας επιτρέπει να χειριστούμε ανισοτικές σχέσεις με "αφηρημένο" τρόπο (δηλαδή, χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στην εποπτεία της αριθμητικής ευθείας), ακόμη και να τη θεωρήσουμε ως μια "διαδικασία απαλλαγής από το σύμβολο της απόλυτης τιμής". Η διαφορά από τους παραδοσιακούς "πίνακες προσήμων" είναι ότι η "απαλλαγή" αυτή γίνεται με τρόπο συνεπή προς τη χρήση της της απόλυτης τιμής στην Ανάλυση, χωρίς να καλλιεργείται η μηχανιστική αντίληψη ότι "τα απόλυτα πάντοτε φεύγουν".

Θα μπορούσαμε ίσως, από εδώ και πέρα, να κάνουμε ορισμένες "τολμηρές" διδακτικές προεκτάσεις και να εξετάσουμε τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η αναλυτική παράσταση της απόστασης με χρήση της απόλυτης τιμής. Για παράδειγμα, μπορούμε να δώσουμε διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις των σημειοσυνόλων της αριθμητικής ευθείας: αν το ανοικτό διάστημα (α, β) θεωρηθεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της αριθμητικής ευθείας, που απέχουν από το κέντρο του διαστήματος λιγότερο από το μισό του μήκους του, τότε έχουμε την ενδιαφέρουσα σχέση

$$\{x / \alpha<x<\beta\}=\left\{x / x-\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\beta-\alpha}{2}\right\} \quad (\beta\lambda.\ [7])$$

Μπορούμε επίσης να μελετήσουμε διάφορα σημειοσύνολα του επιπέδου που εκφράζονται αναλυτικά με σχέσεις που περιέχουν το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

$$\Omega x\Omega+\Omega y\Omega=2, \quad \left(x-\frac{\Omega x\Omega}{x}\right)^2+\left(y-\frac{\Omega y\Omega}{y}\right)^2=4,$$

$$\frac{\Omega x\Omega}{x}+\frac{\Omega y\Omega}{y}=2, \quad y=\Omega y\Omega\eta\mu\chi \qquad \beta\lambda.\ [8])$$

Αυτά τα ειδικά θέματα (και πολλά άλλα που θα μπορούσαν να αναφερθούν) σχετίζονται άμεσα με χρονικούς περιορισμούς, δυνατότητες μιας συγκεκριμένης τάξης κ.λ.π. Σε κάθε περίπτωση όμως έχουν ασύγκριτα μεγαλύτερο μαθηματικό και διδακτικό περιεχόμενο από την ασκησιολογία που συνοδεύει παραδοσιακά τη διδασκαλία της απόλυτης τιμής στην Α'Λυκείου. Πριν από τη διδασκαλία της Ανάλυσης η απόλυτη τιμή είναι μια απλή, βοηθητική έννοια και δεν πρέπει να μεγαλοποιούμε το ρόλο της με πρόωρες ή παραπλανητικές επεκτάσεις.

Όπως βλέπουμε λοιπόν, μπορεί να δημιουργηθεί μια διδακτική ακολουθία που συνδέει λειτουργικά τις έννοιες της τετραγωνικής ρίζας, της απόλυτης τιμής και της απόστασης. Αυτό όμως προϋποθέτει να καταργήσουμε την πολυδιάσπαση της σχολικής μαθηματικής ύλης σε "ανεξάρτητες" ενότητες για τα "απόλυτα", τις "ρίζες" ή τις "συναρτήσεις" και να εισάγουμε συστηματικά στη διδασκαλία μας εκείνες τις καταστάσεις- προβλήματα που αναδεικνύουν το νόημα των εννοιών.

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

1] National Council of Teachers of Mathematics: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia 1989.

[2] National Council of Teachers of Mathematics: *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Virginia 1991.

[3] National Council of Teachers of Mathematics: *Assessment Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia 1995.

[4] Θωμαΐδης, Γ.: *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης (η περίπτωση της απόλυτης τιμής).* Διδακτορική διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ, Θεσσαλονίκη 1995.

[5] Θωμαΐδης, Γ.: "Νόμιμες" αντιλήψεις και "λάθη" στα σχολικά Μαθηματικά. Πρακτικά του συνεδρίου: *Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία*, σσ. 27-45. Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα 1996.

[6] Θωμαΐδης Γ.: Είναι δυνατός ο "ιστορικός παραλληλισμός" στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών; Η περίπτωση της διάταξης στην αριθμητική ευθεία. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τ. 2, σσ. 3-38.

[7] Anderson, K. & Hall, D.: *Elementary Real Analysis.* McGraw-Hill, Tokyo 1972.

[8] Smogorzhevsky, A.S.: *Method of Coordinates.* Mir Publishers, Moscow 1980.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Του **Ν. Λαμπρόπουλου,** Μαθηματικού

Θα σχολιάσουμε τους ορισμούς της συνέχειας μιας συνάρτησης που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο Ανάλυση Γ΄ Λυκείου και θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις εκείνες που δεν παρουσιάστηκαν σ' αυτό.

Ορισμός 1: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ορισμός 2: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ με $|x-x_0| < \delta$, να ισχύει

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Οι δύο ορισμοί, όπως διατυπώθηκαν για διάστημα, είναι ισοδύναμοι:

Πράγματι, η προϋπόθεση ότι «η f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$» και λαμβάνοντας υπόψη τη σημείωση της σελ. 50 του σχολικού βιβλίου, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ορισμού του ορίου της f στο x_0 με όριο $l=f(x_0)$ (βλ. σελ. 49).

Το ερώτημα που προκύπτει είναι: Τι συμβαίνει όταν το πεδίο ορισμού A δεν είναι διάστημα; Τότε

1 Το x_0 μπορεί να είναι μεμονωμένο[1] σημείο του πεδίου ορισμού A και

2 Το x_0 μπορεί να είναι σημείο συσσωρεύσεως[2] του πεδίου ορισμού A, όπως στις ειδικές περιπτώσεις του 0 στα παρακάτω σύνολα:

$$A_1 = \{-1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots\} \cup \{0\},$$

$$A_2 = [-2, 0] \cup \{\dots, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2}, 1\},$$

$$A_3 = \{-1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots\} \cup \{0\} \cup \{\dots, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}.$$

Στις περιπτώσεις αυτές δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τους ορισμούς, αφού η προϋπόθεση να είναι το πεδίο ορισμού διάστημα δεν ικανοποιείται. Για το μεμονωμένο σημείο x_0 θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η f ορίζεται στο (εκφυλισμένο) διάστημα $[x_0, x_0]$, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό 2 το x_0, για κατάλληλο δ, είναι το μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της f που ικανοποιεί τη σχέση $|x-x_0|<\delta$ και επομένως η σχέση $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$.

Για να αντιμετωπίσουμε τις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να δώσουμε το γενικό ορισμό της συνεχείας, που εμπεριέχει τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x-x_0|<\delta$, να ισχύει

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Και η περίπτωση του σημείου συσσωρεύσεως αντιμετωπίζεται επίσης με τον ορισμό αυτό, γιατί εκείνο που ενδιαφέρει είναι τα σημεία $x \in A$ για τα οποία ισχύει $|x-x_0|<\delta$.

Παράδειγμα 1

Για τη συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \le 0 \\ x, & \text{αν } x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

το πεδίο ορισμού είναι

$$A = (-\infty, 0] \cup \{\dots, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$$

και το 0 είναι σημείο συσσωρεύσεως (όχι εσωτερικό) του A. Η συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής σε κάθε σημείο $x_0<0$.

Επίσης είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, αφού αυτά είναι μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της h. Τέλος, στο σημείο συσσωρεύσεως 0 του πεδίου ορισμού είναι επίσης συνεχής, αφού για $\varepsilon>0$ υπάρχει $\mu \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{\mu}<\varepsilon$, οπότε για $\delta = \frac{1}{\mu}$ και κάθε $x \in A$ με $|x-0|<\delta = \frac{1}{\mu}$ ισχύει

$$|h(x)-h(0)| = \begin{cases} |0-0| = 0, & x \le 0 \\ |x-0| = |x|, & x>0 \end{cases} < \frac{1}{\mu} < \varepsilon.$$

Παράδειγμα 2

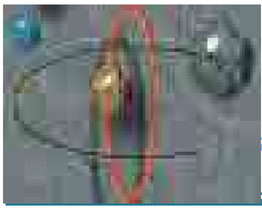
Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνεχής μόνο στο σημείο 0, ενώ δεν είναι συνεχής σε κανένα άλλο σημείο. Επίσης στο μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της που είναι συνεχής, δηλ. το 0, είναι και παραγωγίσιμη. Έχουμε συνεπώς μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα μόνο σημείο του πεδίου ορισμού της και αποτελεί απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στο τεύχος 3 των *Εκπαιδευτικών Προβληματισμών.*

◆

1. Ένα σημείο $x_0 \in A$ λέμε ότι είναι μεμονωμένο σημείο του A, όταν υπάρχει διάστημα της μορφής $I = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τέτοιο, ώστε $I \cap A = \{x_0\}$.
2. Ένα σημείο α λέμε ότι είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου A, όταν σε κάθε διάστημα της μορφής $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ υπάρχουν στοιχεία του A. Το α δεν είναι παραίτητο ν' ανήκει στο A.



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Του **Θ. Ξένου**, Καθηγητή Μαθηματικών Μ.Ε.

1 Στο σχολικό βιβλίο της Γ Λυκείου (Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, §5.3) αποδεικνύεται η πρόταση:

Πρόταση 1*: Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της έλλειψης με εστίες $E\,(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α, με $\alpha>\gamma>0$, τότε ισχύει:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

όπου $\beta>0$ και $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

Αναφέρεται στο βιβλίο ότι αποδεικνύεται και το αντίστροφό της, χωρίς να παρατίθεται η απόδειξή της. Στόχος του άρθρου αυτού είναι να δώσουμε την απόδειξη του αντιστρόφου. Με την ευκαιρία αυτή θα διατυπώσουμε τη συνολική πρόταση και θα αποδείξουμε τόσο το "ευθύ" όσο και το "αντίστροφο" της πρότασης:

Πρόταση 1: Δίνεται η έλλειψη C με εστίες $E\,(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α, με $\alpha>\gamma>0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο της έλλειψης, όταν, και μόνο όταν,

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

όπου $\beta>0$ και $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

Απόδειξη: Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο του επιπέδου της έλλειψης C. Τότε

$$(ME\,)+(ME)=2\alpha$$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=2\alpha$$

$$(x+\gamma)^2+y^2+(x-\gamma)^2+y^2+$$
$$+\,2\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=4\alpha^2$$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=2\alpha^2-(x^2+y^2+\gamma^2).$$

(Υψώνουμε τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωγο. Θα αποδείξουμε παρακάτω γιατί η ισότητα που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την τελευταία)

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ [(x^2+y^2+\gamma^2)+2\gamma x]\cdot[(x^2+y^2+\gamma^2)-2\gamma x]=$$
$$=4\alpha^4+(x^2+y^2+\gamma^2)^2-4\alpha^2(x^2+y^2+\gamma^2)$$

$$\alpha^2(x^2+y^2+\gamma^2)-\gamma^2x^2=\alpha^4$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)\qquad \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Η ισοδυναμία $^{(*)}$ προς την κατεύθυνση " ", σύμφωνα με το άρθρο "Άρρητες εξισώσεις και ανισώσεις", *Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί*, τεύχος 2, ισχύει όταν $2\alpha^2-(x^2+y^2+\gamma^2)\geq 0$. Πράγματι,

$$2\alpha^2-(x^2+y^2+\gamma^2)=(\alpha^2-x^2)+(\beta^2-y^2)\geq 0,$$

αφού από την ισότητα $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (που είναι η υπόθεση προς την κατεύθυνση αυτή της απόδειξης) προκύπτουν ότι $x^2\leq\alpha^2$ και $y^2\leq\beta^2$, δηλ. $(\alpha^2-x^2)\geq 0$ και $(\beta^2-y^2)\geq 0$.

2 Για την εξίσωση της υπερβολής (§5.4) θα αποδείξουμε την πρόταση:

Πρόταση 2: Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E\,(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και σταθερή διαφορά 2α, με $\gamma>\alpha>0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο της υπερβολής, όταν, και μόνο όταν,

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

όπου $\beta>0$ και $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.

Απόδειξη: Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο του επιπέδου της υπερβολής C. Τότε:

$$|(ME\,)-(ME)|=2\alpha$$

$$\left|\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}\right|=2\alpha$$

$$\left(\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}\right)^2=4\alpha^2$$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=(x^2+y^2+\gamma^2)-2\alpha^2$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ \alpha^2(x^2+y^2+\gamma^2)-\gamma^2x^2=\alpha^4$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$$

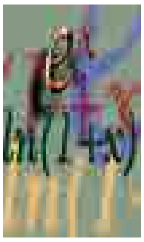
$$-\beta^2x^2+\alpha^2y^2=-\alpha^2\beta^2$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

Η ισοδυναμία $^{(*)}$ ισχύει αφού για την $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $x^2\geq\alpha^2$, οπότε

$$(x^2+y^2+\gamma^2)-2\alpha^2=(x^2-\alpha^2)+y^2+(\gamma^2-\alpha^2)\geq 0.$$ ◆

* Η διατύπωση της πρότασης στο σχολικό βιβλίο είναι περιγραφική και γι' αυτό υπάρχει μια μικρή διαφορά με αυτήν που παρουσιάζουμε εδώ.



ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ και της ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Του **Γ. Παντελίδη,** Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

I. Χαρακτηριστικές ανισότητες της εκθετικής συναρτήσεως

Να αποδειχθεί ότι για την εκθετική συνάρτηση $E(x) = e^x$ ισχύουν:

1. $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ **, για** $x>0$**,**

2. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1+x+\frac{x^2}{2!}$ **, για κάθε** $x<0$**.**

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F_2(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!}}{e^x} ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$F_2(x) = = -x^2 \cdot \frac{1}{2!e^x} .$$

Για κάθε x $\mathbb{R}$, με xπ0, είναι $F_2(x)<0$, που σημαίνει ότι η $F_2(x)$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στα διαστήματα [0, +•) και (–• , 0], δηλαδή στο $\mathbb{R}$.

Επομένως

1. Για $x>0$ ισχύει $F_2(x) < F_2(0) = 1$,.δηλ.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} < e^x.$$

1α. Για $x<0$ ισχύει $F_2(x)>F_2(0) = 1$, δηλ.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} > e^x.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F_3(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}{e^x} ,$$

η οποία είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο (όμοια, όπως και προηγουμένως)

$$F_3(x) = -x^3 \cdot \frac{1}{3!e^x} .$$

2. Για $x<0$ ισχύει $F_3(x)>0$, που σημαίνει ότι η $F_3(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (–• , 0]. Επομένως για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$F_3(x) < F_3(0) = 1, \quad \text{δηλ.} \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x.$$

Από τις 1, 1α και 2, προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Μάλιστα, επειδή $F_3(x)<0$ για $x>0$ έπεται ακόμη και η ανισότητα:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} .$$

Παρατήρηση: Οι ανισότητες ισχύουν και στις γενικές περιπτώσεις:

Αν συμβολίσουμε με

$$E_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} , \text{ τότε:}$$

(i) Για $x>0$ και κάθε n $\mathbb{N}$ ισχύει:

$$e^x > E_n(x),$$

(ii) Για $x<0$ και κάθε n $\mathbb{N}$ ισχύουν:

$$e^x > E_{2n-1}(x), \quad e^x < E_{2n}(x)$$

Για την απόδειξη των ανισοτήτων αυτών χρησιμοποιούμε, με τον ίδιο τρόπο, τις συναρτήσεις της μορφής

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{e^x} ,$$

όπου

$$E_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} ,$$

της οποίας η παράγωγος είναι

$$F_n(x) = \frac{E_{n-1}(x)e^x - E_n(x)e^x}{e^{2x}} = -x^n \cdot \frac{1}{n!e^x} .$$

Εργαζόμενοι, όπως και προηγουμένως, παίρνουμε τις ανισότητες.

II. Χαρακτηριστικές ανισότητες της λογαριθμικής συναρτήσεως ln(1+x)

Να αποδειχθεί ότι για τη λογαριθμική συνάρτηση $L(x) = \ln(1+x)$ ισχύουν:

1. $x-\frac{x^2}{2!} < \ln(1+x) < x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ **, για κάθε** $x>0$

2. $\ln(1+x) < x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ **, για κάθε** $-1<x<0$**.**

Και στην περίπτωση αυτή μπορούν οι ανισότητες να γενικευθούν:

Αν συμβολίσουμε με

$$L_n(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} \;,$$

τότε

(i) Για $-1<x<0$ και κάθε n ℕ* ισχύει:

$$\ln(1+x) < L_n(x).$$

(ii) Για $x>0$ και κάθε n ℕ* ισχύουν:

$$\ln(1+x) < L_{2n-1}(x), \quad \ln(1+x) > L_{2n}(x)$$

Απόδειξη: Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη των γενικευμένων ανισοτήτων, που στην ειδική περίπτωση που $n=1,2$ και 3 μας δίνουν τις ανισότητες 1 και 2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G_n(x) = \ln(1+x) - L_n(x),$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\bullet)$ με παράγωγο

$$G_n(x) = \frac{1}{1+x} - L_n(x) = \ldots = (-x)^n \cdot \frac{1}{1+x} \;.$$

1. Για $-1<x<0$ και κάθε n ℕ* είναι $G_n(x) > 0$, που σημαίνει ότι η $G_n(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0]$, δηλ.

$$G_n(x) < G_n(0) = 0 \text{ ή}$$

$$G_n(x) = \ln(1+x) - L_n(x) < 0 \text{ ή } \ln(1+x) < L_n(x).$$

2. α) Για $x>0$ και n άρτιος, δηλ. της μορφής 2n, είναι $G_{2n}(x)>0$, που σημαίνει ότι η $G_{2n}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\bullet)$. Επομένως,

$$G_{2n}(x) > G_{2n}(0) = 0, \quad \text{δηλ.} \quad \ln(1+x) > L_{2n}(x).$$

2. β) Για $x>0$ και n περιττός, δηλ. της μορφής $2n-1$, είναι $G_{2n-1}(x) < 0$, που σημαίνει ότι $G_{2n-1}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\bullet)$. Επομένως

$$G_{2n-1}(x) < G_{2n-1}(0) = 0, \;\text{δηλ.}\; \ln(1+x) < L_{2n-1}(x).$$

◆

Παράδειγμα στην ερώτηση

Μπορούμε από το πρόσημο της παραγώγου σ' ένα σημείο να αποφανθούμε για τη μονοτονία στην περιοχή του σημείου;

(Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, τεύχος 2, σελ. 10)

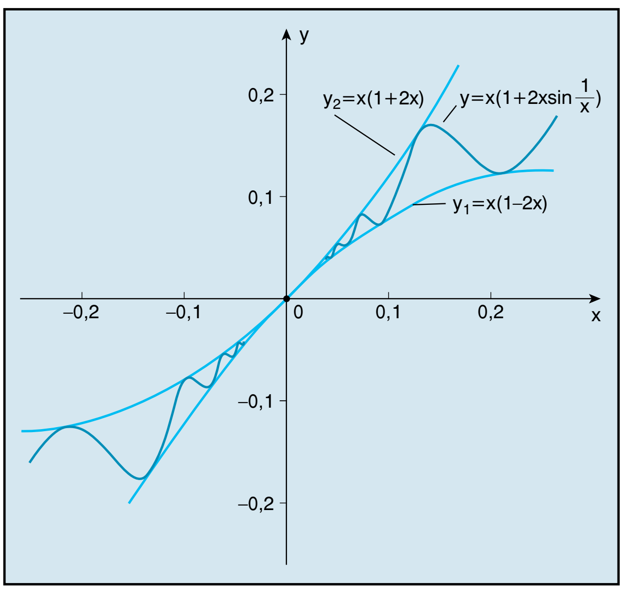
Του Θ. Ξένου, Καθηγητή Μ.Ε.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+2x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right), & x\pi 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

είναι προφανώς παραγωγίσιμη, οπότε και συνεχής, σε κάθε $x\pi 0$ με παράγωγο

$$f(x) = 1 + 4x\cdot\eta\mu\frac{1}{x} - 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \;.$$



Στο σημεί $x_0=0$ είναι επίσης παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f(0) = \lim_{x\ 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\ 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\ 0}\left(1+2x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 1>0.$$

Η f (x) δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού για την ακολουθία $x_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi}$, που τείνει στο 0, ισχύει

$$f(x_\nu) = f\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right) = 1 + \frac{4}{2\nu\pi}\cdot\eta\mu(2\nu\pi) - 2\cdot\sigma\upsilon\nu(2\nu\pi) =$$

$$= 1-2 = -1 \quad -1 \,\pi\, 1.$$

Σύμφωνα με το σχολιασμό της ερωτήσεως δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η f είναι αύξουσα στην περιοχή της μορφής $(-\varepsilon, \varepsilon)$ του $x_0=0$, αφού για κάθε

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\nu\pi} > \alpha_2 = \frac{1}{2\nu\pi + \dfrac{\pi}{2}} > \alpha_3 = \frac{1}{2(\nu+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}} \;,$$

τα οποία για αρκετά μεγάλο ν ανήκουν στην περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ισχύουν

$$f(\alpha_2) > f(\alpha_1) \quad \text{και} \quad f(\alpha_3) < f(\alpha_1).$$

Παρατηρείστε, η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως στο σημείο $(0, 0)$ είναι η διχοτόμος $y=x$ πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία της γραφικής παραστάσεως που αντιστοιχούν στα σημεία της μορφής $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\nu\pi}$, δηλ. η εφαπτομένη διαπερνά τη γραφική παράσταση της f. Τα σημεία της γραφικής παραστάσεως που αντιστοιχούν στα σημεία της μορφής $\dfrac{1}{2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}}$, κ ℕ, ανήκουν πάνω στην παραβολή $y = x(1+2x)$. Ανάλογα, τα σημεία που αντιστοιχούν στα $\dfrac{1}{2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}}$ ανήκουν στην παραβολή $y = x(1-2x)$.

◆

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ και ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

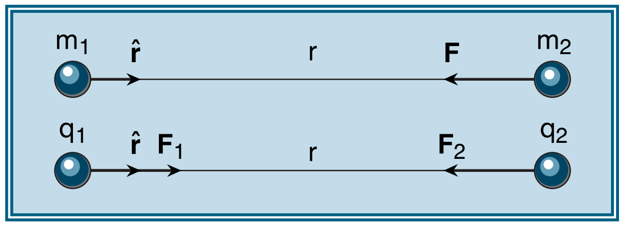
Του **Δ.Σ. Κυριάκου**, Αναπληρωτή Καθηγητή Τομέα Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ.

Τα πεδία δυνάμεων είναι το μέσον δια του οποίου ασκούνται οι δυνάμεις **βασικής προέλευσης** σε σώματα που βρίσκονται μακριά από τις πηγές των δυνάμεων. Αυτές οι δυνάμεις οφείλονται στην ύλη και υπακούουν σε ορισμένους νόμους, σύμφωνα με τους οποίους ασκούνται οι αλληλοεπιδράσεις των σωμάτων (δηλαδή ανάλογα με τις ιδιότητές τους). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν το βαρυτικό και το ηλεκτρικό πεδίο, τα οποία χαρακτηρίζονται και ως **διανυσματικά**, γιατί η περιγραφή τους γίνεται με το διανυσματικό μέγεθος της **έντασης** του πεδίου. Η ένταση σε σημείο του πεδίου ορίζεται από το λόγο του διανύσματος της δύναμης προς το κατάλληλο υπόθεμα (μάζα ή ηλεκτρικό φορτίο) και φυσικά το μέτρο της ισούται αριθμητικά με τη δύναμη που ασκείται στη μονάδα του υποθέματος.

Ορισμένα πεδία χαρακτηρίζονται επίσης ως **δυναμικά**, δηλαδή προέρχονται από **δυναμικό**. Γενικώς, το δυναμικό είναι μια αριθμητική συνάρτηση των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου, $V = V(x, y, z, t)$. Στην περίπτωση που το δυναμικό είναι ανεξάρτητο του χρόνου, τότε η συνάρτηση $V = V(x, y, z)$ περιγράφει μονότιμα το δυναμικό πεδίο, του οποίου η μορφή παραμένει αμετάβλητη, δηλαδή το πεδίο είναι **στατικό**. Το στατικό πεδίο είναι πεδίο **συντηρητικών** (διατηρητικών) δυνάμεων. Το έργο των δυνάμεων πάνω στο σώμα που ασκούνται είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα, αλλά εξαρτάται μόνον από την αρχική και τελική θέση του σώματος. Έτσι το έργο για κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Το βαρυτικό πεδίο και το ηλεκτρικό (στατικών φορτίων) είναι στατικά. Τέλος, οι δυνάμεις αμφοτέρων των πεδίων που προέρχονται από σημειακές πηγές είναι **κεντρικές**, γιατί όπως φαίνεται από τους αντίστοιχους νόμους της παγκόσμιας έλξης του Newton και της ηλεκτροστατικής έλξης ή άπωσης του Coulomb

$$\mathbf{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,, \qquad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \pm\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}},$$

οι δυνάμεις δρουν κατά τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα αλληλοεπιδρώντα σώματα και η τιμή τους εξαρτάται από την απόστασή τους (Σχ. 1).



Σχήμα 1. ***Οι βαρυτικές και οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι κεντρικές.***

Όταν ένα σώμα εισαχθεί εντός του δυναμικού πεδίου, αποκτά εξαιτίας του δυναμικού δυναμική ενέργεια, που για τα στατικά πεδία είναι μονότιμη συνάρτηση της θέσης του σώματος. Γι' αυτό και μερικές φορές η δυναμική ενέργεια λέγεται και θέσει ενέργεια[1]. Πρέπει να προσέξουμε ότι η ένταση και το δυναμικό είναι χαρακτηριστικά μεγέθη του πεδίου που περιγράφουν το πεδίο και δεν εξαρτώνται από την παρουσία ή όχι σωμάτων και η δυναμική ενέργεια αποκτάται από αυτά. Τα δύο τελευταία μεγέθη αναφέρονται στα σώματα. Επειδή ο μηχανισμός διακίνησης της ενέργειας είναι το έργο, είναι φανερό ότι η δυναμική ενέργεια σχετίζεται με το έργο των δυνάμεων του πεδίου.

Ορισμός: *Η δυναμική ενέργεια σώματος μέσα σε πεδίο συντηρητικών δυνάμεων ορίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά της τιμής της στην αρχική θέση Α μείον την τιμή της στην τελική θέση Β του σώματος να είναι ίση με το έργο των δυνάμεων του δυναμικού πεδίου.*

$$E_\Delta(A) - E_\Delta(B) = W(A \quad B).$$

Από τον ορισμό αυτό βγαίνουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Η ποσότητα E_Δ έχει διαστάσεις ενέργειας και γι' αυτό άλλωστε ονομάζεται δυναμική ενέργεια.

1. Ο όρος αυτός ανταποκρίνεται περισσότερο προς τη φυσική κατάσταση της ενέργειας σε ηρεμία, ενώ ο όρος δυναμική περιέχει την έννοια της κίνησης. Αυτό φαίνεται και από την ξενόγλωσση βιβλιογραφία, όπου χρησιμοποιείται ο όρος potential (δυνητική) αντί του όρου dynamic, dynamical (δυναμική). Βλέπε και Γ.Κ. Αθανασιάδη, Επίτομη Φυσική, Αθήνα 1944.

β) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ίση και αντίθετη του έργου των δυνάμεων. Ως μεταβολή θεωρείται πάντοτε η τελική τιμή του μεγέθους μείον την αρχική τιμή. Ώστε

$$\Delta E_\Delta = E_\Delta(B) - E_\Delta(A) = -W(A \quad B).$$

Επειδή στο σώμα μπορεί να ενεργούν και άλλες δυνάμεις, τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας την υπολογίζουμε πάντοτε από το έργο των δυνάμεων του συγκεκριμένου δυναμικού πεδίου.

γ) Από το θεώρημα της κινητικής ενέργειας που ισχύει ανεξάρτητα από τη φύση της δύναμης (συντηρητική ή όχι),

$$\Delta E_K = E_K(B) - E_K(A) = W(A \quad B),$$

προκύπτει ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος είναι ίση και αντίθετη της μεταβολής της κινητικής ενέργειας,

$$W(A \quad B) = \Delta E_K = -\Delta E_\Delta.$$

Επακόλουθο, η αρχή διατήρησης της ολικής ενέργειας των σωμάτων στα συντηρητικά πεδία (εξού και η ονομασία τους).

δ) Δεν είναι δυνατό να οριστούν απόλυτες τιμές δυναμικής ενέργειας, παρά μόνον διαφορές (ή μεταβολές) της. Για το λόγο αυτό, και ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, ορίζουμε αυθαίρετη στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας ως προς την οποία υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια σε άλλες θέσεις του πεδίου. Αν π.χ. είναι $E_\Delta(A) = 0$, τότε

$$E_\Delta(B) = -W(A \quad B).$$

Όπως η ένταση υπολογίζεται από τη δύναμη στη μονάδα του υποθέματος, έτσι και το δυναμικό του πεδίο ορίζεται για κάθε σημείο του ως ο λόγος της δυναμικής ενέργειας του σώματος στο σημείο αυτό προς το υπόθεμα (π.χ. μάζα ή φορτίο). Στο βαρυτικό πεδίο το δυναμικό ισούται με τη δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη μονάδα μάζας, ενώ στο ηλεκτρικό πεδίο το δυναμικό ισούται αριθμητικά με τη δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη μονάδα του θετικού φορτίου. Επομένως, όσα αναφέραμε προηγουμένως για τη δυναμική ενέργεια των σωμάτων ισχύουν και για το δυναμικό των πεδίων. Έτσι οι σχέσεις έντασης-δυναμικού και δύναμης-δυναμικής ενέργειας είναι όμοιες, αφού ο συνδετικός κρίκος είναι το έργο των δυνάμεων[2],

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)$$

και

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial E_\Delta}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_\Delta}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_\Delta}{\partial x}\hat{\mathbf{z}}\right).$$

Η χρήση των μεγεθών δυναμικό ή δυναμική ενέργεια εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος. Στη Μηχανική χρησιμοποιούμε συνήθως τη δυναμική ενέργεια, ενώ στον Ηλεκτρισμό, επειδή πρακτικά ενδιαφέρει η έμμεση μέτρηση του ηλεκτρικού πεδίου, χρησιμοποιούμε το δυναμικό.

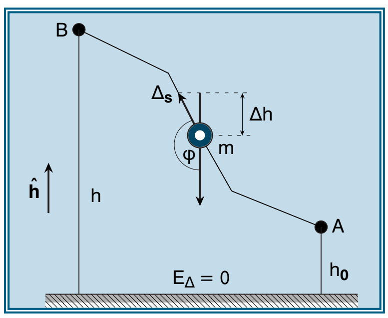
Να αναφέρουμε τέλος ότι, το μαγνητικό πεδίο **B** ασκεί δυνάμεις σε κινούμενα φορτία που η διεύθυνσή τους είναι κάθετη στην ταχύτητα των φορτίων ($\mathbf{F} = q\mathbf{u} \quad \mathbf{B}$), δηλαδή στη στοιχειώδη μετατόπιση. Επομένως το έργο των μαγνητικών δυνάμεων είναι μηδέν και δεν έχει νόημα να μιλάμε για δυναμικό και δυναμική ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο. Ακολουθούν ορισμένες εφαρμογές.

1. Η δυναμική ενέργεια σε ομοιογενές πεδίο **E** = σταθ.

Ομοιογενές μπορεί να θεωρηθεί το βαρυτικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια της γης. Η ένταση του πεδίου είναι σταθερή κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο και ένα **ισοδυναμικό** επίπεδο, που είναι κάθετο στις παράλληλες δυναμικές γραμμές σταθερής πυκνότητας, λαμβάνεται ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας, π.χ. η επιφάνεια της γης.

Παράδειγμα 1

Στο σχήμα 2, ένα σώμα μάζας m αναγκάζεται από δυνάμεις να κινηθεί κατά μήκος της τυχαίας διαδρομής ΑΒ. Να υπολογιστεί το έργο του βάρους του σώματος και η μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας.



Σχήμα 2. *Το έργο του βάρους των σωμάτων είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που διαγράφουν.*

Λύση: Όπως φαίνεται, το βάρος **B** ενεργεί εδώ ως ανθιστάμενη δύναμη. Επομένως το έργο του είναι αρνητικό για το σώμα. Πράγματι για τη στοιχειώδη μετατόπιση **Δs** το έργο είναι

$$\Delta W = B\Delta s\sigma\upsilon\nu\varphi = -B\Delta h,$$

επειδή η γωνία φ είναι αμβλεία. Βλέπουμε επίσης ότι, το έργο υπολογίζεται με τη βοήθεια της προβολής Δh της μετατόπισης Δs πάνω στη σταθερή διεύθυνση του βάρους. Συνεπώς

$$W(A \quad B) = -\sum B\Delta h = -B\sum \Delta h = -B(h - h_0) = -mg(h - h_0).$$

Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση. Άρα το ομοιογενές πεδίο (σταθερής δύναμης) είναι συντηρητικό, υπάρχει δυναμικό και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος βρίσκεται από το έργο της δύναμης του δυναμικού πεδίου,

$$E_\Delta(B) - E_\Delta(A) = -W(A \quad B) = mg(h - h_0).$$

2. Οι τύποι αναφέρονται για την πληρότητα του κειμένου μόνον. Το σύμβολο ∂ χαρακτηρίζει τη μερική παράγωγο.

Αν το σημείο Α βρίσκεται στο έδαφος ($h_0=0$) τότε κατά συνθήκη είναι $E_\Delta(A) = 0$ και η δυναμική ενέργεια στο Β βρίσκεται ίση με

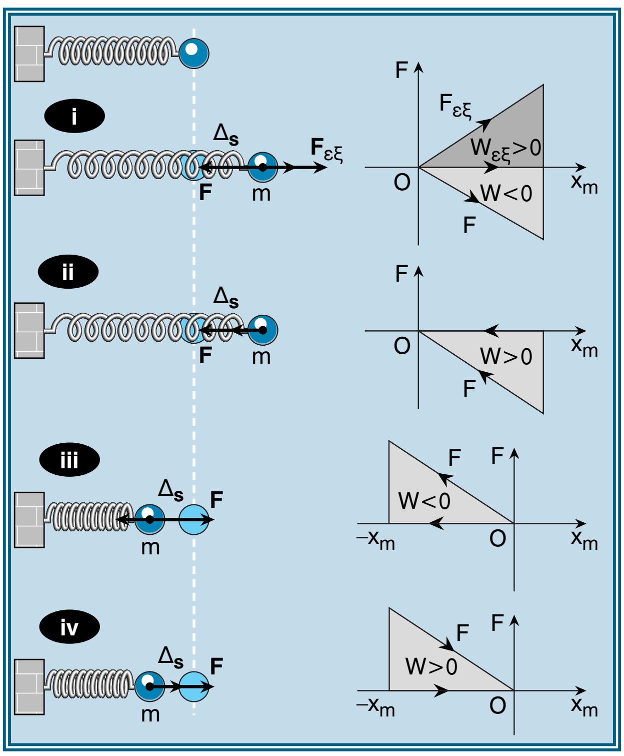
$$E_\Delta(B) = mgh.$$

2. Γραμμική δύναμη επαναφοράς (ΓΔΕ), $F = -kx$.

Η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης του σώματος από την πηγή και μάλιστα αντίθετης φοράς. Σε μια προσανατολισμένη ευθεία (άξονας) η απομάκρυνση x μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Τέτοια είναι η δύναμη που ασκείται σε μάζα προσδεδεμένη στην άκρη ελατηρίου, το οποίο παραμορφώνεται μέσα στα όρια ελαστικότητάς του (νόμος του Hooke). Η κίνηση της μάζας σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή αποτελεί κλασσικό παράδειγμα, η ανάπτυξη του θέματος όμως δεν είναι πάντοτε επιτυχής. Σχετικά δείτε το βιβλίο φυσικής της Γ Λυκείου και την ασυνέπεια (ασυμφωνία) που υπάρχει στους τύπους των σελ. 16 και 374. Η ΓΔΕ που δημιουργείται από ελκτικό κέντρο είναι μια κεντρική δύναμη και επομένως συντηρητική.

Παράδειγμα 2

Μάζα m είναι εξαρτημένη στην άκρη ελατηρίου και μπορεί να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή. Αν το ελατήριο αρχικά έχει το φυσικό του μήκος, πόσο είναι το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε ώστε η μάζα να μετακινηθεί κατά $+x_m$ χωρίς να επιταχυνθεί; Πόση δυναμική ενέργεια απέκτησε; Στη συνέχεια καταργούμε την εξωτερική δύναμη και αφήνουμε τη μάζα να ταλαντωθεί υπό την επίδραση της ΓΔΕ. Να μελετηθεί η δυναμική ενέργειά της στα διάφορα στάδια κίνησης.



Σχήμα 3. ***Ανάλογα με τη φορά των δυνάμεων και της μετατόπισης το έργο τους είναι θετικό ή αρνητικό.***

Λύση: Αναφερόμενοι στο σχήμα 3 διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i. $0 \;\; x_m,\;\; F_{\varepsilon\xi} > 0,\;\; F = -kx < 0.$

Για ισοταχή κίνηση εφαρμόζουμε στη μάζα m εξωτερική δύναμη $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}$ που είναι συνεχώς αντίθετη της ΓΔΕ, $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi} = -\mathbf{F}$ και $F_{\varepsilon\xi} = kx$. Επειδή η μετατόπιση Δs είναι θετική, το έργο της $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}$ είναι θετικό, ενώ της $\mathbf{F}$ είναι αρνητικό. Σε κάθε περίπτωση το έργο κατά απόλυτη τιμή δίνεται, κατά τα γνωστά, από το εμβαδόν της αντίστοιχης σκιασμένης επιφάνειας. Ώστε

$$W_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{2}kx_m^2, \quad W = -\frac{1}{2}kx_m^2.$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας βρίσκεται από το έργο της ΓΔΕ, δηλαδή

$$E_\Delta(x_m) - E_\Delta(0) = -W = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

Επειδή το O είναι σημείο ισορροπίας ($F=0$), η δυναμική ενέργεια στο O είναι ελάχιστη και κατά συνθήκη την παίρνουμε ίση με μηδέν, $E_\Delta(0)=0$. Συνεπώς

$$E_\Delta(x_m) = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

ii. $x_m \;\; 0,\;\; F = -kx < 0.$

Μετά την κατάργηση της $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}$, η ΓΔΕ αναγκάζει τη μάζα σε αρμονική ταλάντωση (δεν υπάρχουν τριβές). Η μετατόπιση Δs είναι τώρα αρνητική και το έργο της F θετικό,

$$W = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

Για τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας βρίσκουμε

$$E_\Delta(0) - E_\Delta(x_m) = -W \;\;\text{ή}\;\; E_\Delta(0) - \frac{1}{2}kx_m^2 = -\frac{1}{2}kx_m^2, \quad E_\Delta(0)=0,$$

όπως και αναμένουμε.

iii. $0 \;\; -x_m,\;\; F = -kx > 0.$

Εντελώς ανάλογα έχουμε $\Delta s<0$, $W = -½\, kx_m^2$,

$$E_\Delta(-x_m) - E_\Delta(0) = -W = \frac{1}{2}kx_m^2, \quad E_\Delta(-x_m) = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

Βλέπουμε ότι αποταμιεύεται πάλι το ίδιο ποσό ενέργειας στη μάζα.

iv. $-x_m \;\; 0,\;\; F = -kx > 0.$

Σ' αυτήν την περίπτωση είναι

$$\Delta s > 0, \quad W = \frac{1}{2}kx_m^2, \quad E_\Delta(0) - E_\Delta(-x_m) = -W$$

ή

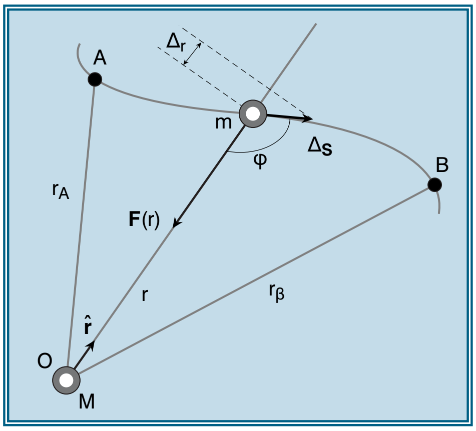
$$E_\Delta(0) - \frac{1}{2}kx_m^2 = -\frac{1}{2}kx_m^2, \quad E_\Delta(0) = 0.$$

3. Γενική περίπτωση κεντρικής δύναμης

Υποθέτουμε σημειακή πηγή του πεδίου και για τον υπολογισμό του έργου προβάλλουμε πάλι τη μετατόπιση $\Delta\mathbf{s}$ πάνω στη διεύθυνση της δύναμης $\mathbf{F}(r)$. Από το σχήμα 4 φαίνεται ότι το στοιχειώδες έργο είναι ίσο με

$$\Delta W = F(r)\Delta s\text{συν}\varphi = F(r)\Delta r.$$

Επειδή τόσο η διεύθυνση της δύναμης όσο και το μέτρο της αλλάζουν συνεχώς, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο W(A B) με τον απλό τρόπο του πα-



Σχήμα 4. ***Η κεντρική δύναμη δρα στη διεύθυνση της ευθείας των αλληλοεπιδρώντων σωμάτων και η τιμή της εξαρτάται από την απόστασή τους.***

ραδείγματος 1. Χρειάζεται να καταφύγουμε στα ορισμένα ολοκληρώματα των ανωτέρων μαθηματικών.

Αν πρόκειται για βαρυτικό πεδίο προερχόμενο από σημειακή μάζα M, τότε η δύναμη πάνω στην επίσης σημειακή μάζα m είναι

$$F(r) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

και το έργο βρίσκεται ίσο με

$$W(A\quad B) = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

Επειδή η δύναμη μηδενίζεται για $r \quad \bullet$, θεωρούμε τη δυναμική ενέργεια μηδέν σε άπειρη απόσταση από την πηγή, $E_\Delta(\bullet)=0$. Επομένως η δυναμική ενέργεια σε απόσταση r υπολογίζεται από την εξίσωση

$$E_\Delta(r) - E_\Delta(\bullet) = -W(\bullet \quad r),$$

δηλαδή
$$E_\Delta(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

Αντίστοιχα η ένταση και το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου είναι

$$\mathbf{E}_B = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

$$V(r) = \frac{E_\Delta(r)}{m} = \frac{-W(\bullet \quad r)}{m} = -G\frac{M}{r}.$$

Συνεπώς, το δυναμικό σε κάποιο σημείο του πεδίου είναι αριθμητικά ίσο με το αντίθετο του έργου της βαρυτικής δύναμης για τη μεταφορά της μονάδας μάζας από το άπειρο μέχρι το συγκεκριμένο σημείο[3].

---

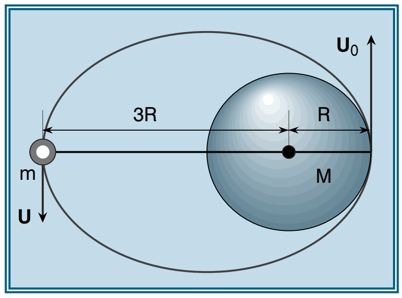
3. Αυτός ο ορισμός του δυναμικού είναι γενικός, στην περίπτωση όμως του βαρυτικού πεδίου είναι και ο πλέον εύστοχος, γιατί η βαρυτική δύναμη είναι ελκτική και επομένως ουδέποτε θα μετέφερε αφ' εαυτής κάποιο σώμα στο άπειρο. Σχετικά βλέπε σελ. 90 του σχολικού βιβλίου.

Παράδειγμα 3

Τεχνητός δορυφόρος μάζας 4 kg εκτοξεύεται εφαπτομενικά από την επιφάνεια της γης και διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Η μέγιστη απόστασή του από το κέντρο της γης είναι ίση με 3R όπου R η ακτίνα της γης. Πόση είναι η δυναμική του ενέργεια στη θέση αυτή; Ποιο είναι το έργο της βαρυτικής δύναμης γι' αυτή τη μετακίνηση; Αν η αρχική του ταχύτητα είναι

$$u_0 = \sqrt{1{,}5\,g_0R}$$

πόση είναι η ταχύτητά του στην απόσταση 3R;



Σχήμα 5. ***Το περίγειο του δορυφόρου είναι R και το απόγειό του 3R.***

Λύση: Ο δορυφόρος m ως προς τη γη θεωρείται σημειακό σώμα (υλικό σημείο), ενώ η γη M έχει πεπερασμένες διαστάσεις. Σε μια τέτοια περίπτωση για τον υπολογισμό του βαρυτικού πεδίου χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδεις μάζες Δm και εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας για τα επί μέρους πεδία. Αν το σώμα είναι σφαιρικό και ομοιογενές, όπως κατά καλή προσέγγιση θεωρούμε τη γη, τότε το βαρυτικό του πεδίο είναι το ίδιο με αυτό υλικού σημείου που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας και έχει μάζα τη μάζα του σώματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η δυναμική ενέργεια του δορυφόρου στο απόγειο της τροχιάς του είναι

$$E_\Delta(3R) = -G\frac{Mm}{3R} = -6{,}67 \quad 10^{-11}\,\frac{5{,}983 \quad 10^{24} \quad 4}{3 \quad 6{,}368 \quad 10^6} =$$
$$= -8{,}356 \quad 10^7\ \mathrm{J}.$$

Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ίσο με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας του δορυφόρου στις δύο θέσεις,

$$W(R \quad 3R) = E_\Delta(R) - E_\Delta(3R) = -\frac{GMm}{R} - \left(\frac{GMm}{3R}\right) =$$
$$= -2.507 \quad 10^8 + 8{,}356 \quad 10^7 = -1{,}671 \quad 10^8\ \mathrm{J}.$$

Το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή το σώμα (δορυφόρος) δαπανά ενέργεια για να υπερνικήσει τη βαρυτική δύναμη που το έλκει προς τη γη.

Για την ίδια μετακίνηση, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ίση και αντίθετη της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας. Ώστε

$$E_K(3R) - E_K(R) = -\{E_\Delta(3R) - E_\Delta(R)\}$$

ή

$$E_K(3R) + E_\Delta(3R) = E_K(R) + E_\Delta(R).$$

Η τελευταία δεν είναι τίποτε άλλο παρά η εξίσωση έκφρασης της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του δορυφόρου. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$u^2 = u_0^2 + (2/m)\{E_\Delta(R) - E_\Delta(3R)\}$$

ή

$$u^2 = 1{,}5g_0R - 2\frac{GM}{R}\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση αριθμητικά με την ένταση του πεδίου. Στην επιφάνεια της γης είναι

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \qquad \frac{GM}{R} = g_0R.$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε $u = \frac{u_0}{3}$.

ΠΡΟΩΣΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Του **Γ. Γιουβανούδη,** Φυσικού

Η προώθηση οποιουδήποτε είδους οχήματος –αυτοκινήτου, πλοίου, αεροπλάνου– οφείλεται στις δυνάμεις δράσης - αντίδρασης. Η έλικα του πλοίου σπρώχνει το νερό (δράση) και το νερό επομένως σπρώχνει την έλικα (αντίδραση), δηλαδή το πλοίο. Ένα αυτοκίνητο σπρώχνει το έδαφος με τις ρόδες του, οπότε το έδαφος σπρώχνει το αυτοκίνητο.

Η προώθηση ενός διαστημόπλοιου στο κενό διάστημα είναι μια πολύ πιο δύσκολη υπόθεση κι αυτό γιατί δεν υπάρχει τίποτα απολύτως πάνω στο οποίο να ασκηθεί ώθηση (δύναμη), ώστε να προκληθεί αντίδραση. Έτσι στην περίπτωση των διαστημοπλοίων - ρουκετών - πυραύλων κ.λπ. χρειάζεται να προσφέρει το ίδιο το όχημα ένα μέσο πάνω στο οποίο ν' ασκήσει την ώθηση. Αυτό το μέσο είναι τα αέρια εξαγωγής.

Η μηχανή της ρουκέτας, παράγει μια μεγάλη ποσότητα θερμών αερίων υπό υψηλή πίεση, τα οποία προέρχονται από την καύση υγρών ή αερίων καυσίμων σε θάλαμο καύσης και κατόπιν εκτοξεύει αυτά τα αέρια με μεγάλη ταχύτητα από την ουρά της ρουκέτας. Η ρουκέτα ωθεί τα αέρια προς τα πίσω (δράση) και τα αέρια ωθούν με δύναμη ίσου μέτρου την ρουκέτα προς τα εμπρός (αντίδραση). Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας μηχανισμός ανάκρουσης, όπως ακριβώς δηλαδή ένα πυροβόλο αναπηδάει προς τα πίσω όταν εκτοξεύει ένα βλήμα προς τα εμπρός.

Για να μπορέσουμε να βρούμε μια απλή εξίσωση κίνησης μελετώντας το φαινόμενο, ας υποθέσουμε ότι τα σωματίδια των αερίων που εκτοξεύονται από τη ρουκέτα έχουν όλα την ίδια ταχύτητα ως προς τη ρουκέτα ($υ_{σχετ}$) και κινούνται όλα προς την ίδια, προς τα πίσω, κατεύθυνση. Αυτή η υπόθεση βέβαια δεν είναι πολύ ρεαλιστική, αφού:

α) τα αέρια εξαγωγής στην πραγματικότητα περιέχουν σωματίδια με διαφορετικές ταχύτητες, υπάρχει δηλαδή μία κατανομή ταχυτήτων και

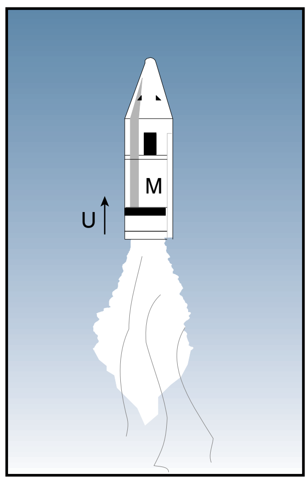
β) τα αέρια αυτά έχουν την τάση να απλώνουν εγκαρσίως με αποτέλεσμα να έχουν και μία κατανομή διευθύνσεων.

Παρ' όλα αυτά όμως, η υπόθεση που κάναμε αποτελεί μια πάρα πολύ καλή προσέγγιση αν ως αριθμητική τιμή της $υ_{σχετ}$, ληφθεί η μέση ταχύτητα εκτόξευσης.

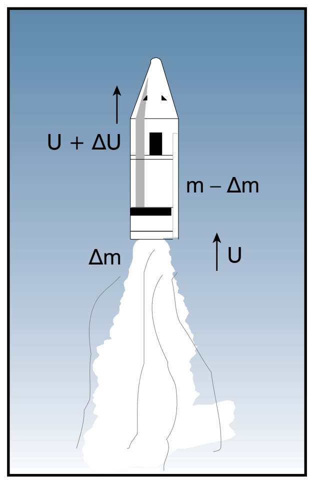
Αναλυτική μελέτη του φαινομένου

Έστω πύραυλος που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο. Η αντίσταση του αέρα παραλείπεται. Στο σχ. 1 βλέπουμε ένα πύραυλο κάποια χρονική στιγμή t μετά την εκτόξευση, όπου η μάζα του (μαζί με τα καύσιμα που του έχουν απομείνει) είναι m και η κατακόρυφη προς τα πάνω ταχύτητά του είναι $υ$. Η συνολική του ορμή αυτή τη στιγμή είναι

$$J_{ολ}^{ΑΡΧ} = m \cdot υ \,. \qquad (1)$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt, μια μάζα αερίων dm έχει εκτοξευτεί από τον πύραυλο. Έστω $υ_{σχετ}$ η προς τα κάτω σχετική ταχύτητα των αερίων ως προς τον πύραυλο. Τότε η ταχύτητα των αερίων $υ$ ως προς τη γη θα είναι:

$$υ_{σχετ} = υ - υ \qquad -υ_{σχετ} = υ - υ \qquad υ = υ - υ_{σχετ} \,.$$

Επομένως η ορμή των αερίων θα είναι:

$$J_{αερ} = dm \cdot υ = dm \cdot (υ - υ_{σχετ}) \qquad (2)$$

Στο τέλος του χρονικού διαστήματος dt, η συνολική μάζα του πυραύλου (μαζί με τα καύσιμά του) έχει μειωθεί και έχει γίνει $m{-}dm$, ενώ η ταχύτητά του έχει αυξηθεί και έχει γίνει $υ{+}dυ$. Έτσι η ορμή του πυραύλου τώρα θα είναι:

$$J_{\pi\upsilon\rho} = (m - dm)(\upsilon + d\upsilon) \quad (3)$$

Επομένως η συνολική ορμή του συστήματος πύραυλος - καυσαέρια τη χρονική στιγμή $t+dt$, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (2) και (3) θα είναι:

$$J_{\text{ολ}}^{\text{ΤΕΛ}} = dm \cdot \upsilon + (m - dm)(\upsilon + d\upsilon)$$

$$J_{\text{ολ}}^{\text{ΤΕΛ}} = dm(\upsilon - \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}) + (m - dm)(\upsilon + d\upsilon) \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Ώθησης - Ορμής για το χρονικό διάστημα dt δηλαδή από τη χρονική στιγμή t έως τη χρονική στιγμή $t+dt$. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, τότε η μοναδική εξωτερική δύναμη που ασκείται στον πύραυλο είναι το βάρος του. Έτσι:

$$J_{\text{ΑΡΧ}_{\text{ολ}}} + \Omega_{\epsilon\xi} = J_{\text{ΤΕΛ}_{\text{ολ}}} .$$

Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω και παίρνοντας υπόψιν μας τις σχέσεις (1) και (4), η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$m\upsilon - mg \cdot dt = dm(\upsilon - \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}) + (m - dm)(\upsilon + d\upsilon)$$

$$-mgdt = -m\cancel{\upsilon} + \upsilon d\cancel{m} - dm \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau} + m\cancel{\upsilon} + m d\upsilon - \upsilon d\cancel{m} - dm \cdot d\upsilon$$

$$-mgdt = md\upsilon - dm \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau} - dm \cdot d\upsilon. \quad (5)$$

Το γινόμενο $dm \cdot d\upsilon$ μπορεί να παραληφθεί γιατί είναι πάρα πολύ μικρό, άρα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο σε σχέση με τους άλλους όρους. Έτσι:

$$(5) \quad -mgdt = md\upsilon - dm\upsilon - dm \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}$$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}\frac{dm}{dt} - mg \quad (6)$$

Ας δούμε αναλυτικά τους όρους της τελευταίας σχέσης.

Ο όρος $\frac{d\upsilon}{dt}$ είναι η επιτάχυνση του πυραύλου και το γινόμενο $m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = m \cdot \gamma$ παριστάνει τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στον πύραυλο.

Ο όρος $\frac{dm}{dt} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}$ ισούται με την κατακόρυφη προς τα πάνω προωστική δύναμη που ασκείται στον πύραυλο δηλαδή

$$\mathbf{F_{\pi\rho} = \frac{dm}{dt} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}} \quad (7)$$

Ο όρος αυτός $\frac{dm}{dt} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο ορμή μεταφέρεται στον πύραυλο από τα αέρια που έχουν εκτοξευτεί.

Έτσι η συνολική δύναμη που ασκείται στον πύραυλο είναι η διαφορά της προωστικής δύμαμης $F_{\pi\rho}$ και του βάρους. Επομένως από τη σχέση (6), έχω:

$$m \cdot \gamma = F_{\pi\rho} - B \qquad \Sigma F = m \cdot \gamma . \quad (8)$$

Καταλήξαμε δηλαδή στον γνωστό 2ο νόμο του Νεύτωνα. Επομένως, πηγαίνοντας αντίστροφα:

$$\Sigma F = m \cdot \gamma \qquad F_{\pi\rho} - B = m \cdot \gamma$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau} - m \cdot g = m \cdot \gamma$$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}}{m} - g} \quad (9)$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την επιτάχυνση του πυραύλου κάθε χρονική στιγμή και είναι απολύτως ίδια με τη σχέση (6).

Καθώς ο πύραυλος ανεβαίνει, η τιμή του g ελαττώνεται. Αν υποθέσουμε ότι οι τιμές των $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ και $\upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}$ παραμένουν σταθερές, ενώ σίγουρα η συνολική μάζα m του πυραύλου ελαττώνεται λόγω εξαγωγής των αερίων, τότε από τη σχέση (9) συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση γ του πυραύλου θα αυξάνει συνεχώς, μέχρις ότου εξαντληθούν τα καύσιμά του.

Υπολογισμός της ταχύτητας του πυραύλου κάθε χρονική στιγμή

Από τη σχέση (6) διαιρώντας με το m θα έχουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}}{m} \cdot \frac{dm}{dt} - g \qquad d\upsilon = \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}\frac{dm}{m} - gdt. \quad (10)$$

Προφανώς, ολοκληρώνοντας τη σχέση (10), μπορούμε να βρούμε μια σχέση της ταχύτητας του πυραύλου κάθε χρονική στιγμή και της μάζας m που του απομένει.

Τώρα, το dm είναι μια θετική ποσότητα που εκφράζει τη μάζα των αερίων που εκτοξεύεται σε χρονικό διάστημα dt, οπότε η μεταβολή της μάζας του πυραύλου στο ίδιο χρονικό διάστημα θα είναι $-dm$. Δηλαδή πρέπει στη σχέση (10) να αλλάξουμε το πρόσημο του όρου που περιέχει το dm.

Έστω m_0 και υ_0 η συνολική μάζα του πυραύλου (μαζί με τα καύσιμα) και η ταχύτητά του αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $t=0$. Τότε:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -\int_{m_0}^{m} \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau}\frac{dm}{m} - \int_0^t gdt$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = -\upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau} \ln\frac{m}{m_0} - gt$$

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_0 - \upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau} \ln\frac{m}{m_0} - gt} \quad (11)$$

Υπολογισμός της μάζας του πυραύλου (μαζί με τα εναπομείναντα καύσιμα), κάθε χρονική στιγμή t

Έστω m_0 η αρχική μάζα ενός πυραύλου (μαζί με τα καύσιμα) τη χρονική στιγμή $t=0$ και $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \alpha$ ο ρυθμός εκτόξευσης της μάζας των καυσαερίων. Τότε ο πύραυλος προφανώς σε χρονικό διάστημα t, θα έχει χάσει μάζα $m = \alpha \cdot t$, επομένως θα του έχει απομείνει μάζα

$$m = m_0 - m \qquad m = m_0 - \alpha \cdot t \qquad (12)$$

Ανακεφαλαίωση - συμπεράσματα

1 Η προωστική δύναμη που ασκείται στον πύραυλο είναι:

$$F_{\pi\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$$

όπου $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ = ο ρυθμός εκτόξευσης της μάζας των καυσαερίων

$\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$ = η σχετική ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο.

2 Η επιτάχυνση του πυραύλου κάθε χρονική στιγμή t, βρίσκεται εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\gamma = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}}{m} - g$$

όπου m = η μάζα του πυραύλου (μαζί με τα εναπομείναντα καύσιμα), τη χρονική στιγμή t.

3 Η ταχύτητα του πυραύλου κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau} \ln \frac{m}{m_0} - gt\,.$$

4 Η μάζα που απομένει στον πύραυλο (μαζί με τα καύσιμα) σε χρόνο t είναι:

$$m = m_0 - \alpha \cdot t$$

όπου m_0 = η αρχική μάζα τη χρονική στιγμή $t=0$

$\alpha = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ = ο ρυθμός εκτόξευσης της μάζας των καυσαερίων.

Παράδειγμα

Ένας πύραυλος έχει αρχική μάζα $m_0 = 5 \cdot 10^4$ Kgr και πυροδοτείται. Τα αέρια βγαίνουν από τον πύραυλο με σχετική ταχύτητα 200 m/sec ως προς τον πύραυλο και η μάζα Δm των αερίων που βγαίνουν κάθε sec είναι 200 Kgr.

α) Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία αρχίζει να ανυψώνεται ο πύραυλος.

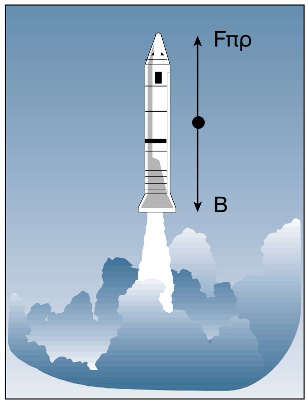
β) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του πυραύλου 4 min μετά την πυροδότηση, αν κινείται κατακόρυφα και θεωρήσουμε την ένταση του βαρυτικού πεδίου της γης σταθερή και ίση με 10 m/sec^2.

Λύση

α) $F_{\pi\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_{\sigma\chi} \qquad F_{\pi\rho} = 200 \cdot 200 \qquad F_{\pi\rho} = 4 \cdot 10^4$N.

Το αρχικό βάρος του πυραύλου τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι:

$$B_0 = m_0 \cdot g \qquad B_0 = 5 \cdot 10^4 \cdot 10 \qquad B_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ N}.$$



Παρατηρούμε ότι $F_{\pi\rho} < B_0$, επομένως ο πύραυλος πυροδοτείται, αλλά δεν μπορεί να ξεκινήσει. Τη στιγμή που ξεκινά θα πρέπει να ισχύει $F_{\pi\rho} = B$ και επειδή η προωστική δύναμη είναι σταθερή, θα πρέπει να μειωθεί η μάζα του πυραύλου, άρα και το βάρος του, εκβάλλοντας αέρια. Έτσι θα έχουμε τη στιγμή που αρχίζει να ανυψώνεται:

$$B = F_{\pi\rho} = 4 \cdot 10^4 \text{ N} \qquad m \cdot g = 4 \cdot 10^4 \qquad m = 4 \cdot 10^3 \text{ Kgr}.$$

Δηλαδή τη στιγμή που ξεκινά, θα πρέπει να του έχει απομείνει μάζα $m = 4 \cdot 10^3$ Kgr.

Όπως έχουμε αποδείξει όμως, η σχέση της μάζας με το χρόνο είναι:

$$m = m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot t \qquad 4 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4 - 200 \cdot t$$

$$t = \frac{5 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^3}{200} \qquad \mathbf{t = 230\ sec.}$$

β) Η ταχύτητα του πυραύλου, αποδείξαμε ότι δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau} \ln \frac{m}{m_0} - gt$$

όπου

$\upsilon_0 = 0$,

$$m = m_0 \frac{\Delta m}{\Delta t} t \qquad m = 5 \cdot 10^4 - 200 \cdot 240 \qquad m = 2 \cdot 10^3 \text{ Kgr}$$

και $t = 240 - 230 = 10$ sec.

Άρα η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\upsilon = -200 \ln \frac{2 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^4} - 10 \cdot 10 \qquad \upsilon = -200 \ln \frac{1}{25} - 100$$

$$\upsilon = 200 \ln 25 - 100 \qquad \upsilon = 400 \ln 5 - 100.$$

Αν $\ln 5 \simeq 1{,}61$ τότε

$$\upsilon = 400 \cdot 1{,}61 - 100 \qquad \mathbf{\upsilon = 298{,}39\ m/sec}$$

Η επιτάχυνση του πυραύλου, αποδείξαμε ότι δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}}{m} - g \qquad \gamma = \frac{200 \cdot 200}{2 \cdot 10^3} - 10$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^3} - 10 \qquad \mathbf{\gamma = 10\ m/sec^2.}$$

ΔΩΡΕΑΝ ΤΑΞΙΔΙΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΣΗΡΑΓΓΕΣ ΣΕ 42 min ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ!

Του **Π. Ιακώβου,** Φυσικού

Υπάρχει δυνατότητα να ταξιδεύουμε μεταφέροντας ταυτόχρονα μεγάλες ποσότητες εμπορευμάτων, *με μηδενικό ενεργειακό κόστος (δωρεάν)*, από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη ή από τη Θεσσαλονίκη στη Νέα Υόρκη και *μάλιστα ανεξάρτητα από το μήκος της διαδρομής, ο χρόνος του ταξιδιού να είναι μόνο 42 min περίπου*;

Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι ναι!

Πράγματι είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένα μεταφορικό σύστημα που να χρησιμοποιεί οχήματα, χωρίς μηχανές, τα οποία θα μεταφέρουν ανθρώπους και υλικά από το ένα μέρος του πλανήτη στο άλλο δωρεάν και σε χρονικό διάστημα περίπου 42 min, ανεξάρτητα του μήκους της διαδρομής.

Στο μεταφορικό αυτό σύστημα θα κατασκευαστούν υπόγειες λείες σήραγγες, οι οποίες θα συνδέουν, σαν χορδές που τέμνουν την γήινη σφαίρα, διάφορες πόλεις του πλανήτη. Η μια άκρη της κάθε σήραγγας θα βρίσκεται στην πόλη Α και την άλλη άκρη στην πόλη Β.

Μέσα στις σήραγγες θα κινούνται κατάλληλα οχήματα, *εκτελώντας γραμμική αρμονική ταλάντωση*, με ενέργεια που θα τους παρέχει το συντηρηρικό βαρυτικό πεδίο της γης.

Έτσι κάθε όχημα θα ξεκινάει με μια μικρή ώθηση από την άκρη κάθε σήραγγας και θα σταματάει μόνο του στην άλλη άκρη της σήραγγας.

Η περίοδος αυτής της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης θα είναι ανεξάρτητη από το μήκος ή το βάθος της σήραγγας και αποδεικνύεται ότι είναι ίση με

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \qquad T = 2\cdot(3{,}14)\sqrt{\frac{6.400.000}{10}}\ (\text{sec})$$

$$T = 5024\ (\text{sec})$$

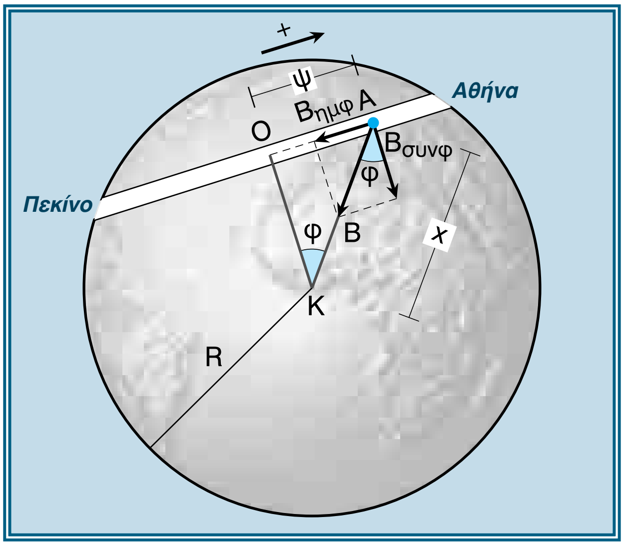
ή

$$T = \frac{5024}{60}\ (\text{min}) \qquad T = 83{,}73 \approx 84\ (\text{min})$$

Η μετακίνηση από τη μια πόλη στην άλλη θα γίνεται σε χρόνο $t = T/2$, δηλαδή σε $t \approx 42$ (min).

Απόδειξη της σχέσης της περιόδου:

Θεωρούμε ότι η ακτίνα της γης είναι R=6400 Km και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γής $g_0 = 10$ m/sec^2.



Θεωρούμε τη γη ακίνητη, ψυχρή, ομογενή σφαίρα.

Αποδεικνύεται επίσης ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο εσωτερικό της γης δίνεται από τη σχέση: $g = \frac{g_0}{R}\cdot\psi$, όπου ψ η απόσταση από το κέντρο της γης (βλ. Α τόμο Ασκήσεις Φυσικής και Γ τόμο σελ. 239-240 Π. Ιακώβου, Εκδόσεις ΖΗΤΗ).

Έστω μια τυχαία σήραγγα π.χ. Αθήνας-Πεκίνου και ένα σώμα μάζας m που εκτρέπεται κατά τυχαία απομάκρυνση x από την ΘΙΤ.

$$\Sigma F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -m\cdot g_A\cdot \eta\mu\varphi = -m\cdot\frac{g_0}{R}\cdot x\cdot\eta\mu\varphi =$$

$$= -m\cdot\frac{g_0}{R}\cdot x\left(\frac{\psi}{x}\right) = -m\cdot\frac{g_0}{R}\cdot\psi \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -D\cdot\psi \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $\quad D = m\cdot\frac{g_0}{R}$ (3) και

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}} \overset{(3)}{\text{—}} T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης της ταλάντωσης θα αναπτύσσεται στις ακραίες θέσεις και θα είναι ίση με την g_0, άρα ένας υγιής μέσος άνθρωπος μπορεί να αντέξει τα ταξίδια αυτά.

Βέβαια οι κατασκευές τέτοιων σηράγγων εμποδίζονται από γεωλογικούς παράγοντες.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΠΟΛΛΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥΣ ΔΡΟΜΟΥΣ

Του **Δ. Τσιώλη,** Φυσικού

Τα πιο σημαντικά προβλήματα που κυριαρχούν σήμερα στη διδασκαλία της Φυσικής σε τοπικό αλλά και ευρύτερο επίπεδο είναι τα εξής: 1ον, η σχετική αδιαφορία των παιδιών για το μάθημα της Φυσικής και 2ον, το γεγονός ότι η επιστημονική γνώση που αποχτούν οι μαθητές στο σχολείο εξουδετερώνεται γρήγορα και σε σύντομο χρονικό διάστημα τα παιδιά ξαναγυρίζουν στις ιδέες που είχαν πριν διδαχτούν φυσική.

Άποψή μου είναι ότι οι ρίζες αυτών των προβλημάτων βρίσκονται στο "σύνδρομο" των μαθητών, να χωρίζουν τον κόσμο σε δύο μέρη: στον κόσμο του σχολείου όπου "ισχύουν" οι φυσικοί νόμοι και στον κόσμο της καθημερινής ζωής όπου "παραδόξως" δεν ισχύουν οι φυσικοί νόμοι αλλά ένα ακατανόητο συνοθύλευμα φυσικών και κοινωνικών φαινομένων που τα καταλαβαίνουν μόνο κάποιοι ειδικοί.

Το πρόβλημα είναι δύσκολο, αλλά όχι άλυτο, αν σκεφτούμε ότι το σύνδρομο των μαθητών βρίσκεται σε άμεση σχέση αλληλεξάρτησης με το σύνδρομο του σημερινού πολιτισμού, ο οποίος "διαμερισματοποίησε" το χώρο και το χρόνο: από τη μια πλευρά χώρος αναψυχής, βιομηχανική περιοχή, πανεπιστημακός χώρος και από την άλλη ώρα δουλειάς, ημέρες διακοπών κ.λπ.

Είναι οδυνηρό αλλά φανερό ότι το σχολείο στα μάτια των παιδιών παρουσιάζεται σαν εκπαιδευτικό "γκέτο" στο οποίο δεν μπορεί να εισχωρήσει η καθημερινή ζωή και αντίστοιχα ένα "γκέτο" που δεν μπορεί να διαχυθεί στην κοινωνική ζωή.

Έτσι η άποψη του δασκάλου που θέλει ένα σχολείο ανοιχτό στο φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον είναι "αιρετική" στη χειρότερη και ανεξήγητη στην καλύτερη περίπτωση.

Το επιστημονικό μεθοδολογικό μοντέλο που οικοδομείται αποκλειστικά στο ειδικά κατασκευασμένο σχολικό εργαστήριο (ίσως μελλοντικά οι φυσικοί να επινοήσουν γι' αυτό τον όρο "μονοδιάστατο επιστημονικό μοντέλον") είναι τόσο ασταθές όσο είναι μονοδιάστατο.

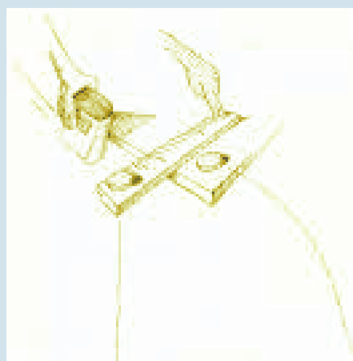
Το "επιστημονικό μοντέλο" που στη συνέχεια μεταφράζεται και σαν "μοντέλο εκπαίδευσης" είναι μια οργανωμένη δομή που για να επιβιώσει, πρέπει οπωσδήποτε να στηριχθεί στην ποικιλότητα των αλληλεπιδράσεων του ανθρώπου με την ζωντανή πραγματικότητα.

Στο βιβλίο μου "ΤΟ ΤΣΙΡΚΟ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ", οι χάρακες, οι κρεμάστρες, τα μήλα, τα κέρματα, οι σκούπες... είναι μερικά από τα απλά μέσα που χρησιμοποιώ για την εκτέλεση των πειραμάτων· πρωτότυπες μαθησιακές δραστηριότητες στήνονται με υλικό από τον αθλητισμό, την ιστορία και τον καθημερινό τύπο· στοιχεία από τον Ελληνικό πολιτισμό συμπληρώνουν το όλο τοπίο των δραστηριοτήτων. Σε όλες σχεδόν τις δραστηριότητες συμβιώνει η επιστημονική αυστηρότητα με το ΧΙΟΥΜΟΡ.

Παραθέτω 3 δραστηριότητες από το βιβλίο μου που προανέφερα.

Άλλοι δρόμοι ίδιοι χρόνοι

Στην γωνία ενός τραπεζιού βάλτε ένα κέρμα· πίσω από αυτό τοποθετείστε ένα χάρακα, έτσι ώστε ένα μέρος του να προεξέχει από το τραπέζι· με το δείχτη του ενός χεριού σας πατείστε τον χάρακα κοντά στην μια του άκρη, έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται παρασύροντας το κέρμα· πάνω στον χάρακα και κοντά στην άλλη άκρη του τοποθετείστε ένα άλλο κέρμα, όπως δείχνει το σχήμα.



Με ένα βιβλίο χτυπάμε το χάρακα (το χτύπημα να είναι κοφτό και ελαφρό).

Μετά το χτύπημα, το κέρμα που ήταν στο χάρακα κάνει ελεύθερη πτώση, ενώ το άλλο οριζόντια βολή.

Αν ισχύει η αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, τα δυο κέρματα πρέπει να χτυπήσουν το έδαφος συγχρόνως, αφού έφυγαν από το ίδιο ύψος την ίδια χρονική στιγμή.

ΔΟΚΙΜΑΣΤΕ ΤΟ.

Η ξεκούραση ενός γαϊδάρου

Ένας χωρικός, για να μη κουράσει το φορτωμένο γάιδαρό του, πήρε το φορτίο στους ώμους του και ανέβηκε στο γάιδαρο.

Εξηγείστε με όρους Φυσικής το λάθος του χωρικού.

Απάντηση

Το τσουβάλι δέχεται από τη Γη μια δύναμη B_1, κατακόρυφη προς τα κάτω· επειδή όμως ισορροπεί πρέπει να δέχεται και μια δύναμη A_1 αντίθετη της B_1. Ο μόνος που μπορεί να ασκήσει τη δύναμη A_1 στο τσουβάλι είναι ο άνθρωπος· έτσι ο άνθρωπος θα δέχεται από το τσουβάλι λόγω αντίδρασης μια δύναμη A_2 αντίθετη της A_1 ($A_2=A_1=B_1$).

Ο άνθρωπος εκτός της A_2 δέχεται και την δύναμη B_2 από τη Γη· επειδή όμως ο άνθρωπος δεν μπορεί να ισορροπήσει κάτω από την επίδραση δυο κατακόρυφων προς τα κάτω δυνάμεων (A_2 και B_2), πρέπει να δέχεται και μια άλλη δύναμη N_1 προς τα πάνω: $N_1=A_2+B_2$. Ο μόνος που μπορεί να ασκήσει την δύναμη N_1 είναι ο γάιδαρος, οπότε ο γάιδαρος θα δέχεται από τον άνθρωπο μια δύναμη N_2, αντίθετη της N1. Έτσι λοιπόν ο γάιδαρος δέχεται τώρα δύναμη $N_2=B_1+B_2$, αντί της δύναμη B_1 που θα δέχονταν αν δεν ανέβαινε και ο άνθρωπος!

Η δύναμη του κρασιού

Ένας γραφικός τύπος των Τρικάλων, λάτρης του Διόνυσου, μετά το δεύτερο μπουκάλι κρασιού κατασκεύαζε το παρακάτω "μαραφέτι":

Σε άν φελλό κάρφωνε δυο πιρούνια, το ένα από τη μια μεριά και το άλλο από την άλλη, όπως δείχνει η εικόνα· κατά μήκος του άξονα του φελλού περνούσε μια καρφίτσα. Κατόπιν στήριζε το σύστημα φελλός-πιρούνια πάνω σε ένα μπουκάλι, έτσι που να ακουμπά η μύτη της καρφίτσας στο καπάκι του μπουκαλιού. Τέλος έβαζε σε περιστροφή το σύστημα και το άφηνε· αυτό γύριζε-γύριζε... και σταματούσε μετά από πολύ ώρα.

Λέτε να συντηρούσε την περιστροφή η "δύναμη" του κρασιού;

Απάντηση

Το "μαραφέτι" ακουμπά με τη μύτη και το μπουκάλι αν και ασκεί δυνάμεις αυτές δημιουργούν αμελητέα ροπή λόγω της μεταξύ τους μικρής απόστασης, οπότε διατηρείται η στροφορμή.

ΧΗΜΙΚΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

Του **Κ. Α. Τσίπη**, Καθηγητή της Κβαντικής Χημείας του Α.Π.Θ.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι χημικές αντιδράσεις, δηλαδή οι μετατροπές των διαφόρων χημικών ουσιών σε άλλες ουσίες, αποτελούν την ουσία της χημείας. Ως εκ τούτου, η εξοικείωση του σπουδαστή με τις χημικές αντιδράσεις αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση του αντικειμένου της χημείας. Είναι δυνατόν, όμως, να μάθει κανείς έναν τεράστιο αριθμό χημικών αντιδράσεων που περιλαμβάνει η επιστήμη της χημείας, χωρίς κάποια συστηματοποίησή τους; Η απάντηση, φυσικά, είναι όχι. Ευτυχώς, όμως, όπως συμβαίνει σε κάθε επιστήμη, έτσι και στη χημεία η συστηματοποίηση των παρατηρήσεων οδηγεί στην αναγνώριση ορισμένων προτύπων χημικών αντιδράσεων που βοηθάει σημαντικά στην ευκολότερη κατανόησή τους. Επιπλέον, μας επιτρέπει να προβλέψουμε το αποτέλεσμα πολλών άλλων αντιδράσεων των χημικών ουσιών.

Για ν' αποκτήσει κανείς μια εικόνα της τεράστιας σημασίας των χημικών αντιδράσεων δεν έχει παρά ν' αναλογιστεί τη σύγχρονη επιστήμη των υλικών η οποία, με βάση τις χημικές αντιδράσεις, μας παρέχει πληθώρα απλών και έξυπνων υλικών που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή. Αλλά και στις επιστήμες της φαρμακολογίας, της μοριακής βιολογίας και της βιοτεχνολογίας οι χημικές αντιδράσεις είναι αυτές που παίζουν τον πρωτεύοντα ρόλο. Πολλές μάλιστα από τις χημικές αυτές αντιδράσεις είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και ο μηχανισμός με τον οποίο συμβαίνουν είναι ακόμη σχεδόν άγνωστος.

2. ΤΥΠΟΙ ΧΗΜΙΚΩΝ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ

Η διείσδυση στη φύση των χημικών αντιδράσεων μας δείχνει ότι σε μια χημική αντίδραση, που περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση ορισμένων χημικών ουσιών και το σχηματισμό κάποιων άλλων ουσιών, αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα είναι η διάσπαση ορισμένων δεσμών και ο σχηματισμός κάποιων άλλων νέων δεσμών. Οι διεργασίες αυτές που συμβαίνουν στις χημικές αντιδράσεις ακολουθούν συγκεκριμένα πρότυπα, τα οποία και καθορίζουν τον τύπο της χημικής αντίδρασης.

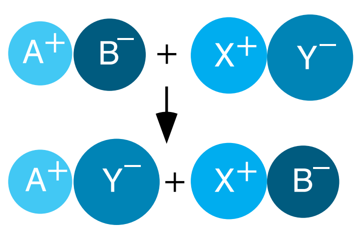
Τα πρότυπα των χημικών αντιδράσεων, ή με άλλα λόγια οι τύποι των χημικών αντιδράσεων που συναντούμε στη χημεία θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες, που είναι οι εξής:

1. οι **μεταθετικές αντιδράσεις**, ή **αντιδράσεις ανταλλαγής** και
2. οι **αντιδράσεις μεταφοράς ηλεκτρονίων**

Στην πρώτη κατηγορία των χημικών αντιδράσεων εκείνο το οποίο συμβαίνει είναι μια απλή ανταλλαγή των κατιόντων και των ανιόντων των ουσιών που αντιδρούν μεταξύ τους για να σχηματίσουν τα προϊόντα. Στις αντιδράσεις αυτές δεν συμβαίνει καμιά μεταφορά ηλεκτρονίων από το ένα αντιδρών συστατικό στο άλλο. Ένα γενικό παράδειγμα περιγράφεται από τη χημική εξίσωση:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{XY} \qquad \mathbf{AY} + \mathbf{XB} \tag{1}$$

Όπως είναι φανερό, στην αντίδραση αυτή συμβαίνει πράγματι μιά αμοιβαία ανταλλαγή των κατιόντων $\mathbf{A^+}$ και $\mathbf{X^+}$, καθώς και των ανιόντων $\mathbf{B^-}$ και $\mathbf{Y^-}$. Σημειώστε τη διάσπαση των δεσμών **A–B** και **X–Y** και τη δημιουργία των νέων δεσμών **A–Y** και **X–B**. Αντιδράσεις αυτού του τύπου είναι γνωστές και ως αντιδράσεις **διπλής αντικατάστασης** και αποτελούν το κυριότερο είδος μεταθετικών αντιδράσεων.



***Εικ. 1.** Σχηματική παράσταση μιας μεταθετικής αντίδρασης. Οι μεταθετικές αντιδράσεις είναι γνωστές και ως αντιδράσεις ανταλλαγής, ή και ως αντιδράσεις διπλής αντικατάστασης.*

Όμως, *πότε μπορεί να συμβεί μια αντίδραση διπλής αντικατάστασης, η με άλλα λόγια, ποιά είναι τα κριτήρια εκείνα που μας επιτρέπουν να προβλέψουμε αν μια αντίδραση διπλής αντικατάστασης θα συμβεί ή όχι;* Μια αντίδραση, λοιπόν, διπλής αντικατάστασης συμβαίνει:

1. *όταν ένα από τα προϊόντα της αντίδρασης είναι μια **ελάχιστα διϊστάμενη (ιονιζόμενη)** ουσία, όπως π.χ. το H_2O,*
2. *όταν ένα από τα προϊόντα της αντίδρασης είναι **ίζημα**, δηλαδή είναι στερεό αδιάλυτο στο διαλύτη που χρησιμοποιούμε στην αντίδραση και*
3. *όταν ένα από τα προϊόντα της αντίδρασης είναι **αέριο** το οποίο απομακρύνεται από το χημικό σύστημα.*

Με βάση τα κριτήρια αυτά οι αντιδράσεις διπλής αντικατάστασης διακρίνονται σε,

1. **αντιδράσεις οξέος-βάσεως,** που είναι γνωστές και ως **αντιδράσεις εξουδετέρωσης**, όπου ένα από τα προϊόντα είναι το H_2O. Π.χ.,

$$HA(aq) + MOH(aq) \quad MA(aq) + H_2O(l) \qquad (2)$$

***Εικ. 2.** Η ογκομέτρηση οξέος-βάσεως στηρίζεται σε αντίδραση οξέος-βάσεως (αντίδραση εξουδετέρωσης). Το τέλος της αντίδρασης διαπιστώνεται με την αλλαγή του χρώματος μιας ουσίας που λέγεται δείκτης (στη συγκεκριμένη περίπτωση ο δείκτης είναι η φαινολοφθαλεΐνη).*

2. **αντιδράσεις καθίζησης,** στις οποίες ένα από τα προϊόντα καθιζάνει στο διάλυμα με τη μορφή αδιάλυτου στερεού, το οποίο ονομάζεται γενικά **ίζημα**. Π.χ.,

$$NaCl(aq) + AgNO_3(aq) \quad AgCl(s) + NaNO_3(aq) \qquad (3)$$

***Εικ. 3.** Αντίδραση καθίζησης. Η αντίδραση του νιτρικού μολύβδου, $Pb(NO_3)_2$, με το θειούχο νάτριο, Na_2S, οδηγεί στο σχηματισμό ιζήματος θειούχου μολύβδου PbS, χρώματος μαύρου.*

3. **αντιδράσεις σχηματισμού αερίου,** στις οποίες ένα από τα προϊόντα είναι αέριο και εκλύεται από το διάλυμα με τη μορφή φυσαλίδων. Π.χ.,

$$CaCO_3(s) + 2HCl(aq) \quad CaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l) \qquad (4)$$

***Εικ. 4.** Αντίδραση σχηματισμού αερίου. Η αντίδραση του ανθρακικού χαλκού, $CuCO_3$, με ένα οξύ, οδηγεί στο σχηματισμό αερίου CO_2.*

Παράδειγμα 1

Τι αντίδραση συμβαίνει (αν συμβαίνει) κατά την ανάμειξη υδατικών διαλυμάτων KCl και $NaNO_3$;

Λύση: Τόσο το KCl όσο και το $NaNO_3$ είναι άλατα ευδιάλυτα στο νερό όπου υφίστανται πλήρη διάσταση σε ιόντα (ισχυροί ηλεκτρολύτες):

$$KCl(s) + H_2O(l) \quad K^+(aq) + Cl^-(aq)$$
$$NaNO_3(s) + H_2O(l) \quad Na^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

Αν υποθέσουμε ότι μπορεί να συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης,

$$KCl + NaNO_3 \quad KNO_3 + NaCl$$

τότε τα προϊόντα θα είναι KNO_3 και NaCl, τα οποία επίσης είναι άλατα ευδιάλυτα στο νερό, όπου υφίστανται πλήρη διάσταση σε ιόντα (ισχυροί ηλεκτρολύτες):

$$KNO_3(s) + H_2O(l) \quad K^+(aq) + NO_3^-(aq)$$
$$NaCl(s) + H_2O(l) \quad Na^+(aq) + Cl^-(aq)$$

Η συνολική, λοιπόν, αντίδραση γραφόμενη με την ιονική της μορφή,

$$K^+(aq) + Cl^-(aq) + Na^+(aq) + NO_3^-(aq) \quad K^+(aq) + NO_3^-(aq) + Na^+(aq) + Cl^-(aq)$$

δείχνει την παρουσία στο διάλυμα όλων των ιόντων με την εφυδατωμένη τους μορφή, οπότε δεν συμβαίνει καμιά αντίδραση μεταξύ τους. Εξάλλου για την αντίδραση αυτή δεν ισχύει κανένα από τα τρία κριτήρια που καθορίζουν, αν μια αντίδραση διπλής αντικατάστασης μπορεί να γίνει ή όχι.

Παράδειγμα 2

Τι αντίδραση συμβαίνει (αν συμβαίνει) κατά την ανάμειξη υδατικών διαλυμάτων $HClO_4$ και NaOH;

Λύση: Το $HClO_4$ είναι ισχυρό οξύ που υφίσταται πλήρη διάσταση στο νερό. Το NaOH είναι μια ισχυρή βάση που υφίσταται επίσης πλήρη διάσταση στο νερό:

$$HClO_4(aq) \quad H^+(aq) + ClO_4^-(aq)$$
$$NaOH(aq) \quad Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

Αν υποθέσουμε ότι μπορεί να συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης,

$$HClO_4(aq) + NaOH(aq) \quad NaClO_4(aq) + H_2O(l)$$

τότε τα προϊόντα θα είναι $NaClO_4(aq)$ και $H_2O(l)$, από τα οποία

το $NaClO_4(aq)$ είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση σε ιόντα,

$$NaClO_4(aq) + H_2O(l) \quad Na^+(aq) + ClO_4^-(aq)$$

ενώ το $H_2O(l)$ είναι μια ελάχιστα διϊστάμενη ουσία (πρώτο κριτήριο). Επομένως, θα συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης της πρώτης κατηγορίας (αντίδραση οξέος-βάσεως, ή αντίδραση εξουδετέρωσης). Η αντίδραση αυτή γράφεται με την ιονική της μορφή ως,

$$H^+(aq) + ClO_4^-(aq) + Na^+(aq) + OH^-(aq)$$
$$Na^+(aq) + ClO_4^-(aq) + H_2O(l)$$

ή αγνοώντας τα κοινά και στα δύο μέλη της εξίσωσης ιόντα (τα ιόντα αυτά που δε συμμετέχουν στην αντίδραση ονομάζονται **ιόντα θεατές**) παίρνει την πιό απλή της μορφή,

$$H^+(aq) + OH^-(aq) \quad H_2O(l)$$

Παράδειγμα 3

Τι αντίδραση συμβαίνει (αν συμβαίνει) κατά την ανάμειξη υδατικών διαλυμάτων $Pb(NO_3)_2$ και Na_2S;

Λύση: Ο νιτρικός μόλυβδος, $Pb(NO_3)_2$, και το Na_2S είναι άλατα ευδιάλυτα στο νερό όπου υφίστανται πλήρη διάσταση σε ιόντα,

$$Pb(NO_3)_2(aq) + H_2O(l) \quad Pb^{++}(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

$$Na_2S(aq) + H_2O(l) \quad 2Na^+(aq) + S^{2-}(aq)$$

Αν υποθέσουμε ότι μπορεί να συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης,

$$Pb(NO_3)_2(aq) + Na_2S(aq) \quad PbS(s) + 2NaNO_3(aq)$$

τότε τα προϊόντα θα είναι $PbS(s)$ και $NaNO_3(aq)$, από τα οποία το $NaNO_3(aq)$ είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση σε ιόντα,

$$NaNO_3(aq) + H_2O(l) \quad Na^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

ενώ ο $PbS(s)$ είναι ίζημα αδιάλυτο στο νερό (δεύτερο κριτήριο). Επομένως, θα συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης της δεύτερης κατηγορίας (αντίδραση καθίζησης). Η αντίδραση αυτή γράφεται με την ιονική της μορφή ως,

$$Pb^{++}(aq) + 2NO_3^-(aq) + 2Na^+(aq) + S^{2-}(aq)$$
$$PbS(s) + 2Na^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

ή αγνοώντας τα ιόντα θεατές παίρνει την πιό απλή της μορφή,

$$Pb^{++}(aq) + S^{2-}(aq) \quad PbS(s)$$

Παράδειγμα 4

Τι αντίδραση συμβαίνει (αν συμβαίνει) κατά την ανάμειξη υδατικών διαλυμάτων HCl και Na_2S;

Λύση: Το υδροχλωρικό οξύ, HCl, είναι ισχυρό οξύ που υφίσταται πλήρη διάσταση στο νερό,

$$HCl(aq) \quad H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

ενώ το Na_2S είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό όπου υφίσταται επίσης πλήρη διάσταση στο νερό,

$$Na_2S(aq) + H_2O(l) \quad 2Na^+(aq) + S^{2-}(aq)$$

Αν υποθέσουμε ότι μπορεί να συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης,

$$2HCl(aq) + Na_2S(aq) \quad 2NaCl(aq) + H_2S(g)$$

τότε τα προϊόντα θα είναι $NaCl(aq)$ και $H_2S(g)$, από τα οποία το $NaCl(aq)$ είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση σε ιόντα,

$$NaCl(aq) + H_2O(l) \quad Na^+(aq) + Cl^-(aq)$$

ενώ το $H_2S(g)$ είναι αέριο το οποίο απομακρύνεται από το σύστημα (τρίτο κριτήριο). Επομένως, θα συμβεί αντίδραση διπλής αντικατάστασης της τρίτης κατηγορίας (αντίδραση σχηματισμού αερίου). Η αντίδραση αυτή γράφεται με την ιονική της μορφή ως,

$$2H^+(aq) + 2Cl^-(aq) + 2Na^+(aq) + S^{2-}(aq)$$
$$2Na^+(aq) + 2Cl^-(aq) + H_2S(g)$$

ή αγνοώντας τα ιόντα θεατές παίρνει την πιό απλή της μορφή,

$$2H^+(aq) + S^{2-}(aq) \quad H_2S(g)$$

Στη δεύτερη κατηγορία των χημικών αντιδράσεων εκείνο το οποίο συμβαίνει είναι μια μεταφορά ηλεκτρονίων από το ένα αντιδρών συστατικό στο άλλο. Όταν η μεταφορά αυτή των ηλεκτρονίων δεν συνοδεύεται από μεταβολή της χημικής σύστασης των ουσιών που συμμετέχουν στην αντίδραση, οι αντιδράσεις ονομάζονται **αντιδράσεις ανταλλαγής ηλεκτρονίων**. Π.χ.,

e

$$Fe^{2+} + {}^*Fe^{3+} \longrightarrow {}^*Fe^{3+} + Fe^{2+} \qquad (5)$$

ενώ όταν συμβαίνει μεταβολή της χημικής σύστασης ονομάζονται γενικά **αντιδράσεις οξειδοαναγωγής**, ή **αντιδράσεις redox.**

2e

$$Sn^{2+} + 2Fe^{3+} \longrightarrow Sn^{4+} + 2Fe^{2+} \qquad (5)$$

Σημειώστε ότι οι αντιδράσεις ανταλλαγής ηλεκτρονίων αποτελούν μια ειδική περίπτωση των αντιδράσεων οξειδοαναγωγής, αφού κάθε μεταφορά ηλεκτρονίων σε μια χημική αντίδραση αντιστοιχεί σε αντίδραση οξειδοαναγωγής. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος αντιδράσεις μεταφοράς ηλεκτρονίων είναι συνώνυμος με τον όρο αντιδράσεις οξειδοαναγωγής. Ανάλογα, τώρα, με ορισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των αντιδράσεων μεταφοράς ηλεκτρονίων αυτές διακρίνονται στα παρακάτω είδη:

1. **αντιδράσεις σύνθεσης**, ή **αντιδράσεις συνδυασμού**, στις οποίες απλούστερες χημικές ουσίες συνδυάζονται για να δώσουν ως προϊόντα πολυπλοκότερες χημικές ουσίες. Π.χ.,

$$Mg(s) + Cl_2(g) \quad MgCl_2(s) \qquad (7)$$

$$4Fe(s) + 3O_2(g) \quad 2Fe_2O_3(s) \qquad (8)$$

2. **αντιδράσεις αποσύνθεσης**, ή **αντιδράσεις διάσπασης**, στις οποίες από πολυπλοκότερες χημικές ουσίες προκύπτουν απλούστερες. Π.χ.,

$$2HgO(s) \quad 2Hg(l) + O_2(g) \qquad (9)$$

$$2HI(g) \quad H_2(g) + I_2(g) \qquad (10)$$

***Εικ. 5.** Αντίδραση αποσύνθεσης. Η θέρμανση του οξειδίου του υδραργύρου, HgO, οδηγεί στη διάσπασή του σε Hg και O_2.*

3. **αντιδράσεις απλής αντικατάστασης**, στις οποίες ένα άτομο, ή μια ομάδα ατόμων αντικαθιστά ένα άλλο άτομο, ή μια άλλη ομάδα ατόμων σε μια ένωσή τους. Π.χ.,

$$Mg(s) + 2HCl(aq) \quad MgCl_2(aq) + H_2(g) \qquad (11)$$

$$2AgNO_3(aq) + Cu(s) \quad Cu(NO_3)_2(aq) + 2Ag(s) \qquad (12)$$

***Εικ. 6.** Αντίδραση απλής αντικατάστασης. Η οξείδωση του μεταλλικού χαλκού από ιόντα αργύρου αποτελεί μια χαρακτηριστική αντίδραση απλής αντικατάστασης.*

4. **αντιδράσεις πολύπλοκης μορφής**. Είναι όλες οι αντιδράσεις μεταφοράς ηλεκτρονίων που δεν υπάγονται στα τρία προηγούμενα είδη, όπως είναι π.χ. οι αντιδράσεις ανταλλαγής ηλεκτρονίων και οι γενικές αντιδράσεις οξειδοαναγωγής. Π.χ.,

$$6KOH(aq) + 3Cl_2(g) \quad KClO_3(aq) + 5KCl(aq) + 3H_2O(l) \qquad (13)$$

$$K_2Cr_2O_7(aq) + 14HCl(aq) \quad 2CrCl_3(aq) + 2KCl(aq) + 3Cl_2(g) + 7H_2O(l) \qquad (14)$$

Σημειώστε, ότι η παραπάνω διάκριση των αντιδράσεων δεν είναι απόλυτη. Ωστόσο, όμως, είναι πολύ χρήσιμη για την ευκολότερη κατανόησή τους. Υπάρχουν αντιδράσεις που αποτελούν συνδυασμό των παραπάνω τύπων αντιδράσεων και υπάρχουν αντιδράσεις που δε μπορούν να ενταχθούν στις παραπάνω κατηγορίες.

Τέλος, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μια γενικότερη διάκριση των χημικών αντιδράσεων στηρίζεται στο είδος των χημικών ουσιών που συμμετέχουν σ' αυτές, δηλαδή στο αν οι ουσίες είναι ηλεκτρολύτες (ιονικές ενώσεις) ή είναι μοριακές ενώσεις. Έτσι, λοιπόν, οι χημικές αντιδράσεις μπορεί να είναι:

1. **ιονικού τύπου**, ή όπως αλλιώς λέγονται **ιονικές αντιδράσεις**, στις οποίες οι ουσίες που αντιδρούν είναι ιονικές και κατά συνέπεια η αντίδραση λαμβάνει χώρα μεταξύ των ιόντων των ιονικών ουσιών και
2. **μοριακού τύπου**, ή όπως αλλιώς λέγονται **μοριακές αντιδράσεις**, στις οποίες οι ουσίες που αντιδρούν είναι άτομα ή μόρια και κατά συνέπεια η αντίδραση λαμβάνει χώρα μεταξύ των ατόμων ή μορίων των μοριακών ουσιών.

3. ΚΑΘΑΡΕΣ ΙΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στις χημικές εξισώσεις που παριστάνουν τις ιονικές αντιδράσεις και ονομάζονται **ιονικές εξισώσεις** γράφονται είτε όλα τα είδη των ιόντων που συμμετέχουν στην αντίδραση (πλήρης ιονική αντίδραση), είτε μόνον εκείνα που δεν αποτελούν **ιόντα "θεατές"**. Στην τελευταία περίπτωση οι χημικές εξισώσεις αποτελούν τις ονομαζόμενες **καθαρές ιονικές εξισώσεις** και είναι αυτές που μπορούν να μας δώσουν κάθε πληροφορία για την αντίδραση. *Όμως, τι πρέπει να γνωρίζουμε για να γράψουμε μια καθαρή ιονική αντίδραση;*

Κατ' αρχήν πρέπει να γνωρίζουμε ότι όλοι οι ισχυροί ηλεκτρολύτες στα υδατικά τους διαλύματα βρίσκονται σε πλήρη διάσταση στα ιόντα τους και είναι τα ιόντα εκείνα που γράφονται στην εξίσωση. Επίσης, πρέπει να γνωρίζουμε ότι όλοι οι ασθενείς ηλεκτρολύτες στα υδατικά τους διαλύματα βρίσκονται σε πολύ μικρή διάσταση στα ιόντα τους, με αποτέλεσμα να γράφονται με τη μοριακή τους μορφή. Με τη μοριακή μορφή γράφονται επίσης και οι αδιάλυτες στο νερό ουσίες (ιζήματα), καθώς και τα αέρια. Τέλος, οι ιονικές εξισώσεις πρέπει να είναι ισοζυγισμένες τόσο ως προς τον αριθμό των ατόμων που υπάρχουν στα δύο μέλη της εξίσωσης, όσο και ως προς το φορτίο. Το τελευταίο αποτελεί τον **κανόνα της ηλεκτροουδετερότητας** των χημικών αντιδράσεων, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: *Σε μιά ιονική αντίδραση το σύνολο και το είδος των φορτίων στα δύο μέλη της πρέπει να είναι το ίδιο.* Σε περίπτωση που δεν είναι το ίδιο, ο ισοζυγισμός του φορτίου γίνεται με την προσθήκη για μεν τα θετικά φορτία κατιόντων υδρογόνου, H^+, για

δε τ' αρνητικά φορτία ανιόντων υδροξυλίου **OH^-** (αναφερόμενοι φυσικά πάντοτε σε υδατικά διαλύματα). Ορισμένα παραδείγματα του τρόπου γραφής των καθαρών ιονικών εξισώσεων δόθηκαν σε προηγούμενα παραδείγματα. Ας δούμε, όμως, μερικά ακόμη παραδείγματα.

Παράδειγμα 5

Να γραφούν η μοριακή, ιονική και καθαρή ιονική εξίσωση της αντίδρασης διπλής αντικατάστασης μεταξύ του $Na_2S(aq)$ και του $Cu(NO_3)_2(aq)$. Τι τύπος αντίδρασης συμβαίνει;

Λύση: Η μοριακή εξίσωση της αντίδρασης του $Na_2S(aq)$ με το $Cu(NO_3)_2(aq)$ γράφεται:

$$Na_2S(aq) + Cu(NO_3)_2(aq) \quad CuS(s) + 2NaNO_3(aq)$$

Το Na_2S είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση,

$$Na_2S(aq) + H_2O(l) \quad 2Na^+(aq) + S^{2-}(aq)$$

Ο νιτρικός χαλκός, $Cu(NO_3)_2$, είναι επίσης άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση,

$$Cu(NO_3)_2(aq) \quad Cu^{2+}(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

Από τα προϊόντα της αντίδρασης ο θειούχος χαλκός, CuS, είναι ίζημα (στερεό, αδιάλυτο στο νερό) ενώ το $NaNO_3$ είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση,

$$NaNO_3(aq) \quad Na^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

Επομένως, η ιονική εξίσωση γράφεται,

$$2Na^+(aq) + S^{2-}(aq) + Cu^{2+}(aq) + 2NO_3^-(aq)$$
$$CuS(s) + 2Na^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

ενώ η καθαρή ιονική εξίσωση γράφεται,

$$S^{2-}(aq) + Cu^{2+}(aq) \quad CuS(s)$$

Η συγκεκριμένη αντίδραση είναι μια **αντίδραση καθίζησης**.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΡΑΦΗΣ ΤΩΝ ΚΑΘΑΡΩΝ ΙΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- **Αδιάλυτες στο νερό ουσίες, αέριες ουσίες, ασθενείς ηλεκτρολύτες και μοριακές ουσίες γράφονται με το χημικό τους τύπο.**
- **Ισχυροί ηλεκτρολύτες γράφονται με τη μορφή των ιόντων που σχηματίζουν στα υδατικά τους διαλύματα**
- **Γράψτε όλα τα χημικά είδη που απαντούν στα υδατικά διαλύματα των ουσιών που θ' αντιδράσουν.**
- **Γράψτε τα προϊόντα της αντίδρασης.**
- **Απαλείψατε τα ιόντα θεατές και ισοζυγίστε τη χημική εξίσωση τόσο ως προς τα χημικά είδη, όσο και ως προς το φορτίο.**

Παράδειγμα 6

Να γραφούν η μοριακή, ιονική και καθαρή ιονική εξίσωση της αντίδρασης διπλής αντικατάστασης μεταξύ του $BaCO_3(s)$ και του $HCl(aq)$. Τι τύπος αντίδρασης συμβαίνει;

Λύση: Η μοριακή εξίσωση της αντίδρασης του $BaCO_3(s)$ με το $HCl(aq)$ γράφεται:

$$BaCO_3(s) + 2HCl(aq) \quad BaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

Το ανθρακικό βάριο, $BaCO_3$, είναι άλας στερεό αδιάλυτο στο νερό.

Το υδροχλωρικό οξύ, HCl, είναι ισχυρό οξύ που υφίσταται πλήρη διάσταση στο νερό,

$$HCl(aq) \quad H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

Το $BaCl_2$ είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση,

$$BaCl_2(aq) + H_2O(l) \quad Ba^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq)$$

ενώ το CO_2 είναι αέριο, το οποίο απομακρύνεται από το σύστημα και το $H_2O(l)$ μια ελάχιστα διϊστάμενη ουσία.

Επομένως, η ιονική εξίσωση γράφεται,

$$BaCO_3(s) + 2H^+(aq) + 2Cl^-(aq)$$
$$Ba^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

ενώ η καθαρή ιονική εξίσωση γράφεται,

$$BaCO_3(s) + 2H^+(aq) \quad Ba^{2+}(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

Η συγκεκριμένη αντίδραση είναι μια **αντίδραση σχηματισμού αερίου**.

Παράδειγμα 7

Να γραφούν η μοριακή, ιονική και καθαρή ιονική εξίσωση της αντίδρασης διπλής αντικατάστασης μεταξύ του $Fe(OH)_2(s)$ και του $HCl(aq)$. Τι τύπος αντίδρασης συμβαίνει;

Λύση: Η μοριακή εξίσωση της αντίδρασης του $Fe(OH)_2(s)$ με το $HCl(aq)$ γράφεται:

$$Fe(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \quad FeCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

Το υδροξείδιο του σιδήρου, $Fe(OH)_2$, είναι μια βάση στερεή αδιάλυτη στο νερό.

Το υδροχλωρικό οξύ, HCl, είναι ισχυρό οξύ που υφίσταται πλήρη διάσταση στο νερό,

$$HCl(aq) \quad H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

Ο διχλωριούχος σίδηρος, $FeCl_2$, είναι άλας ευδιάλυτο στο νερό, όπου υφίσταται πλήρη διάσταση,

$$FeCl_2(aq) + H_2O(l) \quad Fe^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq)$$

ενώ το $H_2O(l)$ μια ελάχιστα διϊστάμενη ουσία.

Επομένως, η ιονική εξίσωση γράφεται,

$$Fe(OH)_2(s) + 2H^+(aq) + 2Cl^-(aq)$$
$$Fe^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq) + 2H_2O(l)$$

ενώ η καθαρή ιονική εξίσωση γράφεται,

$$Fe(OH)_2(s) + 2H^+(aq) \quad Fe^{2+}(aq) + 2H_2O(l)$$

Η συγκεκριμένη αντίδραση είναι μια **αντίδραση εξουδετέρωσης**.

4. ΠΑΡΑΤΗΡΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΧΗΜΙΚΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

Ας εξετάσουμε τώρα τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μάθουμε, αν σ' ένα διάλυμα συμβαίνει ή όχι μια χημική αντίδραση. Με άλλα λόγια, θα γνωρίσουμε τις ενδείξεις εκείνες που μας βεβαιώνουν για το αν σ' ένα διάλυμα συμβαίνει ή

όχι μια χημική αντίδραση. Οι ενδείξεις αυτές, όπως είναι φυσικό, θα πρέπει να βασίζονται σε κάποια ορατή μεταβολή που συμβαίνει στο χημικό σύστημα, έτσι ώστε να είναι δυνατή η παρακολούθηση της εξέλιξης της χημικής αντίδρασης με “γυμνό” μάτι. Ωστόσο, όμως, ακόμη και όταν δε συμβαίνουν ορατές μεταβολές αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να συμβαίνει χημική αντίδραση. Απλά, οι μεταβολές αυτές απαιτούν τη χρησιμοποίηση άλλων τεχνικών για την παρατήρησή τους. Θα περιορίσουμε, όμως, τη συζήτηση μόνο στην περιγραφή των ενδείξεων εκείνων που στηρίζονται στις ορατές μεταβολές και είναι οι παρακάτω:

– *Σχηματισμός αδιάλυτου στερεού προϊόντος(ίζημα). Π.χ.,*

$$Ca^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq) \qquad \mathbf{CaCO_3(s)} \qquad (15)$$

$$Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \qquad Zn^{2+}(aq) + \mathbf{Cu(s)} \qquad (16)$$

– *Σχηματισμός αερίου προϊόντος. Π.χ.*

$$S^{2-}(aq) + 2H_3O^+(aq) \qquad 2H_2O(aq) + \mathbf{H_2S(g)} \qquad (17)$$

– *Κατανάλωση ενός στερεού αντιδρώντος συστατικού. Π.χ.,*

$$\mathbf{CaCO_3(s)} + 2H_3O^+(aq) \qquad Ca^{2+}(aq) + 3H_2O + CO_2(g) \qquad (18)$$

– *Μεταβολή της θερμοκρασίας του χημικού συστήματος. Π.χ.,*

$$H_2SO_4(l) + H_2O(aq) \qquad H_3O^+(aq) + HSO_4^-(aq) + \mathbf{Q} \qquad (19)$$

Προσοχή, η ένδειξη αυτή δεν είναι απόλυτη, αφού και πολλά φυσικά φαινόμενα συνοδεύονται από μεταβολή της θερμοκρασίας του συστήματος.

– *Αλλαγή του χρώματος του χημικού συστήματος. Π.χ.,*

$$\underbrace{\mathbf{Cr_2O_7^{2-}(aq)}}_{\text{κίτρινο}} + 3H_2C_2O_4(aq) + 8H_3O^+(aq) \qquad \underbrace{\mathbf{2Cr^{3+}(aq)}}_{\text{πράσινο}} + 6CO_2(g) + 15H_2O \qquad (20)$$

$$\underbrace{\mathbf{Cu_2+(aq)}}_{\text{ανοιχτό μπλέ}} + 4NH_3(aq) \qquad \underbrace{\mathbf{Cu(NH_3)_4^{2+}(aq)}}_{\text{βαθύ μπλέ}} \qquad (21)$$

◆

ΕΚΑΤΟ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΟΥ ΡΑΔΙΟΥ

Του **Αναστάσιου Βάρβογλη**, Καθηγητή Οργανικής Χημείας του Α.Π.Θ.

Σπουδαία επιστημονικά γεγονότα σημάδεψαν το 1898: με διαφορά λίγων μόνο μηνών, ανακαλύφθηκαν τα δύο πρώτα ραδιενεργά στοιχεία, το πολώνιο και το ράδιο. Ήταν το επιστέγασμα κοπιαστικής εργασίας δύο χρόνων, όπου πρωταγωνιστικό ρόλο είχε μία νεαρή Πολωνίδα που εκπονούσε τη διδακτορική της διατριβή, η Μαρία Σκλοντόβσκα-Κιουρί ή Μαντάμ Κιουρί, όπως έγινε περισσότερο γνωστή. Οι πρωτόγνωρες ιδιότητες των νέων στοιχείων κατέπληξαν τους επιστήμονες, ενώ η μοναδική προσωπικότητα της Μαντάμ Κιουρί δεν άργησε να συναρπάσει πλήθη κόσμου.

Η ιστορία αρχίζει με μια άλλη σπουδαία ανακάλυψη, τη μυστηριώδη ακτινοβολία ενός ορυκτού του ουρανίου, του πισσουρανίτη, που επισήμανε ο Γάλλος φυσικός Henri Becquerel, το 1896. Το φαινόμενο ανακαλύφθηκε από ένα τυχαίο γεγονός και ονομάσθηκε ραδιενέργεια. Τον καιρό εκείνο η Μαντάμ Κιουρί είχε μόλις ολοκληρώσει τις σπουδές της στη Σορβόνη. Είχε πάρει με άριστα δύο πτυχία, Φυσικής και Μαθηματικών, αλλά η έφεσή της για έρευνα την ώθησε σε κάτι παράτολμο για την εποχή της: να επιδιώξει τη συνέχιση των σπουδών της με την εκπόνηση διδακτορικής διατριβής. Η μελέτη του φαινομένου της ραδιενέργειας αποτέλεσε την επιλογή της, με την ενθάρρυνση και συμπαράσταση του συζύγου της Πιερ Κιουρί, που ήταν ήδη δόκιμος φυσικός. Ο Κιουρί αναγνώρισε σύντομα το ενδιαφέρον που παρουσίαζαν οι έρευνες της συζύγου του και αποφάσισε να εγκαταλείψει τις δικές του έρευνες, προκειμένου να βοηθήσει στην επίλυση των προβλημάτων που συνεχώς παρουσιάζονταν.

Πράγματι, το θέμα που είχε διαλέξει η Μαντάμ Κιουρί ήταν προκλητικό και παρουσίαζε μεγάλες δυσκολίες, ακριβώς όμως γι' αυτό άξιζε να μελετηθεί, καθώς οι προικισμένοι ερευνητές εκλύονται από τα δύσκολα θέματα. Από την αρχή έγινε φανερό ότι η ραδιενέργεια δεν οφειλόταν μόνο στο ουράνιο, επειδή αυτή με τον καθαρισμό του ορυκτού μειωνόταν. Έπρεπε συνεπώς να συνυπάρχει κάποιο νέο στοιχείο, στο οποίο κυρίως οφειλόταν η ραδιενέργεια. Ο πρώτος στόχος ήταν λοιπόν η απομόνωση αυτού του στοιχείου. Οι υπολογισμοί αφήνουν να διαφανεί ότι το στοιχείο βρίσκεται στο ορυκτό σε αναλογία περίπου 1%. Πού να ήξεραν ότι πρόκειται για δύο νέα στοιχεία με ασύγκριτα μικρότερη παρουσία: η περιεκτικότητα του ραδίου είναι 0,000025% (ένα γραμμάριο σε τέσσερις τόννους) και του πολωνίου 2.500 φορές λιγότερη! Αλήθεια, θα επιχειρούσαν άραγε την απομόνωση των στοιχείων, αν ήξεραν με τι ίχνη είχαν να παλέψουν; Όλη η μετέπειτα προσπάθειά τους μας πείθει ότι ναι, οποιαδήποτε αντιξοότητα θα την ξεπερνούσαν, προκειμένου να πετύχουν το στόχο τους. Η επίπονη διαδικασία της απομόνωσης του ραδίου, όταν η ιστορία έγινε ευρύτερα γνωστή, έκανε το Βλαντιμίρ Μαγιακόβσκι να την παρομοιώσει με την ποίηση, όπου:

> ...για μια μόνο λέξη
> λιώνεις χιλιάδες τόννους
> γλωσσικό μετάλλευμα.

Οπωσδήποτε, ήταν μια δύσκολη εποχή για την έρευνα, χωρίς υποτροφίες ούτε οικονομική ενίσχυση για εξοπλισμό και αναλώσιμα. Η Μαρία εργαζόταν αμισθί και ο Πιερ είχε ένα μέτριο μισθό πανεπιστημιακού. Όλα τα έξοδα έπρεπε να πληρώνονται από το υστέρημά τους. Ο χώρος που τους είχε διατεθεί για εργαστήριο ήταν μια παράγκα με χωμάτινο δάπεδο. Όταν έβρεχε, έσταζε νερά και το χειμώνα η μικρή σόμπα δεν αρκούσε για να γλυκάνει την παγωνιά. Για καλή τους τύχη, όταν παράγγειλαν έναν τόννο πισσουρανίνη από τα ορυχεία της Βοημίας, η διεύθυνση της επιχείρησης τους τα διέθεσε δωρεάν και επιβαρύνθηκαν μόνο με τα μεταφορικά.

Η πάλι των χημικών με την ύλη έχει συνήθως μεταφορική έννοια, όμως στην περίπτωση της Μαντάμ Κιουρί επρόκειτο για κυριολεξία. Η τεράστια ποσότητα του μεταλλεύματος έπρεπε να υποστεί προκαταρκτική επεξεργασία από την ίδια, σε καζάνια που έστηνε στην αυλή του εργαστηρίου. Η χειρωνακτική εργασία ήταν κοπιώδης και κανονικά θα έπρεπε να γινόταν από εργάτη. Καθώς όμως δεν υπήρχε τρόπος να πληρωθεί προσωπικό, όλα περνούσαν από τα χέρια της. Αργότερα, όταν βελτιωθούν τα οικονομικά τους, θα προσλάβουν βοηθό με δικά τους έξοδα. Αξίζει να σημειωθεί εδώ η χειρονομία που έκανε η Μαντάμ Κιουρί μόλις κέρδισε τα πρώτα της χρήματα. Κατά τη διάρκεια των σπουδών της είχε μια μικρή υποτροφία από την Πολωνία. Επειδή την είχε θεωρήσει ως δάνειο τιμής, με την πρώτη ευκαιρία έσπευσε να επιστρέψει τα χρήματα, ώστε να επωφεληθεί κάποιος ακόμη φοιτητής.

Τα πρώτα αποτελέσματα και η ανακοίνωση της ανακάλυψης των νέων στοιχείων έγιναν με ελάχιστες ποσότητες που δεν ήταν καν ορατές. Όμως οι αποδείξεις της παρουσίας τους ήταν ακαταμάχητες και, σε αντίθεση με άλλες περιπτώσεις, δεν υπήρξαν αντιρρήσεις από την επιστημονική κοινότητα. Όταν επιτέλους, τέσσερα χρόνια αργότερα, έγινε η απομόνωση του ραδίου σε σχετικά μεγαλύτερες ποσότητες –ένα δέκατο του γραμμαρίου– μετρήθηκαν με ακρίβεια διάφορες ιδιότητές του. Για παράδειγμα, η ραδιενέργειά του ήταν δύο εκατομμύρια φορές ισχυρότερη από εκείνη του ουρανίου. Όπως συμβαίνει με όλα τα ραδιενεργά στοιχεία, το ράδιο κατά την παραμονή του εκλύει θερμότητα και μεταστοιχειώνεται σε άλλα ραδιενεργά στοιχεία, στα οποία συγκαταλέγεται και το πολύ επικίνδυνο αέριο ραδόνιο. Τελικά, μετά από αρκετά εκατομμύρια χρόνια, το ράδιο μετατρέπεται στο μη ραδιενεργό μόλυβδο.

Η αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας του ραδίου με την ύλη παράγει ενδιαφέροντα φαινόμενα, όπως την αποσύνθεση του νερού (ραδιόλυση) και το φωσφορισμό. Στην πρώτη από τις οκτώ βιογραφίες της Μαντάμ Κιουρί, γραμμένη από την κόρη της Εύα, αναφέρεται η ακόλουθη υποβλητική σκηνή. Μια νύχτα,

σπρωγμένοι από μια ακατανίκητη παρόρμηση, οι Κιουρί επισκέπτονται το εργαστήριό τους. Καθώς ανοίγουν την πόρτα, αντικρίζουν ένα μαγευτικό θέαμα: μέσα στο σκοτάδι, οι πολύτιμες ραδιούχες ουσίες τους, τοποθετημένες σε μπουκαλάκια, είναι αραδιασμένες πάνω σε ράφια και τραπέζια και λάμπουν οι φωσφορίζουσες γαλαζωπές σιλουέτες τους, μοιάζοντας σαν να αιωρούνται.

Ο φωσφορισμός του ραδίου γίνεται πιο έντονος, όταν η ακτινοβολία επιδράσει με ορισμένες κατάλληλες ουσίες. Στην αρχή αυτή βασίστηκαν τα ρολόγια με φωσφορίζοντες δείκτες. Η πιο ενδιαφέρουσα δράση του ραδίου ήταν όμως η καταστροφή από την έντονη ακτινοβολία του των ζωϊκών ιστών, με αυξημένη αποτελεσματικότητα για τα καρκινικά κύτταρα. Στις πρώτες θεραπείες του καρκίνου χρησιμοποιήθηκε ως πηγή ραδιενέργειας το ράδιο, προτού αντικατασταθεί από το πολύ φθηνότερο τεχνητό ραδιενεργό κοβάλτιο. Για κάποιο διάστημα είχαν κυκλοφορήσει και ραδιούχες κρέμες ως καλλυντικά! Δυστυχώς, εκτός από θεραπευτικό, το ράδιο είναι επίσης καρκινογόνο. Τον πρώτο καιρό δεν είχαν εκτιμηθεί σωστά οι κίνδυνοι από την ακτινοβολία, με αποτέλεσμα την πρόκληση καρκίνου σε πολλούς ερευνητές. Η Μαντάμ Κιουρί, η μεγαλύτερη κόρη της Ιρέν και άλλοι υπήρξαν θύματα αυτής της άγνοιας.

Η ολοκλήρωση της διδακτορικής διατριβής της Μαντάμ Κιουρί άργησε αρκετά, αφού ολοκληρώθηκε μόλις το 1903. Την ίδια όμως χρονιά τιμήθηκε με το βραβείο Νομπέλ Φυσικής μαζί με το σύζυγό της και τον Becquerel. Η αναπόφευκτη δημοσιότητα ήταν πολύ πιο έντονη από ό,τι ισχύει σήμερα και για ένα διάστημα επιβραδύνθηκαν οι ρυθμοί εργασίας τους. Η Μαρία παραπονιέται: «Οι τιμές και η δόξα έχουν εντελώς χαντακώσει τη ζωή μας», ενώ ο Πιερ είναι πιο απόλυτος: «Ονειρεύομαι έναν τόπο, όπου να απαγορεύονται οι διαλέξεις, και οι δημοσιογράφοι να είναι υπό διωγμό». Παρόλο που το δικαιούνται, αρνούνται να πάρουν δίπλωμα ευρεσιτεχνίας για τη διαδικασία απομόνωσης του ραδίου, επειδή πιστεύουν ότι αυτό θα ήταν αντίθετο προς το επιστημονικό πνεύμα.

Κάποτε τα φώτα της δημοσιότητας στρέφονται αλλού και οι Κιουρί μπορούν να συνεχίσουν απερίσπαστοι τις έρευνές τους, καθώς υπάρχουν πολλά ακόμη ενδιαφέροντα θέματα για διερεύνηση. Η Μαρία έχει τώρα διοριστεί επιμελήτρια και ο Πιερ έχει εκλεγεί καθηγητής. Ξαφνικά όμως έρχεται ο θάνατος, από μια άμαξα που παρασύρει τον Πιερ, το 1906. Ακολουθεί για τη Μαρία μια περίοδος περισυλλογής και αφοσίωσης στις κόρες της. Όταν της προτείνουν μια τιμητική σύνταξη αρνιέται, θα δεχθεί όμως την εκλογή της ως καθηγήτριας, στη θέση του Πιερ. Ήταν η πρώτη καθηγήτρια στη Γαλλία και ίσως σε όλο τον κόσμο. Από τη θέση αυτή θα συνεχίσει με τον ίδιο ζήλο τη διερεύνηση των ιδιοτήτων του ραδίου, ώστε σε λίγα χρόνια, το 1910, βραβεύεται και πάλι με το βραβείο Νομπέλ Χημείας γι' αυτές τις νέες έρευνες.

Εν τω μεταξύ, έχει συγκεντρώσει ένα ολόκληρο γραμμάριο ραδίου, που αποτελεί προσωπική της περιουσία. Παρόλο που η αξία του είναι τεράστια, και θα μπορούσε να το πουλήσει, δε διστάζει να το δωρίσει στο εργαστήριο. Αυτό το ράδιο θα καταλήξει στη συνέχεια στο Ινστιτούτο Ραδίου, ένα ίδρυμα με ερευνητικούς και θεραπευτικούς σκοπούς που ίδρυσε η Γαλλική κυβέρνηση, με διευθύντρια τη Μαντάμ Κιουρί. Τα χρόνια που ακολουθούν σημαδεύει ο Πρώτος Παγκόσμιος Πόλεμος. Η Μαντάμ Κιουρί είναι ήδη 47 ετών, αλλά στρατεύεται με ενθουσιασμό για την κοινή υπόθεση. Η εμπειρία της με τις ακτινοβολίες την κάνει να προβλέψει τη χρησιμότητα των ακτίνων Χ για διαγνωστικούς σκοπούς. Έτσι, οργανώνει κινητές μονάδες που επισκέπτονται τα νοσοκομεία στο μέτωπο, με συμμετοχή της ίδιας και της κόρης της Ιρέν. Ακόμη, θα δώσει στο κράτος τα χρήματα που της είχαν απομείνει από το δεύτερο βραβείο Νομπέλ για τις πολεμικές ανάγκες. Προσφέρει ακόμη και τα μετάλλιά της, αυτά όμως δε θα γίνουν δεκτά.

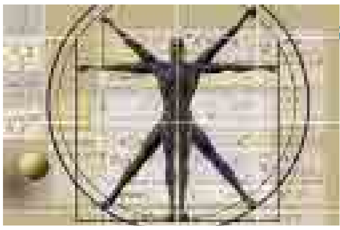
Ο πόλεμος κάποτε τελειώνει και οι έρευνες ξαναρχίζουν. Η Μαντάμ Κιουρί έχει τώρα αυξημένες διοικητικές ευθύνες, στις οποίες ανταποκρίνεται με επιτυχία. Η επιστημονική της δραστηριότητα βρίσκει απήχηση και στην Αμερική, όπου διοργανώνεται ένας μεγάλος έρανος για να δωρηθεί στο Ίδρυμα ένα γραμμάριο ραδίου. Ακολουθεί μια περιοδεία, κατά την οποία επισκέπτεται πολλές Αμερικανικές πόλεις και ανακηρύσσεται ευεργέτρια του ανθρώπινου γένους. Τους Αμερικανούς συγκινεί ιδιαίτερα η στάση ζωής της διάσημης επιστήμονος: η περιφρόνηση προς τη δύναμη του χρήματος και τα υλικά αγαθά, η αφοσίωση σε ένα πνευματικό πάθος, ο πόθος για την εξυπηρέτηση του συνόλου. Οι εκδηλώσεις λατρείας φθάνουν σε σημείο υστερίας, χωρίς η ίδια να επηρεαστεί, παρά μόνο να κουραστεί. Σε μερικές τελετές όπου αναγορεύεται επίτιμος διδάκτωρ δεν είναι σε θέση να παραστεί και αναλαμβάνει να την αντιπροσωπεύσει μια από τις κόρες της. Όπως θα έλεγε αργότερα ο Einstein, «η Μαντάμ Κιουρί είναι το μόνο από τα ένδοξα πλάσματα που η δόξα δεν έχει διαφθείρει».

Τα χρόνια που ακολούθησαν ήταν δημιουργικά, αλλά τα εξειδικευμένα επιστημονικά της επιτεύγματα δεν προσφέρονται για αναφορά. Οι τιμές συνεχίστηκαν και ήταν η πρώτη γυναίκα που εξελέγη Ακαδημαϊκός στη δύσκολη Γαλλική Ακαδημία, χωρίς μάλιστα να κάνει τις καθιερωμένες επισκέψεις στους εκλέκτορές της. Ο θάνατός της προήλθε από λευχαιμία, το 1934, σε ηλικία 67 ετών. Πριν λίγα χρόνια γνώρισε και μια μεταθανάτια τιμή: υπήρξε η πρώτη γυναίκα, τα οστά της οποίας μεταφέρθηκαν στο Πάνθεο, και βρίσκονται τώρα μαζί με εκείνα των επιφανέστερων Γάλλων. ◆

Η γαλλική κυβέρνηση τίμησε πρόσφατα το ζεύγος Κιουρί με τη έκδοση του παραπάνω χαρτονομίσματος των 500 φράγκων.

Η άλλη όψη του χαρτονομίσματος έχει επίσης χημικό χαρακτήρα.

Το άρθρο αυτό είναι μια συμπύκνωση από τη βιογραφία της Μαντάμ Κιουρί, που βρίσκεται στο βιβλίο του συγγραφέα «Μεγάλοι Χημικοί: Η Χρυσή Εποχή», Εκδόσεις ΖΗΤΗ



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΒΙΟΛΟΓΙΑΣ

Της **Ρ. Γκαντσίδου,** Βιολόγου

Ποιος ο Βιολογικός ρόλος των συμβιωτικών βακτηρίων;

Απάντηση:

- Σε ορισμένα ψάρια, όπως είναι το Photoblepharon συμβιούν φωσφορίζοντα βακτήρια στα οποία παρατηρείται το φαινόμενο του βιοφωτισμού.

Το φαινόμενο του βιοφωτισμού είναι σχετικό με την αερόβια κυτταρική αναπνοή. Στο βιοφωτισμό μέρος της ενέργειας που προέρχεται από την αερόβια αναπνοή χρησιμεύει για τη διέγερση κατάλληλου μορίου, το οποίο στη συνέχεια επανέρχεται στην κανονική του κατάσταση εκπέμποντας ένα φωτόνιο (κάτι δηλαδή ανάλογο με το χημειοφωσφορισμό).

Τα συμβιωτικά βακτήρια στο Photoblepharon βρίσκονται σε κατάλληλο «σακίδιο» κάτω απ' το μάτι. Το φωτεινό σήμα γίνεται ορατό στο περιβάλλον χάρη σ' ένα «βλέφαρο» που διαθέτει ο οργανισμός αυτός και το οποίο μπορεί να ανοιγοκλείνει κατά βούληση. Στο Photoblepharon αλλά και σ' άλλα ψάρια των βαθιών νερών, ο βιοφωτισμός μπορεί να παίξει ρόλο δολώματος καθώς το φωτεινό σήμα «βρίσκεται» σε σημείο κοντά στο στόμα τους οπότε προσελκύουν μ' αυτό τον τρόπο τη λεία τους. Αν και σε πολλές περιπτώσεις δεν γνωρίζουμε το ρόλου του, ο βιοφωτισμός συνήθως παίζει στις περισσότερες περιπτώσεις ρόλο αναγνώρισης, δολώματος ή προειδοποίησης.

- Η ανάπτυξη των φυτών εξαρτάται, εκτός των άλλων, και από την παροχή αζώτου από το έδαφος. Το άζωτο παρέχεται είτε σαν λίπασμα ή είναι προϊόν μικροβιακής λειτουργίας. Τα φυτά δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν κατευθείαν το άζωτο της ατμόσφαιρας. Ορισμένοι όμως μικροοργανισμοί έχουν την ικανότητα να δεσμεύουν το αέριο άζωτο σε χημικές ενώσεις που στη συνέχεια χρησιμοποιούνται από τα φυτά σαν πηγή αζώτου.

Τέτοια συμβιωτικά βακτήρια βρίσκονται στις ρίζες των ψυχανθών (φασόλια, φακές κ.ά.). Αυτοί οι μικροοργανισμοί, κατά συνέπεια εμπλουτίζουν το έδαφος, στο οποίο καλλιεργούνται, με το άζωτο της ατμόσφαιρας.

Γνωρίζοντας τα παραπάνω οι καλλιεργητές π.χ. σιτηρών, χρησιμοποιούν την αμειψισπορά, δηλαδή την εναλλαγή των καλλιεργούμενων φυτών, παρεμβάλλοντας στα σιτηρά ψυχανθή.

- Στον ανθρώπινο οργανισμό έχουν την παρουσία τους σε μόνιμη βάση μια πληθώρα μη παθογόντων μικροβίων. Αυτά ζουν συμβιωτικά έτσι ώστε να οφελούνται και τα ίδια και ο ξενιστής τους.

Τέτοιοι μικροοργανισμοί που ζουν είτε στο δέρμα είτε στις διάφορες κοιλότητες του σώματος π.χ. στο στόμα, στο παχύ έντερο, συμβάλλουν στην άμυνά του καθώς δρουν ανταγωγιστικά στην εγκατάσταση παθογόνων.

Ορισμένα βακτήρια π.χ. του παχέος εντέρου παράγουν προϊόντα χρήσιμα για τον οργανισμό στον οποίο συμβιούν π.χ. τη βιταμίνη Κ, ανεπάρκεια της οποίας οδηγεί στην αδυναμία του σώματος να φτιάξει προθρομβίνη. Η προθρομβίνη χρησιμοποιείται στην πήξη του αίματος και απουσία της προκαλεί αιμορραγίες.

Από την άλλη, τα ίδια τα βακτήρια οφελούνται γιατί βρίσκουν εύκολα τροφή καθώς και προστασία στο σώμα του ξενιστή.

- Για την καταπολέμηση μιας συγκεκριμένης αρρώστιας χρησιμοποιούνται οροί (π.χ. αντιτετανικός ορός) παρασκευάσματα δηλαδή που περιέχουν έτοιμα αντισώματα.

Τα αντισώματα που περιέχει ο αντιτετανικός ορός προέρχονταν από το αίμα αλόγων, στο σώμα των οποίων συμβιώνει το βακτήριο που προκαλεί τον τέτανο. (Σήμερα τα αντισώματα των ορών απομονώνονται από το ανθρώπινο αίμα).

Η χρήση των ορών δημιουργεί ένα είδος παθητικής ανοσίας μετά την προσβολή του από το συγκεκριμένο μικρόβιο-αντιγόνο.

Η προσκόλληση των αντισωμάτων πάνω στα αντιγόνα προκαλεί είτε την εξουδετέρωσή τους, είτε τη λύση τους ή διευκολύνει τη φαγοκυττάρωσή τους από τα φαγοκύτταρα του οργανισμού.

Ποια γονίδια ονομάζονται φυλοσύνδετα και τι γνωρίζετε για τον τρόπο κληρονόμησης αυτών των γονιδίων; Κάντε τις απαραίτητες διασταυρώσεις, δίνοντας ένα δικό σας παράδειγμα.

Απάντηση:

- Τα φυλετικά χρωμοσώματα Χ και Υ είναι ανισομεγέθη μεταξύ τους. Το Χ είναι μεγαλύτερο και το Υ μικρότερο. Αυτό σημαίνει ότι πολλά γονίδια που βρίσκονται στο Χ χρωμόσωμα δεν έχουν αλληλόμορφα στο Υ. Τα γονίδια που βρίσκονται στο Χ χρωμόσωμα και σ' εκείνη την περιοχή που δεν έχει αντίστοιχη στο Υ ονομάζονται φυλοσύνδετα και κληρονομούνται με διαφορετικό τρόπο απ' ό,τι τα γονίδα που βρίσκονται στα αυτοσώματα. Για τα φυλοσύνδετα γονίδια δεν ισχύουν οι νόμοι του Mendel.
- Έστω α ένα υπολειπόμενο φυλοσύνδετο γονίδιο στη Drosophila που καθορίζει το λευκό χρώμα των ματιών της, και Α το αντίστοιχο υπερέχων αλληλόμορφό του που καθορίζει το κόκκινο χρώμα.

α = λευκό χρώμα
Α = κόκκινο χρώμα

- Φυλοκαθορισμός στη Drosophila:
  Τα ♀ άτομα έχουν ΧΧ φυλετικά χρωμοσώματα.
  Τα ♂ άτομα έχουν ΧΥ φυλετικά χρωμοσώματα.
- Πιθανοί φαινότυποι και γονότυποι των ατόμων:

♀ κόκκινα	X^AX^A ή X^AX^a
♀ λευκά	X^aX^a
♂ κόκκινα	X^AY
♂ λευκά	X^aY (Το υπολειπόμενο φυλοσύνδετο γονίδιο α, επειδή δεν έχει αλληλόμορφο, συμπεριφερέται σαν επικρατές στα αρσενικά άτομα)

- Φυλοσύνδετη κληρονομικότητα:

Α

P: ♂X^aY (λευκά) × ♀X^AX^A (κόκκινα)

γαμέτες: X^a, Y — X^A

F_1: X^AX^a ♀ κόκκινα — X^AY ♂ κόκκινα

Διασταύρωση αρσενικού ατόμου με λευκά μάτια με ομόζυγο θηλυκό με κόκκινα μάτια στην F_1 γενιά θα δώσει όλα τα άτομα, αρσενικά και θηλυκά, με κόκκινα μάτια.

$(F_1\ F_1)P_1$: ♂X^AY (κόκκινα) — X^AX^a (κόκκινα)

γαμέτες: X^A, Y — X^A, X^a

F_2: X^AX^A ♀ κόκκινα — X^AX^a ♀ κόκκινα — X^AY ♂ κόκκινα — X^aY ♂ λευκά

Στην F_2 γενιά τα μεν θηλυκά θα έχουν κόκκινα μάτια ενώ τα αρσενικά, μισά θα έχουν κόκκινα και μισά λευκά μάτια.

Β

Αν από τα διασταυρούμενα άτομα το αρσενικό έχει κόκκινα μάτια και το θηλυκό λευκά τότε οι φαινότυποι στην F_1 και F_2 θα είναι τελείως διαφορετικοί.

P: ♂X^AY (κόκκινα) — ♀X^aX^a (λευκά)

γαμέτες: X^A, Y — X^a

F_1: X^AX^a ♀ κόκκινα — X^aY ♂ λευκά

Διασταύρωση αρσενικού ατόμου με κόκκινα μάτια με θηλυκό με λευκά μάτια στην F_1 γενιά θα δώσει όλα τα ♀ με κόκκινα μάτια και όλα τα ♂ με λευκά.

$(F_1\ F_1)P_1$: ♂X^aY (λευκά) — ♀X^AX^a (κόκκινα)

γαμέτες: X^a, Y — X^A, X^a

F_2: X^aX^A ♀ κόκκινα — X^aX^a ♀ λευκά — X^AY ♂ κόκκινα — X^aY ♂ λευκά

Στην F_2 γενιά τα θηλυκά θα έχουν τα μισά κόκκινα μάτια και τα μισά λευκά. Τα αρσενικά, επίσης, μισά θα έχουν κόκκινα και μισά θα έχουν λευκά.

Παρατήρηση:

Στην Α περίπτωση ο αρσενικός γονιός φέρει το φυλοσύνδετο υπολειπόμενο γονίδιο

Αρχικοί γονείς: **P:** ♂ υπολειπόμενο γνώρισμα — ♀ κυρίαρχο γνώρισμα

Στην Β περίπτωση ο θηλυκός γονιός φέρει το φυλοσύνδετο υπολειπόμενο γονίδιο, σε ομόζυγη κατάσταση.

Αρχικοί γονείς: **P:** ♂ κυρίαρχο γνώρισμα — ♀ υπολειπόμενο γνώρισμα

Αν το γνώρισμα ήταν αυτοσωμικό οι φαινότυποι των απογόνων στην Α και στη Β περίπτωση θα ήταν οι ίδιοι.

«ΕΚΘΕΣΗ-ΕΚΦΡΑΣΗ»
ΓΡΑΠΤΟΣ ΛΟΓΟΣ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Από την ομάδα δουλειάς του κ. **Χρ. Τσολάκη**

Α Λυκείου

Εντάσσω ένα γραπτό κείμενο στο επικοινωνιακό του πλαίσιο

Αρχίζω την «ανάγνωση» ενός κειμένου εντοπίζοντας τα στοιχεία της επικοινωνιακής του περίστασης: τον πομπό, το δέκτη, το σκοπό, το μέσο (προφ. ή γραπτός λόγος), τον τόπο, το χρόνο, τη γλωσσική ποικιλία, το είδος του λόγου (π.χ. διαφημιστικό κείμενο, που χρησιμοποιεί την περιγραφή και την πειθώ).

Ολοκληρώνω την «ανάγνωση», μετά τις επιμέρους εργασίες, με τη συνολική θεώρηση και την αξιολόγηση του κειμένου, λαμβάνοντας πάντοτε υπόψη τις παραμέτρους της επικοινωνίας.

Ι. ΔΙΑΒΑΖΩ

1. Περιεχόμενο

Επισημαίνω (και κατανοώ):
- τα όρια της γλώσσας και τη δημιουργικότητά της,
- τις γλωσσικές ποικιλίες και τη διαφορετική χρήση τους,
- τις ιδιαιτερότητες του γραπτού και του προφορικού λόγου,
- τις παραμέτρους του διαλόγου και τα είδη του,
- τα στοιχεία του περιγραφόμενου «αντικειμένου» και την όργάνωσή τους,
- την οπτική γωνία και το σχόλιο στην περιγραφή,
- τα βασικά στοιχεία της αφήγησης (τόπος, χρόνος, πρόσωπα, αίτια και συνέπειες ενός συμβάντος),
- τα διάφορα αφηγηματικά είδη, το αφηγηματικό περιεχόμενο και την αφηγηματική πράξη, τους αφηγηματικούς τρόπους, την οπτική γωνία στην αφήγηση.

2. Οργάνωση του λόγου

- Εντοπίζω τα βασικά μέρη (πρόλογος-κύριο μέρος-επίλογος) και τις νοηματικές ενότητες του κειμένου,
- δίνω πλαγιότιτλους στις παραγράφους ή στις νοηματικές ενότητες,
- επισημαίνω τη λογική διάρθρωση του κειμένου και κάνω το διάγραμμα,
- σχολιάζω τη συνοχή του κειμένου (διαρθρωτικές λέξεις),
- επισημαίνω την οργάνωση του λόγου με αιτιολόγηση και με αναλογία.

3. Σύνταξη

Επισημαίνω και δικαιολογώ την επιλογή: στην ενεργητική / παθητική σύνταξη, στο ρηματικό χρόνο / πρόσωπο / έγκλιση, στο μακροπερίοδο ή όχι λόγο, στον παρατατικό ή υποτακτικό λόγο, στα ονοματικά ή ρηματικά σύνολα, στα σημεία της στίξης.

4. Λεξιλόγιο και διατύπωση

- Ερμηνεύω λέξεις, αντικαθιστώ με συνώνυμα, βρίσκω αντώνυμα,
- εντοπίζω τις προτιμήσεις σε λόγιες ή λαϊκές λέξεις, σε κυριολεκτική ή μεταφορική χρήση της γλώσσας, σε ειδικό λεξιλόγιο, όρους κ.τ.λ.
- Αξιολογώ την ακρίβεια και τη σαφήνεια του λεξιλογίου.

5. Ύφος

Χαρακτηρίζω το ύφος του κειμένου με βάση τα στοιχεία του κειμένου (σύνταξη, οργάνωση, λεξιλόγιο, ακρίβεια, σαφήνεια κ.τ.λ.), και με βάση τα στοιχεία της επικοινωνιακής περίστασης (πομπός, δέκτης, σκοπός, είδος του λόγου κ.τ.λ.).

ΙΙ. ΓΡΑΦΩ

Α. Με βάση ένα συγκεκριμένο κείμενο

1. Περιεχόμενο

- Γράφω μία περίληψη,
- αναπτύσσω μια φράση, μία παράγραφο ένα επιχείρημα κ.τ.λ.,
- μετασχηματίζω ένα κείμενο (παραμένει, δηλαδή, το ίδιο περιεχόμενο, αλλά μεταβάλλεται το είδος λόγου ή/και τα υπόλοιπα στοιχεία της επικοινωνιακής περίστασης), π.χ. ενότητα «Γλώσσα και γλωσσικές ποικιλίες», ασκήσεις σ. 79, 80, 91 κ.τ.λ.· εν. «Λόγος», ασκήσεις σ. 16, 18, 34 κ.τ.λ.· εν. «Περιγραφή» σ. 13, 17, 48 κ.τ.λ.· εν. «Αφήγηση» σ. 6, 8, 18, 30 κ.τ.λ.

2. Οργάνωση του λόγου

- Χωρίζω το κείμενο σε παραγράφους,
- συμπληρώνω μεταβατικές λέξεις, τακτοποιώ τη συνοχή του κειμένου,
- αναπτύσσω ένα κείμενο με κάποια από τις μεθόδους ανάπτυξης (αιτιολόγηση, αναλογία κ.τ.λ.).

3. Σύνταξη

- Μετατρέπω τη σύνταξη: την ενεργητική φωνή σε

παθητική ή το αντίστροφο, την έγκλιση, το χρόνο, το ρημ. πρόσωπο κ.τ.λ., λαμβάνοντας υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση,
– συμπληρώνω τη στίξη.

4. Λεξιλόγιο

– Συμπληρώνω κενά, κάνω αντιστοιχίες στη σημασία των λέξεων, κλιμακώνω τις λέξεις ανάλογα με τη σημασία τους κ.τ.λ.,
– σχηματίζω φράσεις με ορισμένες λέξεις, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο γλωσσικό πλαίσιο,
– επιλέγω και χρησιμοποιώ το κατάλληλο λεξιλόγιο για ένα συγκεκριμένο κείμενο, λαμβάνοντας υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση.

5. ΄Υφος

Μεταβάλλω / μετασχηματίζω το ύφος ενός κειμένου ανάλογα με την επικοινωνιακή περίσταση.

Β. Ελεύθερη ανάπτυξη ενός θέματος

(Λαμβάνοντας πάντοτε υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση):
α) με κάποιους περιορισμούς (ως προς την έκταση, το λεξιλόγιο κ.τ.λ.),
β) χωρίς κανένα περιορισμό.

Ενδεικτικά δίνονται τα παρακάτω **είδη του λόγου**, τα οποία καλούνται οι μαθητές να παραγάγουν στις διάφορες ενότητες του βιβλίου:
- μία αίτηση
- πρόσκληση
- ανακοίνωση σε εφημερίδα / περιοδικό
- αναφορά
- επιστολή σε επίσημο / φιλικό πρόσωπο
- ένα απολογισμό μιας εκδήλωσης, μιας συνεδρίασης κ.τ.λ.
- μία μήνυση
- αγγελία στο δικαστήριο
- διαφήμιση
- ένα διαφημιστικό φυλλάδιο
- (απλό) κείμενο με επιστημονικό ύφος
- μια εισήγηση σε ένα συγκεκριμένο θέμα
- ένα άρθρο όπου εκθέτω και αιτιολογώ τις απόψεις μου*

Β Λυκείου

Ι. ΔΙΑΒΑΖΩ

1. Περιεχόμενο

Εντοπίζω (και κατανοώ):
– το σχόλιο και το γεγονός σε μια είδηση,
– τον τρόπο με τον οποίο οργανώνεται η είδηση,
– την οπτική γωνία του δημοσιογράφου,
– τα διάφορα βιογραφικά είδη,
– το γεγονός και το σχόλιο (άμεσο ή έμμεσο) στα είδη αυτά,
– την οπτική γωνία του πομπού στα βιογραφικά είδη,
– τη διαφορά ανάμεσα στην παρουσίαση και την κριτική,
– τα συστατικά στοιχεία της παρουσίασης-κριτικής,
– τα διάφορα είδη της παρουσίασης-κριτικής (θεάτρου, βιβλίου, κινηματογράφου, μουσικής, εκδηλώσεων κ.τ.λ.),
– τα κύρια σημεία και τη λογική διάρθρωση ενός κειμένου,
– τη διαδικασία που ακολουθείται για τις σημειώσεις, το διάγραμμα και την περίληψη (από γραπτό και προφορικό λόγο).

2. Οργάνωση του λόγου

– Εντοπίζω τα βασικά μέρη (πρόλογος, κύριο μέρος, επίλογος) και τις νοηματικές ενότητες του κειμένου,
– δίνω πλαγιότιτλους στις παραγράφους ή στις νοηματικές ενότητες,
– επισημαίνω τη λογική διάρθρωση του κειμένου και κάνω το διάγραμμα,
– σχολιάζω τη συνοχή του κειμένου (διαρθρωτικές λέξεις),
– επισημαίνω την οργάνωση του λόγου με σύγκριση, αντίθεση, ορισμό, διαίρεση, παράδειγμα.

3. Σύνταξη

Εντοπίζω και αιτιολογώ την επιλογή (του πομπού):
– στην ενεργητική ή παθητική φωνή, στο ρηματικό / χρόνο / έγκλιση, στον μακροπερίοδο, ή όχι, λόγο, στην παράταξη στα ονοματικά ή ρηματικά σύνολα,
– στα σημεία της στίξης.

4. Λεξιλόγιο και διατύπωση

– Ερμηνεύω τις λέξεις, αντικαθιστώ με συνώνυμα, βρίσκω αντώνυμα,
– εντοπίζω την προτίμηση του πομπού σε λόγιες ή λαϊκές λέξεις, στην κυριολεκτική ή μεταφορική χρήση της γλώσσας, σε ειδικό λεξιλόγιο, όρους κ.τ.λ.,
– αξιολογώ την ακρίβεια και τη σαφήνεια του λεξιλογίου.

5. ΄Υφος

Χαρακτηρίζω το ύφος του κειμένου με βάση:
– τα στοιχεία του κειμένου (σύνταξη, λεξιλόγιο, οργάνωση, σαφήνεια, ακρίβεια, κ.τ.λ.),
– τα στοιχεία της επικοινωνιακής περίστασης (το δέκτη, το σκοπό, το είδος λόγου κ.τ.λ.).

* Ιδιαίτερη σημασία δίνεται σε τέτοια κείμενα, όπου οι μαθητές εκθέτουν και αιτιολογούν, με την κατάλληλη επιχειρηματολογία, τις απόψεις τους για ένα θέμα. Τα κείμενα αυτά μπορούν να πάρουν, για παράδειγμα, τη μορφή άρθρων σε σχολική εφημερίδα.

ΙΙ. ΓΡΑΦΩ

Α. Με βάση ένα συγκεκριμένο κείμενο

1. Περιεχόμενο

– Απομονώνω το καίριο και το ουσιώδες από ένα κείμενο και το καταγράφω με τρόπο κατάλληλο και προσωπικό, κρατώ, δηλαδή, σημειώσεις από ένα κείμενο ή/και κάνω μία περίληψη του κειμένου,
– κάνω το διάγραμμα ενός κειμένου,
– αναπτύσσω μια φράση, μία παράγραφο, ένα επιχείρημα από ένα κείμενο,
– μετασχηματίζω ένα κείμενο (παραμένει το ίδιο περιεχόμενο, αλλά μεταβάλλεται το είδος λόγου ή/και τα υπόλοιπα στοιχεία της επικοινωνιακής περίστασης).

2. Οργάνωση του λόγου

– Χωρίζω το κείμενο σε παραγράφους,
– συμπληρώνω τις διαρθρωτικές λέξεις - τακτοποιώ τη συνοχή του κειμένου,
– αναπτύσσω ένα κείμενο με κάποια από τις μεθόδους ανάπτυξης (παράδειγμα, αντίθεση, ορισμό, διαίρεση κ.τ.λ.).

3. Σύνταξη

– μετατρέπω τη σύνταξη (από ενεργητική σε παθητική φωνή ή το αντίθετο, από παράταξη σε υπόταξη), αλλάζω την έγκλιση, το χρόνο, το ρηματικό πρόσωπο κ.τ.λ., λαμβάνοντας υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση,
– συμπληρώνω τη στίξη.

4. Λεξιλόγιο

– Συμπληρώνω τα κενά, κάνω αντιστοιχίες στις λέξεις ως προς τη σημασία τους, κλιμακώνω τη σημασία των λέξεων,
– σχηματίζω φράσεις με ορισμένες λέξεις χρησιμοποιώντας το κατάλληλο γλωσσικό πλαίσιο,
– επιλέγω και χρησιμοποιώ το κατάλληλο λεξιλόγιο για ένα συγκεκριμένο κείμενο, λαμβάνοντας υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση.

5. Ύφος

Μετατρέπω το ύφος ανάλογα με την επικοινωνιακή περίσταση.

Β. Ελεύθερη ανάπτυξη ενός θέματος

(Λαμβάνοντας πάντοτε υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση):

α) με κάποιους περιορισμούς (ως προς την έκταση, το λεξιλόγιο κ.τ.λ.),

β) χωρίς κανένα περιορισμό γράφω:

- μια σύντομη αφήγηση σχετικά με την επικαιρότητα, με βάση το μοντέλο της δημοσιογραφικής είδησης, τη σχολιάζω
  π.χ. μια είδηση με ποικίλο περιεχόμενο
- σχολιάζω ένα γεγονός της επικαιρότητας σε εκτεταμένο κείμενο
  π.χ. ένα άρθρο σε σχολική εφημερίδα
- ένα κείμενο που να εξωτερικεύει τις σκέψεις και τα συναισθήματά μου
  π.χ. σελίδες ημερολογίου
- ένα κείμενο στο οποίο περιγράφω τον εαυτό μου ή «συστήνω» κάποιο άλλο πρόσωπο λαμβάνοντας υπόψη το σκοπό για τον οποίο γράφω το κείμενο και το δέκτη στον οποίο το απευθύνω
  π.χ. ένα (αυτο)βιογραφικό σημείωμα, την αυτοαξιολόγησή σου, μια συστατική επιστολή
- ένα κείμενο στο οποίο παρουσιάζω / ασκώ κριτική σε κάποιο «αντικείμενο» (βιβλίο, θέατρο, κινηματογράφο, μουσική κ.τ.λ.) χρησιμοποιώντας το κατάλληλο ύφος και φροντίζοντας για την αποτελεσματικότητα του κειμένου
  π.χ. μία παρουσίαση / κριτική βιβλίου, θεατρικής παράστασης, κινηματογραφικού έργου, δίσκου μουσικής, διαφόρων εκδηλώσεων κ.τ.λ.
- ένα κείμενο στο οποίο εκθέτω και αιτιολογώ τις απόψεις μου για ένα θέμα
  π.χ. ένα άρθρο σε σχολικό περιοδικό.

Γ Λυκείου

Εντάσσω ένα γραπτό κείμενο στο επικοινωνιακό πλαίσιο

Αρχίζω την «ανάγνωση» ενός κειμένου εντοπίζοντας τα στοιχεία της επικοινωνιακής του περίστασης: τον πομπό, το δέκτη, το σκοπό, το μέσο (προφ. ή γραπτός λόγος), τον τόπο, το χρόνο, τη γλωσσική ποικιλία, το είδος του λόγου (π.χ. διαφημιστικό κείμενο, που χρησιμοποιεί την περιγραφή και την πειθώ).

Ολοκληρώνω την «ανάγνωση», μετά τις επιμέρους εργασίες, με τη συνολική θεώρηση και την αξιολόγηση του κειμένου, λαμβάνοντας πάντοτε υπόψη τις παραμέτρους της επικοινωνίας.

Ι. ΔΙΑΒΑΖΩ

1. Περιεχόμενο

– Εντοπίζω το θέμα, τη θέση του συγγραφέα, το αποδεικτικό υλικό (επιχειρήματα, τεκμήρια κ.τ.λ. με τα οποία υποστηρίζεται η θέση), το συμπέρασμα,
– αναλύω τους τρόπους και τα μέσα πειθούς και τα αξιολογώ ως προς την πειστικότητά τους.

2. Οργάνωση

– Εντοπίζω τα βασικά μέρη (πρόλογος - κύριο μέρος - επίλογος) και τις νοηματικές ενότητες του κειμένου,
– δίνω πλαγιότιτλους στις παραγράφους ή στις νοη-

ματικές ενότητες,
- επισημαίνω τη λογική διάρθρωση του κειμένου και κάνω το διάγραμμα,
- σχολιάζω τη συνοχή του κειμένου (διαρθρωτικές λέξεις),
- επισημαίνω την οργάνωση του κειμένου / παραγράφου με αιτιολόγηση, αντίθεση, ορισμό, διαίρεση κ.τ.λ.

3. Σύνταξη

Επισημαίνω και αιτιολογώ την προτίμηση:
- σε ενεργητική / παθητική σύνταξη, σε ρηματικό χρόνο / πρόσωπο / έγκλιση, σε μακροπερίοδο, ή όχι, λόγο, σε παρατακτικό ή υποτακτικό λόγο, σε ονοματικά ή ρηματικά σύνολα,
- σε σημεία στίξης.

4. Λεξιλόγιο και διατύπωση

- Ερμηνεύω λέξεις, αντικαθιστώ με συνώνυμα, βρίσκω αντώνυμα,
- εντοπίζω τις προτιμήσεις σε λόγιες ή λαϊκές λέξεις, σε κυριολεκτική ή μεταφορική χρήση της γλώσσας, σε ειδικό λεξιλόγιο, όρους κ.τ.λ.,
- αξιολογώ την ακρίβεια και τη σαφήνεια του λεξιλογίου,
- εντοπίζω τον τόνο (ήπιο, απόλυτο, ουδέτερο, εχθρικό, δογματικό, διαλεκτικό κ.τ.λ.) του κειμένου.

5. ΄Υφος

Χαρακτηρίζω το ύφος του κειμένου:
- με βάση τα στοιχεία του κειμένου (σύνταξη, οργάνωση, λεξιλόγιο, ακρίβεια, σαφήνεια, τόνος του κειμένου κ.τ.λ.),
- με βάση τα στοιχεία της επικοινωνιακής περίστασης (πομπός, δέκτης, σκοπός, είδος, λόγου κ.τ.λ.).

ΙΙ. ΓΡΑΦΩ

Α. Με βάση ένα συγκεκριμένο κείμενο

1. Περιεχόμενο

- Γράφω μια περίληψη,
- αναπτύσσω μια φράση, μία παράγραφο, ένα επιχείρημα κ.τ.λ.,
- μετασχηματίζω ένα κείμενο (παραμένει, δηλαδή, το ίδιο περιεχόμενο, αλλά μεταβάλλεται το είδος λόγου ή/και τα υπόλοιπα στοιχεία της επικοινωνιακής περίστασης),
- αναπτύσσω την αντίθετη άποψη από αυτήν του συγγραφέα,
- αναπτύσσω τα υπέρ και τα κατά μιας άποψης και καταλήγω σε σύνθεση.

2. Οργάνωση του λόγου

- Χωρίζω το κείμενο σε παραγράφους,
- συμπληρώνω μεταβατικές λέξεις - τακτοποιώ τη συνοχή του κειμένου,
- αναπτύσσω ένα κείμενο με κάποια από τις μεθόδους ανάπτυξης (αιτιολόγηση, αντίθεση κ.τ.λ.).

3. Σύνταξη

- Μετατρέπω τη σύνταξη: την ενεργητική φωνή σε παθητική ή το αντίστροφο, την έγκλιση, το χρόνο, το ρηματικό πρόσωπο κ.τ.λ., λαμβάνοντας υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση,
- συμπληρώνω τη στίξη.

4. Λεξιλόγιο

- Συμπληρώνω κενά, κάνω αντιστοιχίες στη σημασία των λέξεων,
- κλιμακώνω τις λέξεις ανάλογα με τη σημασία τους κ.τ.λ.,
- σχηματίζω φράσεις με ορισμένες λέξεις, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλο γλωσσικό πλαίσιο,
- επιλέγω και χρησιμοποιώ το κατάλληλο λεξιλόγιο για ένα συγκεκριμένο κείμενο, λαμβάνοντας υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση.

5. ΄Υφος

Μεταβάλλω το ύφος ενός κειμένου ανάλογα με την επικοινωνιακή περίσταση.

Β. Ελεύθερη ανάπτυξη ενός θέματος

(Λαμβάνοντας πάντοτε υπόψη την επικοινωνιακή περίσταση):

α) με κάποιους περιορισμούς (ως προς την έκταση, το λεξιλόγιο κ.τ.λ.),

β) χωρίς κανένα περιορισμό γράφω διάφορα κείμενα, σύντομα ή εκτενέστερα, με σκοπό να πείσω προσέχοντας το είδος των επιχειρημάτων που χρησιμοποιώ και την εγκυρότητά τους:

π.χ. • κάνω μια «εκστρατεία» για την ενημέρωση του κοινού σ' ένα ζωτικό θέμα • βρίσκω, ως συνήγορος, τα επιχειρήματα, για να υπερασπίσω τον κατηγορούμενο • πείθω, με την ιδιότητα του πολιτικού σε ένα εμπόλεμο κράτος τους συμπολίτες μου να δεχτούν την ειρήνη • κάνω μία στοιχειώδη έρευνα και παρουσιάζω τα πορίσματα, τεκμηριωμένα, σε ένα απλό επιστημονικό κείμενο • γράφω (απλά) κείμενα με δοκιμιακή μορφή, κυρίως με τη μορφή αποδεικτικού δοκιμίου κ.ο.κ.

Ερωτήσεις

- Διατυπώστε με δικά σας λόγια το σκοπό για τον οποίο γράφτηκε το δοκίμιο.
- Δώστε έναν πλαγιότιτλο σε καθένα από τα δομικά τμήματα του κειμένου.
- Δώστε το διάγραμμα του δοκιμίου.

- Παρουσίασε την αποδεικτική διαδικασία του δοκιμίου: πείθει; δεν πείθει;
- Παρουσίασε τη δική σου θέση τεκμηριωμένη.
- Υποστήριξε την αντίθετη θέση από εκείνη του συγγραφέα.
- Παρουσίασε το θέμα (Χ) τονίζοντας και τις δύο πλευρές ως ουδέτερος αναλυτής.
- Παρακολούθησε μέσα στο δοκίμιο την κλιμάκωση των επιχειρημάτων· η πορεία τους είναι τα ασθενέστερα στα ισχυρότερα; αντίστροφη; κάποια άλλη;
- Έχει το δοκίμιο / η παράγραφος ενότητα; Δηλαδή σχετίζονται όλες οι προτάσεις του/της με την κύρια ιδέα; Μήπως μεσολαβούν άσχετες παρεμβάσεις/παρενθέσεις;
- Πώς αναπτύσσεται η παράγραφος (Χ): με λεπτομέρειες, με επεξήγηση, με αιτιολόγηση, με ορισμό, με διαίρεση, με σύγκριση και αντίθεση, με αναλογία, με συνδυασμό κάποιων από τις παραπάνω μεθόδους;
- Γράψε πάλι την παράγραφο (α) χρησιμοποιώντας διαφορετικό τρόπο ανάπτυξης.
- Γράψε πάλι την παράγραφο χρησιμοποιώντας όσο μπορείς λιγότερες –τις πιο απαραίτητες– λέξεις.
- Ξαναπλάσε την παράγραφο αρχίζοντας από την κατακλείδα.
- Ανάλυσε το ρόλο της παραγράφου (Χ)

  α) Ποια ανάγκη εξυπηρετεί;

  β) Πώς λειτουργεί μέσα στο δοκίμιο;

  γ) Ποια είναι η δομή της;

  δ) Υποστήριξε τα αντίθετα από εκείνα που αναπτύσσονται στην παράγραφο.
- Έχει η παράγραφος (Χ) συνοχή; Οι λεπτομέρειές της κατατάσσονται μέσα στο χρόνο; μέσα στο χώρο; ή ακολουθούν συλλογιστική πορεία; Το τελευταίο σημαίνει: α) ο συγγραφέας αρχίζει με μια γενική κρίση και έπειτα προσκομίζει τις λεπτομέρειες (παραγωγή)· β) ο συγγραφέας ξεκινάει από τα επιμέρους και ύστερα δίνει το συμπέρασμα (επαγωγή)· γ) ο συγγραφέας συμπεραίνει από κάτι το μερικό για άλλο επίσης μερικό (αναλογία).
- Αναζήτησε και αξιολόγησε τις μεταβατικές λέξεις και φράσεις που βρίσκονται μέσα σε μια παράγραφο ή που μεταβιβάζουν από τη μια παράγραφο στην άλλη.
- Σημείωσε λέξεις και φράσεις του δοκιμίου που προέρχονται από τη λόγια παράδοση. Χρησιμοποίησε σε φράσεις όσο μπορείς περισσότερες από αυτές.
- Να αντικαταστήσεις στη (Χ) παράγραφο τις παρακάτω λέξεις με άλλες συνώνυμες.
- Σημείωσε τις λέξεις ή τις φράσεις του δοκιμίου που χρησιμοποιούνται συνυποδηλωτικά (μεταφορικά).
- Σημείωσε τις ειδικές λέξεις (ειδικό λεξιλόγιο) με τις οποίες πλέκεται ο εννοιολογικός ιστός του δοκιμίου.
- Γράψε πάλι τον πρόλογο: α) σε πιο ήπιο και β) σε απόλυτο τόνο.
- Επισήμανε χωρία του κειμένου που δηλώνουν τη δογματικότητα ή τη διαλεκτικότητα του δοκιμίου.
- Μελέτησε το ύφος του δοκιμίου και σημείωσε, αν έχει κοινοτοπίες, πλατειασμούς, επαναλήψεις, σωφρονιστικά συμπεράσματα κ.τ.λ.
- Προσπάθησε να διακρίνεις αν επικρατεί στο δοκίμιο η λογική χρήση της γλώσσας ή η συγκινησιακή. Τεκμηρίωσε την άποψή σου με παραδείγματα.
- Ζήτησε τις λέξεις και τις φράσεις του κειμένου που έχουν συγκινησιακό ή επιστημονικό τόνο.

ΓΡΑΠΤΟΣ ΛΟΓΟΣ

Αξιολόγηση: Τι ζητούμε από ένα «καλό» κείμενο;

Ως προς το περιεχόμενο

- πληρότητα, δηλ. επαρκή ανάπτυξη του θέματος σε όλο του το βάθος και το πλάτος,
- ενότητα, δηλ. άμεση σχέση του περιεχομένου με το θέμα,
- τεκμηρίωση των θέσεων με πειστικά και ορθά επιχειρήματα,
- πρωτοτυπία ιδεών.

Ως προς τη διάρθρωση των σκέψεων/την αρχιτεκτονική του κειμένου

- λογική αλληλουχία των νοημάτων,
- συνοχή του κειμένου,
- πειστική κατάταξη των επιχειρημάτων σε κλιμακωτή μορφή,
- αποτελεσματική διάκριση των παραγράφων,
- προσωπικό στυλ.

Ως προς τη χρήση της γλώσσας

- σαφήνεια,
- ακρίβεια,
- λεκτικό - εκφραστικό πλούτο,
- τήρηση των γραμματικοσυντακτικών κανόνων,
- σωστή χρήση των σημείων της στίξης,
- κατάλληλο ύφος για το συγκεκριμένο κείμενο.

Ως προς την επικοινωνιακή περίσταση

- επίγνωση του σκοπού για τον οποίο γράφεται το κείμενο και ανταπόκριση σ' αυτόν,
- γνώση των αναγκών του ακροατηρίου (δέκτη) και ανταπόκριση σ' αυτές,
- αποτελεσματικότητα του κειμένου (= να λειτουργεί αποτελεσματικά μέσα στη συγκεκριμένη επικοινωνιακή περίσταση).

Όλες οι παραπάνω παράμετροι θα πρέπει, επομένως, να λαμβάνονται υπόψη, όταν αξιολογούμε ένα γραπτό κείμενο. Ας προσεχθούν ιδιαίτερα οι παράμετροι της **καταλληλότητας του ύφους**, της **αποτελεσματικότητας** του κειμένου και της **επίγνωσης του σκοπού** για τον οποίο γράφεται το κείμενο, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τη μέθοδο της επικοινωνιακής προσέγγισης.

ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΔΙΧΡΟΝΑ ΤΩΝ ΡΗΜΑΤΩΝ*

Του **Δ. Πασχαλίδη,** Φιλολόγου

1) Τα δίχρονα **α, ι, υ** στις καταλήξεις των ρημάτων είναι βραχέα:
π.χ. *ἔλυσᾰν*, *ἦρᾰν*.

Εξαίρεση: Η κατάληξη **–ας** της μετοχής αρσενικού γένους έχει το **α** μακρό από αντέκταση:
λύσᾰντ–ς > λύσᾱς, ἱστᾰ́ντ–ς > ἱστᾱ́ς.

Το **–α** είναι μακρό, όταν προέρχεται από συναίρεση: *τίμᾱ* (< *τίμα-ε*), *τιμᾶν* (< *τιμά-ειν*).

2) Τα ρήματα σε –ύω έχουν το ῡ μακρό:
λύω, λῦε, λῦσον,
δύω, δῦε, τὸ δῦον
έτσι και: *δακρύω, ἐξαρτύω, θύω, ἱδρύω, ἰσχύω, κωλύω, μηνύω, μύω, φύω.*

Εξαιρέσεις: Έχουν το **υ:**

α) Πάντοτε βραχύ: *βρύω, κλύω.*

β) Βραχύ (**ῠ**), όταν η συλλαβή πριν από αυτό είναι βραχύχρονη:
ἀνύω ή *ἀνύτω*, *ἀρύω* ή *ἀρύτω*, *μεθύω, τανύω.*

γ) Βραχύ (**ῠ**), όταν έχουν παράλληλους τύπους σε **–υμι:**
δεικνῠ́ω (*δείκνῡμι*), *μειγνῠ́ω* (*μείγνῡμι*), *ὀλλῠ́ω* (*ὄλλῡμι*).

3) Τα ρήματα ***θύω*** και ***λύω*** έχω το **ῡ** (μακρό), στον ενεστώτα και παρατατικό και μπροστά από το ***σ*** της κατάληξης: *θύσω, λύσω, ἔθυσα, ἔλυσα, ἐλυσάμην* (**ῡ**) κτλ. Μπροστά από άλλο σύμφωνο το **υ** είναι βραχύ (*ῠ*): *τέθῠκα, τέθῠμαι, ἐτεθῠ́μην, τῠθήσομαι, ἐτῠ́θην, λέλῠκα, λέλῠμαι, ἐλελῠ́μην* κτλ.

4) Το ρήμα ***δύω*** έχει το **υ** μακρό (*ῡ*) παντού εκτός από το μέσο παρακείμενο και υπερσυντέλικο και τον παθητικό μέλλοντα και αόριστο (*ῠ*):
δῡ́ω, ἔδῡον, δῡ́σω, ἔδῡσα, ἔδῡν, δέδῡκα, ἐδεδῡ́κειν.
αλλά: *δέδῠμαι, δῠθήσομαι, ἐδῠ́θην.*

5) Τα ρήματα σε **–ζω** έχουν το δίχρονο της παραλήγουσας βραχύ:
νομῐ́ζω, νενομῐ́σθαι, τὸ κομῐ́ζον κτλ.

Εξαιρούνται: όσα ρήματα δηλώνουν ήχο ή κραυγή:
φράζω, κράζω, ὀλολύζω, τρίζω, σίζω, γρύζω, ἐλελίζω, κτλ. (**ᾱ**, *ῡ*, **ῑ**) π.χ. κρᾶξαι (απαρ.), *τὸ τρῖζον*.

6) Τα ρήματα που λήγουν σε **(–ττω)** έχουν το δίχρονο της παραλήγουσας βραχύ:
πχ. *τὸ τᾰ́ττον, τᾰ́ττε, τετᾰ́χθαι.*

Εξαιρούνται: έχουν την παραλήγουσα μακρά τα ρήματα *πράττω, κηρύττω, φρίττω, θράττω* (**ᾱ**, *ῡ*,**ῑ**):
Π.χ. *τὸ πρᾶττον, πρᾶττε, πεπρᾶχθαι, τὸ κηρῦττον, τὸ κηρῦξαν, κεκηρῦχθαι* κτλ.

7) Τα ρήματα που λήγουν σε **(–πτω)** έχουν το δίχρονο της παραλήγουσας βραχύ:
π.χ.*θάπτομαι – τεθᾰ́φθαι, τὸ θάπτον, θάπτε, ἅπτε, τὸ ἅπτον, ἅψον, ἅψαι* (απαρ.)

Εξαιρούνται: Τα ρήματα *πίπτω, ῥίπτω, νίπτω, κύπτω*, που έχουν την παραλήγουσα μακρά (**ῑ**, *ῡ*):
π.χ. *πῖπτε, τὸ πῖπτον, ἐρρῖφθαι, κῦψαι* (απαρ.).

8) Τα ρήματα σε **(–ιω)** έχουν το **ι** άλλοτε βραχύ (*ἐσθῐ́ω, τῐ́ω, φθῐ́ω, ἀτῐ́ω, μαστῐ́ω* κ.ά.) και άλλοτε μακρό (*πρίω, χρίω, κυλίω, μηνίω* κ.ά.).

Σημ. Στην ΓΑΕ του Μ. Οικονόμου αναφέρεται ότι το *τίω* έχει το (**ῑ**) (§285).

9) Τα ρήματα που λήγουν σε **–ινω, –υνω, –ιρω** και **–υρω*** έχουν το δίχρονο της παραλήγουσας μακρό στον ενεστώτα, παρατατικό και αόριστο ενεργητικό και μέσης φωνής:
π.χ. *κρῖνε, σῦρε, τὸ κρῖνον*, (απαρ.) *κρῖναι, ἀμῦναι, ὀξῦναι*, **αλλά**: *κεκρίσθαι* (**ῐ**), *ὠξύνθαι* (**ῠ**) (παρακείμενος).

* Απόσπασμα από το νέο βιβλίο του Δ. Πασχαλίδη, «Γραμματική της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσας - Θεωρία και Ασκήσεις», *Εκδόσεις ΖΗΤΗ.*

Εξαίρεση: Τα ρήματα *τῐ́νω* και *φθῐ́νω* έχουν το **ῐ** βραχύ μόνο στον ενεστώτα, παρατατικό και μέσο παρακείμενο:

τίνε, τὸ τίνον, φθίνε, τὸ φθίνον.

* **Σημείωση:** Αρχικά τα ρήμ. σε **–ινω, –υνω, –ιρω, –υρω,** είχαν την παραλήγουσα βραχύχρονη: *κρῑν-ίω>κρῑν-νω>κρῑ́νω* (αντέκταση: *ῐ > ῑ*) έτσι και *οἰκτῐ̃ρ-ίω>οἰκτῐ̃ρ-ρω>οἰκτῑ́ρω* κτλ. Επίσης: *ἔκρῐν-σα>ἔκρῐν-να>ἔκρῑνα* κτλ.

10) Όσα συνηρημένα ρήματα σε **–άω** διατηρούν το χαρακτήρα **α** σε όλους τους χρόνους τον τρέπουν σε **α** μακρό (**ᾱ**):

ἐᾶσαι, ἐᾶσθαι, εἰᾶσθαι.

Εξαίρεση: Τα ρήματα *γελῶ, χαλῶ, θλῶ, σπῶ* έχουν παντού το **α** βραχύ (**ᾰ**):

σπάσαι, ἐσπάσθαι, γελάσαι (απαρ.)

11) Τα ενρινόληκτα και υγρόληκτα ρήματα που έχουν μονοσύλλαβο θέμα με φωνήεν **ε** τρέπουν το **ε** σε **ᾰ** στο μέσο παρακείμενο και υπερσυντέλικο (μερικά και στην ενεργητική φωνή):

φθείρω (θ. *φθέρ-*), *ἔφθᾰρκα, ἔφθᾰρμαι* (απαρ. *ἐφθᾰ́ρθαι*),

στέλλω (θ. *στέλ-*), *ἔστᾰλκα, ἔστᾰλμαι* (απαρ. *ἐστᾰ́λθαι*),

σπείρω (θ. *σπέρ-*), *ἔσπᾰρκα, ἔσπᾰρμαι,*

τείνω, (θ. *τέν-*), *τέτᾰκα, τέτᾰμαι* (απαρ. *τετᾰ́σθαι*),

στρέφω, ἔστραμμαι (απαρ. *ἐστρᾰ́φθαι*),

τρέπω, τέτραμμαι (απαρ. *τετρᾰ́φθαι*).

Έτσι και ο παθητικός μέλλοντας και παθητικός αόριστος β των ρημάτων: *ἐκπλήττομαι, σήπομαι, τήκομαι, κλέπτω, τρέπω, τρέφω, πλέκω, στρέφω,* έχουν *ᾰ*:

π.χ.	*κλᾰπήσομαι,*	*ἐκλᾰ́πην*
	τρᾰπήσομαι,	*ἐτρᾰ́πην*
	τρᾰφήσομαι,	*ἐτρᾰ́φην*
	πλέκομαι	*ἐπλᾰ́κην*
	στρᾰφήσομαι,	*ἐστρᾰ́φην*
	ἐκπλᾰγήσομαι,	*ἐξεπλᾰ́γην*
	σᾰπήσομαι,	*ἐσᾰ́πην*
	τᾰκήσομαι,	*ἐτᾰ́κην*

12) Έχουν το δίχρονο της παραλήγουσας βραχύ:

1. Τα ρήματα σε **–λλω** (π.χ. *ἀγάλλω, βάλλε, τὸ βάλλον, σφάλλω, ἔσφαλμαι*).
2. Τα ρήματα σε **–άνω** (π.χ. *τυγχάνω, τὸ λαγχάνον, λάχε, λάθε*).
3. Τα ρήματα σε **–νυμι** (εκτός από τους τύπους: *δείκνῡ, δεικνύς, δεικνῦσα*) κ.ά., δες §13).

13) Το **υ** είναι μακρό στους παρακάτω τύπους των ρημάτων σε **–υμι**:

– β εν. προστ.: *δείκνῡ,*
– ενικός αριθμός παρατ.: *ἐδείκνῡν, ἐδείκνῡς, ἐδείκνῡ,*
– ενικός αρ. οριστ. ενεστ.: *δείκνυμι, δείκνυς, δείκνυσι,*
– στους τύπους των μετοχών (*–ῡς, –ῡσα, –ῡσι*): *ὁ δεικνύς, ἡ δεικνῦσα, τοῖς δεικνῦσι (από αποβολή του -ντ και αναπλ. έκταση ῠ > ῡ).*

14) Τα περισσότερα αφωνόληκτα ρήματα (χαρακτήρας: **κ, γ, χ - π, β, φ - τ, δ, θ**) έχουν το δίχρονο της παραλήγουσας βραχύ:

π.χ. *ᾰ̓γ-ω, ᾰ̓γε, τὸ ᾰ̓γον*

ᾰ̓ρχ-ω, ᾰ̓ρχε, ᾰ̓ρξαι (απαρ.)

γράφ-ω, γράφε, τὸ γράφον, γράψον (προστ.)

πείθ-ω, ἔπῐθ-ον, πῐ́θε, τὸ πῐ́θον.

Εξαίρεση: Τα ρήματα *θλίβω, τρίβω, βρίθω* (= είμαι γεμάτος), *φρύγω* (ξεραίνω), *ψύχω* έχουν την παραλήγουσα (**ῑ**, **ῡ**) μακρά:

π.χ. *θλῖβε, θλῖψαι, τρῖβε, τέτρῑμμαι – τετρῖφθαι* κτλ.

15) Στον α ενεργητικό παρακείμενο και υπερσυντέλικο το **–υκα, –υκειν** έχει το **υ** μακρό (*ῡ*), όταν είναι μακρό στον ενεστώτα και μέλλοντα. Συνήθως είναι βραχύ (*ῠ*):

λέλῠκα, τέθῠκα, κέχῠκα, αλλά *δέδῡκα, πέφῡκα.*

16) Όταν ο ρηματικός τύπος του παρακειμένου έχει αττικό αναδιπλασιασμό, τότε το **υ** είναι βραχύ (*ῠ*):

π.χ. *ὀρώρῠχα.*

17) Όταν ο ενεστώτας λήγει σε **–ύζω**, το **–υ** στον παρακείμενο και υπερσυντέλικο είναι βραχύ:

π.χ. *κλύζω – κέκλυκα* (*ῠ*).

18) Οι καταλήξεις **–υμαι, –υμην** στο μέσο παρακείμενο και υπερσυντέλικο έχουν το **υ** γενικά μακρό (*ῡ*):

τρύω – τέτρυμαι (απαρ. *τετρῦσθαι*), *πέπνυμαι,*

αλλά: *λέλῠμαι (λύω), κέχῠμαι (χέω), τέθῠμαι (θύω), δέδῠμαι (δύω)* το *υ* βραχύ (*ῠ*).

19) Η κατάληξη **–ύθην** έχει γενικά το υ βραχύ (*ῠ*):

π.χ. *ἐλύθην, ἐχύθην, ἱδρύθην* (*ῠ*).

20) Στο συνηρημένο ενεργητικό μέλλοντα, τον αόρ. β και παθ. αόρ. β (και τα παράγωγα) το **υ** της παραλήγουσας είναι βραχύ (ῠ):

π.χ. *ἀμυνῶ, ἔφυγον (φύγε), ἔτυχον (τύχε), ἐψύγην (ψύχω), ἐκρύβην, φῠγή* (ῠ).

21) Η κατάληξη **–(ᾰ)ναι** έχει το α βραχύ **(ᾰ)** και παίρνει οξεία:

ἱστάναι, πιμπλάναι, τεθνάναι, ἑστάναι (ἑστηκέναι) κτλ.

Εξαιρείται το *δρᾶναι* (αόρ. β *ἔδραν – διδράσκω*).

22) Οι καταλήξεις **–ῐκα, –ῐκειν** έχουν το **ι** βραχύ (**ῐ**):

α) όταν ο ενεστώτας λήγει σε **–ῐζω** ή **–ῐσσω** (**–ίττω**),

β) όταν έχει χαθεί το ***κ***: *δέδῐα,*

γ) όταν υπάρχει αττικός αναδιπλασιασμός: *ἀλήλῐφα.*

23) Οι καταλήξεις **–ᾱμαι, –ᾱμην** έχουν κατά κανόνα το **α** μακρό (**ᾱ**): *δέδρᾱμαι, ἑώρᾱμαι* κ.ά.

αλλά: *τέτᾰμαι (τέτᾰκα)* του *τείνω, ἐλήλᾰμαι (ἐλήλᾰκα)* του *ἐλαύνω* και στα ρήματα του ενεστώτα *δύνᾰμαι, μάρνᾰμαι, πέτᾰμαι.*

24) Οι καταλήξεις **–ᾰσμαι, –ᾰμμαι** έχουν το **α** συνήθως βραχύ: *κέκλᾰσμαι, ἔσπᾰσμαι, πέφᾰσμαι, τέθρᾰμμαι, τέτρᾰμμαι, ἔστρᾰμμαι.*

25) Οι καταλήξεις **–ῐθην** έχουν συνήθως το **ι** βραχύ (**ῐ**):

ἐκλῐθην, ἐκρῐθην.

26) Το δίχρονο φωνήεν του ενεργητικού και παθητικού παρακειμένου και του παθητικού αορίστου α των ρημάτων *κρίνω, πλύνω, τείνω* είναι βραχύ: *(τείνω) τέτᾰκα, τέτᾰμαι, ἐτᾰθην, (κρίνω) κέκρῐκα, κέκρῐμαι, ἐκρῐθην, (πλύνω), πέπλῠκα, πέπλῠμαι, ἐπλῠθην.*

ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Του **Κ. Ντούρου,** Φιλόλογου

Όποιος συστηματικά παρακολουθεί τα θέματα των Λατινικών τα τελευταία χρόνια διαπιστώνει μια αλλαγή φιλοσοφίας στην επιτροπή επιλογής θεμάτων. Η αλλαγή αυτή εντοπίζεται κυρίως στο συντακτικό, το οποίο καλύπτει πια ένα ευρύ φάσμα ασκήσεων, που απαιτεί συστηματική προετοιμασία προκειμένου να είναι ο υποψήφιος σε θέση να αντιμετωπίσει με επιτυχία τη δοκιμασία των εξετάσεων. Το επίπεδο αυτό των απαιτήσεων πλήρως καλύπτει το βιβλίο **ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΟΥ,** *Κ. ΝΤΟΥΡΟΥ,* εκδόσεις ΖΗΤΗ, 1997, αποσπάσματα του οποίου παρατίθενται.

Στη συνέχεια σταχυολογούνται από το βιβλίο υποδείγματα ασκήσεων που ανταποκρίνονται στο επίπεδο των εξετάσεων. Οι ασκήσεις αυτές είναι ενδεικτικές συνόλου παραδειγμάτων που εμπεριέχονται και συστηματικά αναλύονται στο εν λόγω βιβλίο.

1. ΔΗΛΩΣΗ ΤΟΥ ΣΚΟΠΟΥ μετά από ρήματα κίνησης - ΓΕΡΟΥΝΔΙΑΚΗ ΕΛΞΗ

α. ***filiola eius ad complexum patris cucurrit*** *(σελ. 172)*

filiola eius cucurrit *ut complecteretur patrem (τελική πρόταση)*

filiola eius cucurrit *quae complecteretur patrem (αναφορική-τελική πρόταση)*

filiola eius cucurrit *complexum patrem (σουπίνο)*

filiola eius cucurrit *ad complectendum patrem* (εμπρόθετο γερούνδιο με αιτ.)*

filiola eius cucurrit *complectendi causa (patrem) (causa+γεν. γερουνδίου) Σ'αυτή την περίπτωση έχουμε υποχρεωτική γερουνδιακή έλξη, δηλ.* ***ad complectendi patris***

β. ***Tum adulescens in certamen ruit*** *(σελ. 209)*

Tum adulescens ruit ***ut certaret*** *(τελική πρόταση)*

Tum adulescens ruit ***qui certaret*** *(αναφορικοτελική πρόταση)*

Tum adulescens ruit ***certatum*** *(αιτιατική σουπίνου)*

Tum adulescens ruit ***ad certandum*** *(ad+αιτ. γερουνδίου)*

Tum adulescens ruit ***certandi causa*** *(causa + γενική γερουνδίου)*

γ. ***multas imagines nobis reliquerunt non solum ad intuendum*** *(σελ. 212)*

multas imagines nobis reliquerunt non solum ***ut intueremur*** *(τελική πρόταση)*

multas imagines nobis reliquerunt non solum ***quas intueremur*** *(αναφορικοτελική πρόταση)*

multas imagines nobis reliquerunt non solum ***intuitum*** *(αιτ. σουπίνου)*

multas imagines nobis reliquerunt non solum ***ad intuendum**** *(ad + αιτ. γερουνδίου)*

multas imagines nobis reliquerunt non solum ***intuendi causa**** *(causa + γεν. γερουνδίου)*

2. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΣΕ ΜΕΤΟΧΗ

α. Να μετατραπούν οι υπογραμμισμένες προτάσεις σε μετοχές (σελ.169, 173, 178, 205)

Hannibal omnes gentes Hispaniae bello superavit et Saguntum vi expugnavit:

Hannibal ***omnibus gentibus*** *Hispaniae bello* ***superatis*** *Saguntum vi expugnavit*

Postea Alpes, quae Italiam ab Gallia seiungunt, cum elephantis transiit:

Postea Alpes Italiam ab Gallia ***seiungentes*** *cum elephantis transiit*

Postquam XIV annos in Italia complevit Carthaginienses eum revocaverunt:

XIV annis in Italia completis a Hannibale Carthaginienses eum revocaverunt

β. *Terror animos militum invaserat et exercitus fiduciam amiserat:* ***Animis militum invasis terrore***

---

* Αν θεωρηθεί ως αντικείμενο των εμπροθέτων γερουνδίων το multas imagines θα έχουμε υποχρεωτική γερουνδιακή έλξη, δηλ. θα γίνει αντίστοιχα: ***ad intuendas multas imagines // intuendarum causa multarum imaginum***

exercitus fiduciam amiserat

Quia ille metum vicerat, imperator adversarios vincere potuit: ***Victo metu ab illo*** imperator adversarios vincere potuit

γ. *Cum civitas bellum gerit , magistratus creantur:* ***civitate bellum gerente*** *, magistratus creantur*

Germani vinum a mercatoribus ad se importari non sinunt, quod ea re remollescunt homines

Germani vinum a mercatoribus ad se importari non sinunt ea re remollescentibus hominibus

δ. *quotiescumque avis non respondebat, sutor dicere solebat:* ***ave/i non respondente*** *sutor dicere solebat*

cum Octavianus Romam rediret, homo quidam ei occurrit: ***Octaviano Romam redeunti*** *homo quidam occurrit*

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΟΧΩΝ

α. Να μελετηθούν τα συντακτικά φαινόμενα και να αναλυθούν σε δευτερεύουσες προτάσεις λαμβανομένου υπόψη του χρόνου της κύριας πρότασης (σελ. 191)

Brenno duce: Ιδιόμορφη αφαιρετική απόλυτη (δηλώνει χρόνο) με υποκείμενο το Brenno και το duce κατηγορηματικό προσδιορισμό

Cum Brennus dux esset ...*everterunt*

deletis legionibus: Ιδιάζουσα αφαιρετική απόλυτη (αντί συνημμένης) χρονική μετοχή

Cum Galli legiones delevissent ... *everterunt...*

β. Να αναλυθούν οι μετοχές σε δευτερεύουσες προτάσεις (σελ. 191)

divisam: qui in exilio fuerat propter praedam..., ***quae non aequio iure divisa erat***

absens: Tum Camillus, ***etsi aberat***, dictator est factus

interemptis: Cum Camillus eos interemisset ... recepit ή ***Postquam Camillus eos interemit***...

appensum: Aurum***, quod illic appensum erat ,*** civitati nomen dedit

rogatus: Post hoc factum rediit in exilium, unde tamen reversus est, ***postquam rogatus est***

abeuntes: Is Gallos***, dum iam abeunt,*** secutus est (συνεχιζόμενη πράξη) ή Is Gallos, ***cum iam abirent***, secutus est (ισχύει η ακολουθία των χρόνων)

γ. Να αναλυθεί η μετοχή με όλους τους δυνατούς τρόπους (σελ. 205)

audita salutatione: ***Cum Caesar salutationem audivisset*** // ***Postquam Caesar salutationem audivit***

4. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΣΕ ΠΑΘΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

α. *A. Regulus scripsit ab eo desertum esse rus (σελ 219):* ***Is (mercenarius meus) rus deseruit***

β. *nihil illis pater reliquerat (σελ. 219)*: ***nihil illis a patre relictum erat***

γ. *Numquam ego hostem iudicabo Marium // Semper tamen meminero urbem Romam et Italiam a Mario conservatam esse (σελ. 231)*

Numquam Marius hostis a me iudicabitur // Semper tamen meminero Marium urbem Romam et Italiam conservavisse

δ. *atque id quod a Caesare scriptum est, habe semper in memoria (σελ. 233):* ***atque id quod Caesar scripsit, habe semper in memoria***

ε. *Curat et providet ne nostra consilia ab hostibus cognoscantur // Haec a quodam milite conspicitur et ad Ciceronem defertur (σελ.242)*

Curat et providet ne nostra consilia hostes cognoscant

Hanc quidam miles conspicit et ad Ciceronem defert

5. ΠΛΑΓΙΟΣ ΛΟΓΟΣ (μετατροπή πλαγίου σε ευθύ και ευθύ σε πλάγιο)

α. *Caesar ex captivis cognoscit quae apud Ciceronem gerantur quantoque in periculo res sit:* ***Quae apud Ciceronem geruntur quantoque in perculo res est?***

β. *Tum cuidam ex equitibus Gallis prsuadet ut ad Ciceronem epistulam deferat:* ***Ad Ciceronem epistulam defer***

γ. *Curat et providet ne, intercepta epistula, nostra consilia ab hostibus cognoscantur:* ***intercepta epistula nostra consilia ab hostibus ne cognoscuntor***

δ. *In literris scribit se cum legionibus celeriter adfore:* ***Ego cum legionibus celeriter adero***

ε. *Gallus constituit ut tragulam mitteret:* ***tragulam mittam***

στ. *Ille milites adhortatur ut salutem sperent:* ***salutem sperate***

ζ. *Legatum monet ut, si adire non possit, epistulam ad amentum tragulae adliget et intra castra abiciat:*

si adire non poteris epistulam ad amentum tragulae adliga et intra castra abice *(σελ. 242)*

η. *Catilina a Cicerone ex urbe expulsus est. Ab Antonio, altero consule, Catilina ipse proelio victus interfectus est:* α)Να μετατραπεί η παθητική σύνταξη σε ενεργητική β) Να εξαρτηθεί από το **Sallustius tradit** (σελ. 188)

α) ***Cicero Catilinam ex urbe expulit. Antonius, alter consul, Catilinam ipsum proelio victum interfecit***

β) ***Sallustius traxit Catilinam a Cicerone ex urbe expulsum esse et ab Antonio, altero consule, eum ipsum proelio victum interfectum esse***

θ. *Gaius Sallustius tradit multos etiam milites Romanos in eadem cruentissima pugna occisos esse, multos autem graviter vulneratos esse:* ***Multi etiam milites Romani in eadem cruentissima pugna occisi sunt, multi autem graviter vulnerati sunt***

6. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΑΘΗΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΦΡΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΖΥΓΙΑΣ ΣΕ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

α. *Vim hostium cavere debetis:* ***Vis hostium cavenda est vobis*** *(σελ. 163)*

β. Να αντικατασταθεί η παθητική περιφραστική συζυγία από το debeo + απαρέμφατο (σελ. 214)

omnia sunt excitanda tibi uni: ***Tu unus omnia excitare debes***

comprimendae (erant) libidines tibi: ***Tu libidines comprimere debebas***

omnia vobis vincienda fuerunt: ***Vos omnia vincire debuistis***

Subveniendum erat reipublicae (a te): ***Tu rei publicae subvenire debebas***

γ. Να αντικατασταθεί το **debeo + απαρέμφατο** από την παθητική περιφραστική συζυγία

Nos bella vitare (αποφεύγω) debemus: ***Bella vitanda sunt nobis***

Vos pacem expetere debebatis: ***Pax expetenda erat vobis***

*vulneribus mederi debes:****Vulneribus medendum est a te*** *(το ποιητικό αίτιο τίθεται σε εμπρόθετη αφαιρετική για να αποφευχθεί η σύγχυση)*

7. ΤΡΟΠΗ ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΥ ΛΟΓΟΥ ΣΤΑ ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ

α. *Si habet Asia suspicionem quandam luxuriae, Murenam laudare debemus:****(σελ. 208)***

Si haberet Asia suspicionem quandam luxuriae, Murenam laudare deberemus *(μη πραγματικό στο παρόν)*

Si habuisset ... Murenam laudare debuissemus *(μη πραγματικό στο παρελθόν)*

Si habeat Asia ... Murenam laudare debeamus *(δυνατό ή πιθανό)*

β. *Neminem credideritis patriae consulturum esse, nisi vos ipsi patriae consulueritis:* Να μετατραπεί ο πλάγιος λόγος σε ευθύ και να τραπεί ο υποθετικός λόγος στα άλλα είδη (σελ.198)

nemo consulet, nisi vos ipsi patriae consulueritis (ανοιχτή υπόθεση)

nemo consuleret / consuluisset, nisi vos ipsi patriae consuleretis / consuluissetis (μη πραγματικό)

nemo consulat, nisi vos ipsi patriae consulatis (δυνατό, πιθανό)

8. ΑΠΑΓΟΡΕΥΣΗ

α. *Noli spectare quanti homo sit:* Να εκφραστεί η απαγόρευση με άλλο τρόπο & να εξαρτηθεί η πρόταση από το **orabam illum** (σελ. 202)

Ne spectaveris quanti homo sit

orabam illum ne spectaret quanti homo esset (οι βουλητικές προτάσεις, όταν είναι αρνητικές, εισάγονται με το ne και εκφέρονται με υποτακτική ενεστώτα ή παρατατικού)

β. *Opibus urbis nolite confidere // Neminem credideritis patriae consulturum esse:* Να δοθεί η απαγόρευση με άλλο τρόπο

Ne opibus urbis confisi sitis // nolite credere patriae aliquem consulturum esse

9. Β' ΟΡΟΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

α. *ut nihil ei gratius possit esse quam recuperatio fugitivi: ut nihil ei gratius possit esse* ***recuperatione*** *fugitivi*

β. *Ea puella nihil umquam festivius vidi: Nihil umquam festivius* ***quam eam puellam*** *vidi*

◆