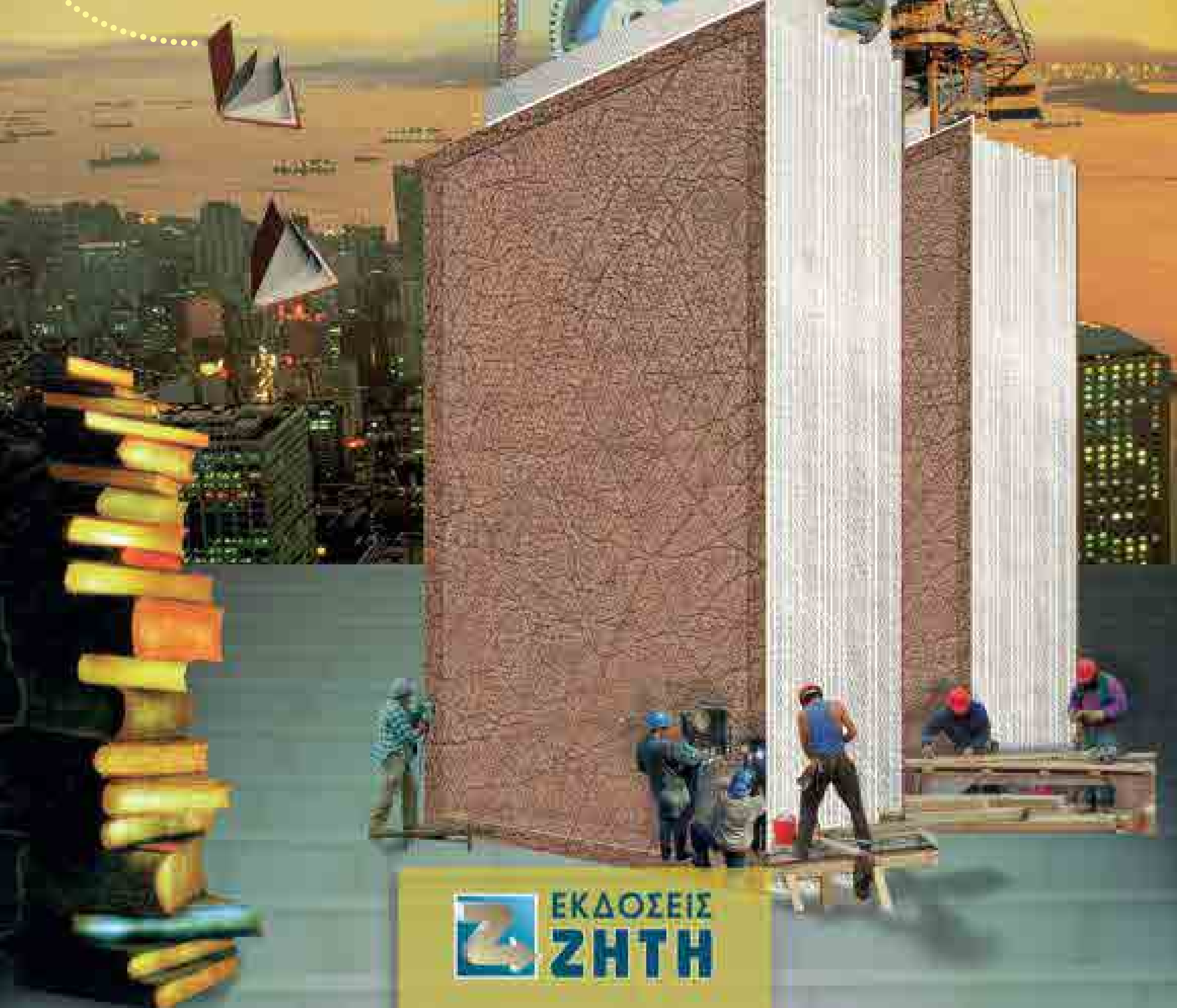
Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί

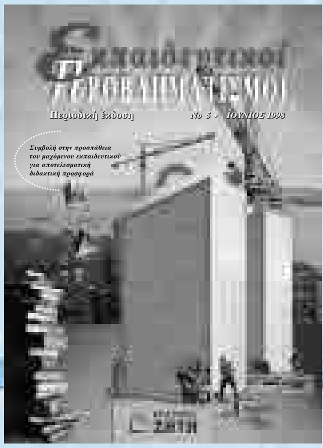
Περιοδική έκδοση

Νο 5 • ΙΟΥΝΙΟΣ 1998

Συμβολή στην προσπάθεια του μαχόμενου εκπαιδευτικού για αποτελεσματική διδακτική προσφορά



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ



Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί
Νο 5 - Ιούνιος 1998

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ • ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
Π. ΖΗΤΗ & Σια Ο.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ:
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 17057, 542 10 Θεσσαλονίκη
Τηλ. - Fax: 0392/72.222 (3 γραμμές)
e-mail: ziti@hyper.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Θεσσαλονίκης:
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
Τηλ.: 031/203.720 • Fax: 031/211.305
Θεσσαλονίκη 546 35

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Αθηνών:
«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5)
Αθήνα 105 64
Τηλ.-Fax: 01/32 11 097

Τα πρώτα τεύχη διανέμονται ΔΩΡΕΑΝ στους Εκπαιδευτικούς

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISSN 1106-9252

ΕΤΗΣΙΑ ΣΥΝΔΡΟΜΗ (3 τεύχη)
Εκπαιδευτικοί: 3.000 δρχ.
Βιβλιοθήκες: 5.000 δρχ.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ-ΑΠΟΣΤΟΛΕΣ: ΑΝΝΗ ΖΗΤΗ
Τ.Θ. 17057, 542 10 Θεσσαλονίκη
Τηλ. - Fax: 0392/72.222
e-mail: ziti@hyper.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αγαπητοί φίλοι και συνάδελφοι

Οι «Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί» κυκλοφορούν ήδη δύο χρόνια. Η έκδοσή τους απεδείχθει ότι ήταν μια σημαντική πρωτοβουλία του Εκδοτικού Οίκου ΖΗΤΗ στην προσπάθειά του να συμβάλει στην επιτυχία της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο, γεγονός που διαπιστώνεται από την ανταπόκριση των εκπαιδευτικών μας για συμμετοχή στον «εκπαιδευτικό διάλογο» μέσα από τις σελίδες του περιοδικού μας. Οι επιστημονικοί υπεύθυνοι, που γνωρίζαμε τις δυσκολίες ενός τέτοιου εγχειρήματος, διαπιστώνουμε με χαρά ότι τα θέματα του περιοδικού αγγίζουν τους προβληματισμούς και τα ενδιαφέροντα των εκπαιδευτικών μας και με χαρά θα δεχόμαστε τις συνεργασίες σας. Μας είναι άλλωστε απαραίτητες για να βρισκόμαστε νοερά μαζί σας μέσα στην τάξη.

Ο Εκδοτικός Οίκος ΖΗΤΗ αισθανόμενος την υποχρέωση που συνεπάγεται η επιτυχία αυτή και εκτιμώντας την ανταπόκριση των εκπαιδευτικών μας θα συνεχίζει να διανέμει δωρεάν τα τεύχη.

Η εκδότρια ***Ο Επόπτης Εκδόσεως***

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. (031) 203.720, Fax: (031) 211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: (01) 32 11 097

Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 10.000 δρχ. για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.

Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το «άμεσο περιβάλλον» της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,

- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

Επειδή η σύνταξη του περιοδικού μας κατακλύζεται από προτάσεις με κριτικές του τρόπου παρουσίασης της ύλης στα σχολικά βιβλία, με ασκήσεις ή διαφορετικές λύσεις μιας άσκησης θέλουμε να σας επισημάνουμε ότι μέσα στους στόχους, που έχουν από την αρχή θέσει οι Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, δεν περιλαμβάνεται

- *η κριτική των εγκεκριμένων σχολικών βιβλίων και των μεθόδων διδασκαλίας (εκτός και αν υπάρχει κάποιο λάθος), γιατί θα προκαλέσουμε σύγχυση στον μαχόμενο εκπαιδευτικό, ούτε και*
- *η παράθεση ασκήσεων ή όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων κάποιων ασκήσεων αφού αυτό καλύπτεται από το μεγάλο αριθμό βοηθημάτων που κυκλοφορούν.*

Στόχος μας είναι ο σχολιασμός και η επιστημονική (στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) ανάλυση θεμάτων, προτάσεων και φαινομένων που εξυπηρετούν καθαρά διδακτικούς σκοπούς καθώς και ασκήσεων ή λύσεων που υποδεικνύουν μεθόδους και τρόπους αντιμετώπισης προβλημάτων που εμφανίζονται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Με εκτίμηση
Γεώργιος Παντελίδης

ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 1998-99

ΓΥΜΝΑΣΙΟ
(Από το Γυμνάσιο στο ενιαίο Λύκειο μόνο με το απολυτήριο Γυμνασίου)

ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ

Α Λυκείου
Τάξη Προσανατολισμού

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά	ΩΡΕΣ
1. Θρησκευτικά	2
2. Ελληνικά (Αρχαία & Νέα)	8
3. Ιστορία	2
4. Μαθηματικά	5/4
5. Φυσική - Χημεία	3/4
6. Α Ξένη Γλώσσα	3
7. Αρχές Οικονομίας	2
8. Τεχνολογία	2
9. Φυσική Αγωγή	2/1
10. Σ.Ε.Π.	–/1

Επιλογής	ΩΡΕΣ
1. Β Ξένη Γλώσσα	2
2. Ρίζες Ευρωπαϊκού Πολιτισμού	2
3. Εφαρμογές Πληροφορικής	2
4. Αισθητική Αγωγή (Θ-Μ-Κ)	2
5. Ψυχολογία	2

(Ο γενικός μέσος όρος βαθμού των μαθημάτων δεν λαμβάνεται υπόψη στο απολυτήριο του Ενιαίου Λυκείου).

Β Λυκείου *
Τάξη με τρεις κατευθύνσεις

Θεωρητικής | Θετικής | Τεχνολογικής

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ + **ΓΕΝΙΚΑ**

(8 μαθήματα υποχρεωτικά για όλες τις κατευθύνσεις)

	ΩΡΕΣ
1. Θρησκευτικά	1
2. Ελληνικά (Αρχαία & Νέα)	6
3. Ιστορία	2
4. Μαθηματικά (Άλγεβρα-Γεωμετρία)	4
5. Φυσική - Χημεία - Βιολογία	4
6. Δίκαιο και Πολιτικοί Θεσμοί	2
7. Ξένη Γλώσσα	2
8. Φυσική Αγωγή	2

Θεωρητικής

Υποχρεωτικά	ΩΡΕΣ
1. Αρχαία Ελληνικά Κείμενα	3
2. Κοινωνικοπολιτική Οργ. Αρχ. Ελ.	2/1
3. Λατινικά	2

Επιλογής	ΩΡΕΣ
1. Β Ξένη Γλώσσα	2
2. Αρχές Περιβαντ/κών Επιστημών	2
3. Νεότερη Ευρωπαϊκή Λογοτεχνία	2
4. Στοιχεία Αστρονομίας - Διαστημικής	2
5. Σχέδιο (Γραμμικό ή Ελεύθερο)	2
6. Εφαρμογές Υπολογιστών	2
7. Ιστορία Κοινωνικών Επιστημών	2
8. Θέματα Ιστορίας	–

Θετικής

Υποχρεωτικά	ΩΡΕΣ
1. Μαθηματικά	3
2. Φυσική	2
3. Χημεία	1

Επιλογής	ΩΡΕΣ
1. Β Ξένη Γλώσσα	2
2. Αρχές Περιβαντ/κών Επιστημών	2
3. Νεότερη Ευρωπαϊκή Λογοτεχνία	2
4. Στοιχεία Αστρονομίας - Διαστημικής	2
5. Σχέδιο (Γραμμικό ή Ελεύθερο)	2
6. Θέματα Ιστορίας	2
7. Εφαρμογές Υπολογιστών	2
8. Βιολογία	2

Τεχνολογικής

Υποχρεωτικά	ΩΡΕΣ
1. Μαθηματικά	2
2. Φυσική	2
3. Τεχνολογία Επικοινωνιών	2

Επιλογής	ΩΡΕΣ
1. Β Ξένη Γλώσσα	2
2. Αρχές Περιβαντ/κών Επιστημών	2
3. Νεότερη Ευρωπαϊκή Λογοτεχνία	2
4. Στοιχεία Αστρονομίας - Διαστημικής	2
5. Διαχείριση φυσικών πόρων	2
6. Εφαρμογές Υπολογιστών	2
7. Χημεία	2
8. Σχέδιο (Τεχνικό και Ελεύθερο)	2

Από τα μαθήματα επιλογής ο μαθητής επιλέγει υποχρεωτικά ένα.

* **Γ Λυκείου:** *Για το 1998-99 θα λειτουργήσει το παλιό σύστημα*

*Επεξεργασία πίνακα: **Δ. Παπακωνσταντίνου**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*

Αποσπασμα από το «Βιβλιο του Διδασκοντος» για το μαθημα Αναλυση της Γ Λυκειου

Του **Γ. Παντελίδη** , Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Θα παραθέσουμε ορισμένα ενδεικτικά αποσπάσματα από τις παραγράφους 6.12 και 6.13. Θα παραλείψουμε ορισμένα σχήματα και σχόλια που ανάλογά τους υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο. Επίσης δε θα παραθέσουμε εδώ παραδείγματα που έχουν δημοσιευθεί σε προηγούμενα τεύχη των Εκπαιδευτικών Προβληματισμών. Αυτά υπάρχουν βέβαια στο «Βιβλίο του διδάσκοντος»

6.12 Προσδιορισμός ακροτάτων τιμών συναρτήσεων

• Κριτήριο 1ης παραγώγου

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μια ακόμη «προσφορά» της παραγώγου στον πλήρη προσδιορισμό της συναρτήσεως.

Πρόταση:

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο (α, β) και συνεχής στο ξ (α, β).

1. Αν η f είναι (γνησίως) αύξουσα στο $(\alpha, \xi]$ και (γνησίως) φθίνουσα στο $[\xi, \beta)$, τότε το $f(\xi)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β).
2. Αν η f είναι (γνησίως) φθίνουσα στο $(\alpha, \xi]$ και (γνησίως) αύξουσα στο $[\xi, \beta)$, τότε το $f(\xi)$ είναι ελάχιστο της f στο (α, β).

Παρατήρηση 1: Το αντίστροφο της προτάσεως δεν είναι αληθές. Αν στο σημείο ξ η f παίρνει την μέγιστη τιμή, δεν είναι απαραίτητο η f να είναι αύξουσα στο $(\alpha, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, \beta)$ (βλ. παράδειγμα 2).

Προσοχή! Όπως έχει διατυπωθεί η πρόταση πρόκειται για τη μέγιστη (αντ. ελάχιστη) τιμή της f στο διάστημα (α, β) που μπορεί να είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f. Εδώ βέβαια θα ασχοληθούμε με το **τοπικό μέγιστο** (αντ. **τοπικό ελάχιστο**) **στο** Α. Για να μην υπάρχει οποιαδήποτε παρανόηση, το θεώρημα που ακολουθεί θα διατυπωθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μη δημιουργεί ασάφειες.

Θεώρημα (1ης παραγώγου)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα I, ξ ένα εσωτερικό σημείο του I και παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο της μορφής $U(\xi, \delta)=(\xi-\delta, \xi)$ $(\xi, \xi+\delta)$.

1. Αν $f(x)>0$ για κάθε x $(\xi-\delta, \xi)$ και $f(x)<0$ για κάθε x $(\xi, \xi+\delta)$, τότε το $f(\xi)$ είναι τοπικό μέγιστο.
2. Αν $f(x)<0$ για κάθε x $(\xi-\delta, \xi)$ και $f(x)>0$ για κάθε x $(\xi-\delta, \xi)$, τότε το $f(\xi)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το σημείο τοπικού ακροτάτου της συναρτήσεως

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

που είναι ορισμένη στο $(0, +\bullet)$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη τιμή της ακολουθίας $(\sqrt[\nu]{\nu})$, ν $\mathbb{N}^*$.

Λύση: Η συνάρτηση έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξεως στο διάστημα $(0, +\bullet)$ με

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

Η συνάρτηση έχει ένα στάσιμο σημείο στο $\xi=e$. Για $x<e$ είναι $f(x)>0$ και για $x>e$ είναι $f(x)<0$. Επομένως η f έχει στο σημείο $\xi=e$ τοπικό (ολικό) μέγιστο, που είναι $e^{\frac{1}{e}}$. Είναι δύσκολη η εφαρμογή του κριτηρίου της 2ης παραγώγου.

Οι όροι της ακολουθίας $(\sqrt[\nu]{\nu})$ είναι οι τιμές $f(\nu)=\sqrt[\nu]{\nu}$, οπότε για τη μέγιστη τιμή ισχύουν $2^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{e}}$ και $3^{\frac{1}{3}}<e^{\frac{1}{e}}$. Επομένως ο μέγιστος όρος είναι ένας από τους $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$. Διαπιστώνουμε με απλές πράξεις ότι $2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$ ενώ για κάθε $\nu>3$ είναι $\sqrt[\nu]{\nu}<\sqrt[3]{3}$. ▲

Παρατήρηση 2: Το αντίστροφο της προτάσεως δεν ισχύει, με άλλα λόγια η συνθήκη της προτάσεως είναι

ικανή και όχι αναγκαία, δηλ. αν η f παίρνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή στο σημείο ξ, δεν είναι απαραίτητο να αλλάζει το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του σημείου ξ. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} |x|\left(2+\eta\mu\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

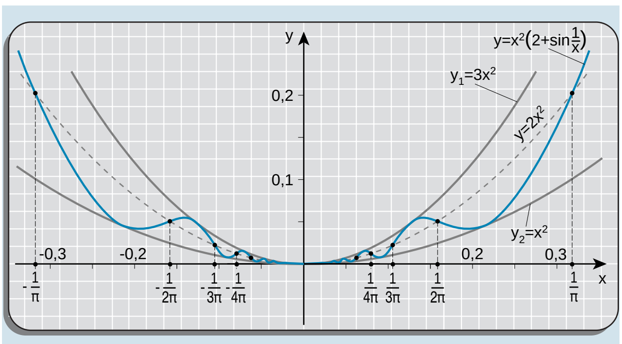
(βλ. παράδειγμα στην πρόταση 5 (§2.3)) έχει στο σημείο $\xi=0$ τοπικό ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και συνεχής στο $\xi=0$.

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\eta\mu\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad (\sigma\chi.\ 1)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει στο σημείο $\xi=0$ τοπικό (ολικό) ελάχιστο, αλλά η παράγωγος δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο δεξιά και αριστερά του σημείου 0.



Σχ. 1

Παρατηρείστε ότι σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta)$ υπάρχουν άπειρα σημεία όπου η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο.

• Κριτήριο 2ης παραγώγου

• • •

Θεώρημα (2ης παραγώγου)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ξ ένα εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (στάσιμο σημείο) και υπάρχει η $f''(\xi)$.

1. Αν $f''(\xi)<0$, τότε το $f(\xi)$ είναι τοπικό μέγιστο.
2. Αν $f''(\xi)>0$, τότε το $f(\xi)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Παρατήρηση 3: Σε ένα στάσιμο σημείο ξ μπορεί να συντρέχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- Να μην υπάρχει η $f''(\xi)$, οπότε πρέπει να καταφύγουμε στο θεώρημα της πρώτης παραγώγου ή άλλες προτάσεις. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση

  $$f(x)=|x|^{\frac{3}{2}}$$

  το $\xi=0$ είναι στάσιμο σημείο και σημείο τοπικού ελαχίστου $(f(x)\geq f(0)=0)$, ενώ δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

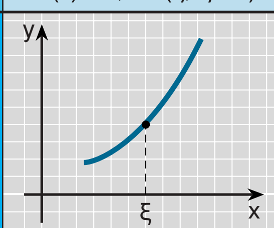
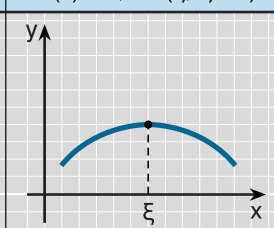
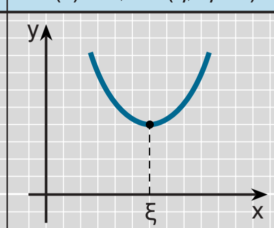
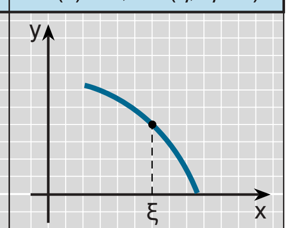
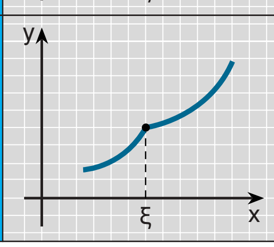
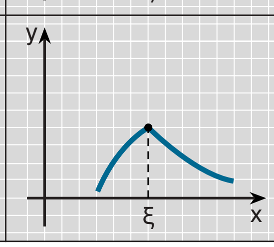
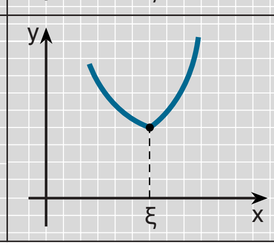
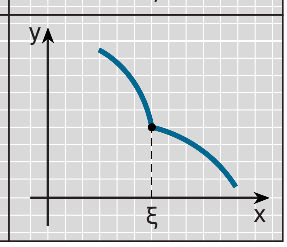
- Να υπάρχει η $f''(\xi)$ αλλά να είναι $f''(\xi)=0$. Το κριτήριο δεν αποφαίνεται στην περίπτωση αυτή. Τότε μπορεί να συντρέχουν οι εξής περιπτώσεις:

  1) Να μην υπάρχει παράγωγος ανώτερης τάξης της f που να μη μηδενίζεται. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση

  $$g(x)=|x|^{\frac{5}{2}}$$

  το ξ είναι στάσιμο, θέση τοπικού ελαχίστου $(g(x)\geq g(0)=0)$, $g''(\xi)=0$ και δεν έχει παράγωγο ανώτερης τάξης στο σημείο ξ.

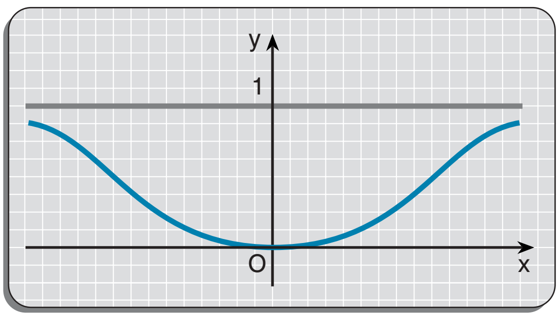
Συνοψίζουμε στον παρακάτω πίνακα τα συμπεράσματα του θεωρήματος με τη μορφή της γραφικής παραστάσεως στην περιοχή του σημείου ξ.

$f'(\xi)$	$f'(x)>0,\ x\in(\xi-\delta, \xi)$ $f'(x)>0,\ x\in(\xi, \xi+\delta)$	$f'(x)>0,\ x\in(\xi-\delta, \xi)$ $f'(x)<0,\ x\in(\xi, \xi+\delta)$	$f'(x)<0,\ x\in(\xi-\delta, \xi)$ $f'(x)>0,\ x\in(\xi, \xi+\delta)$	$f'(x)<0,\ x\in(\xi-\delta, \xi)$ $f'(x)<0,\ x\in(\xi, \xi+\delta)$
Υπάρχει η $f'(\xi)$				
Δεν υπάρχει η $f'(\xi)$				

2) Η f να έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξεως, αλλά όλες μηδενίζονται στο σημείο ξ, οπότε πρέπει να καταφύγουμε στο θεώρημα της πρώτης παραγώγου ή άλλες προτάσεις. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \pi 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad (Σχ. 2)$$

έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης, οι οποίες μηδενίζονται στο σημείο ξ=0.



Σχ. 2

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο xπ0 (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων). Η παράγωγος ν τάξεως είναι της μορφής

$$h^{(\nu)}(x) = P_\nu\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

όπου P_ν είναι πολυώνυμο ν βαθμού. Η απόδειξη γινεται με επαγωγή. Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύεται ότι

$$h^{(\nu)}(0)=0.$$

3) Να υπάρχει παράγωγος ανώτερης τάξης που να μη μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή ισχύει: **(Δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης)**

Γενική πρόταση

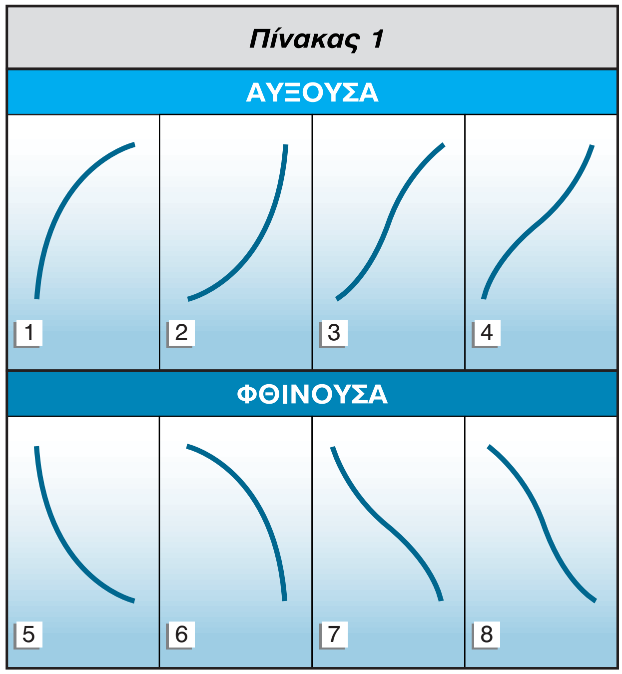
Έστω ότι η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β], κ-φορές παραγωγίσιμη στο σημείο ξ (α, β) και

$$f (\xi) = f \ (\xi) = f \ \ (\xi) = \ldots = f^{(\kappa-1)}(\xi) = 0 \ \text{και} \ f^{(\kappa)}(\xi) \pi 0.$$

- Αν κ άρτιος και $f^{(\kappa)}(\xi)>0$, τότε το ξ είναι θέση τοπικού ελαχίστου.
- Αν κ άρτιος και $f^{(\kappa)}(\xi)<0$, τότε το ξ είναι θέση τοπικού μεγίστου.
- Αν κ περιττός, τότε το ξ δεν είναι θέση ακροτάτου, αλλά σημείο καμπής (βλ. §6.13).

6.13 Κυρτές συναρτήσεις - Σημεία καμπής

Το πρόσημο της παραγώγου μιας συναρτήσεως σε ένα διάστημα μας πληροφορεί για τη μονοτονία της συναρτήσεως. Όμως μια συνάρτηση μπορεί να αυξάνει (αντ. φθίνει) σε ένα διάστημα κατά διάφορους τρόπους, όπως φαίνεται στον πίνακα 1.

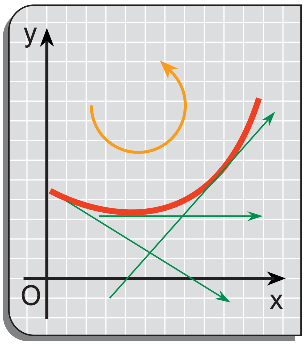


Επομένως από το πρόσημο της πρώτης παραγώγου μιας συναρτήσεως σε ένα διάστημα δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της γραφικής παραστάσεώς της. Στην περίπτωση αυτή επιστρατεύουμε τη δεύτερη παράγωγο της συναρτήσεως, με τη βοήθεια της οποίας θα χαρακτηρίσουμε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις.

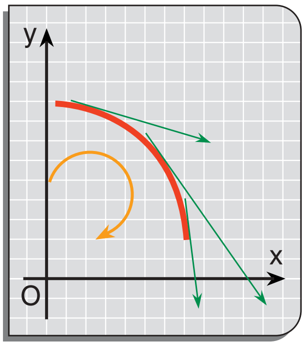
Ορισμός 1:

• • •

Παρατήρηση 1: Στο σχήμα 1(α) δίνεται παραστατικά το γεγονός ότι η παράγωγος f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α, β) προκειμένου για μια κυρτή συνάρτηση. Το κυκλικό βέλος που ακολουθεί τη κατεύθυνση της εφαπτομένης υποδηλώνει μια δεξιόστροφη κίνηση, για το λόγο αυτό η γραφική παράσταση μιας κυρτής συναρτήσεως ονομάζεται και δεξιόστροφη. Ανάλογα, η γραφική παράσταση μιας κοίλης συναρτήσεως ονομάζεται και αριστερόστροφη (σχ.1(β))



Σχ. 1(α)



Σχ. 1(β)

•••

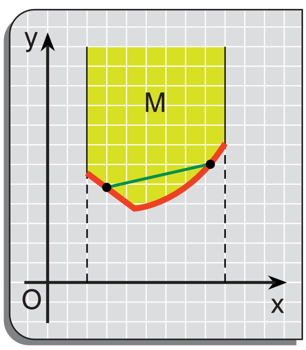
Παρατήρηση 2: Γνωρίζουμε από την Επιπεδομετρία ότι ένα σχήμα ονομάζεται κυρτό, όταν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία του σχήματος ανήκει εξολοκλήρου στο σχήμα. Επομένως τίθεται το ερώτημα: Πρόκειται για διαφορετικούς ορισμούς;

Όχι! Ο ορισμός που θα παραθέσουμε παρακάτω είναι πιο γενικός και δεν προϋποθέτει την παραγωγισιμότητα της συναρτήσεως, οπότε καλύπτει και το παραπάνω σχόλιο.

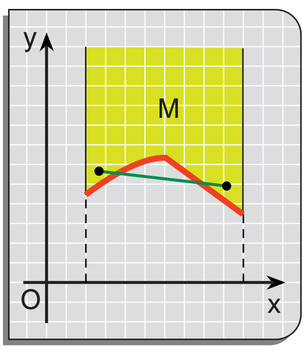
Ορισμός 1 : *Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι κυρτή στο διάστημα I, όταν το **επιγράφημά** της, δηλ. το σύνολο*

$$M: = \{(x, y) \quad \mathbb{R}^2 : x \quad I \text{ και } y \geq f(x)\} \quad (\text{σχ. } 2(\alpha))$$

*είναι κύρτο με τη γεωμετρική του σημασία. Διαφορετικά ονομάζεται **κοίλη** (σχ.2(β)).*



Σχ. 2(α)



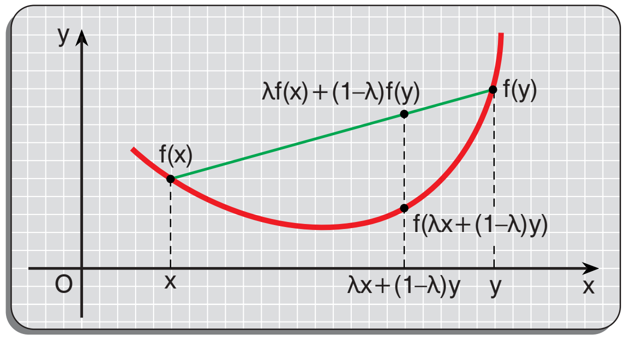
Σχ. 2(β)

Τέλος, διατυπώνοντας τον παραπάνω ορισμό με αναλυτικές εκφράσεις παίρνουμε το επόμενο ισοδύναμο ορισμό:

Ορισμός 1 : Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι κυρτή στο διάστημα I, όταν για κάθε x, y I και λ [0, 1] ισχύει

(*) $$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \quad \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Στο σχ. 3 δίνεται και η σχετική ερμηνεία αυτού του ορισμού.

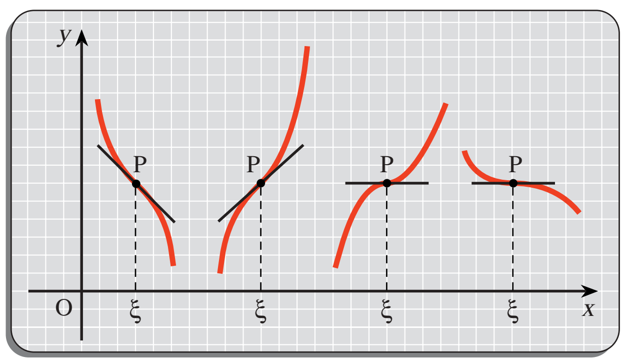


Σχ. 3

Παρατήρηση 3: Με τη βοήθεια της σχέσεως (*) μπορούμε να αποδείξουμε την παρατήρηση του σχολικού βιβλίου: Σε κάθε σημείο της γραφικής παραστάσεως μια κυρτής (αντ. κοίλης) συναρτήσεως η εφαπρομένη βρίσκεται «κάτω» (αντ. «πάνω») από τη γραφική παράστασή της. Η παρατήρηση αυτή είναι πολύ σημαντική για την εποπτική κατανόηση του θεωρήματος 2ης παραγώγου (§6.12): Στο στάσιμο σημείο ξ είναι f (ξ)=0, που σημαίνει ότι στο σημείο (ξ, f(ξ)) της γραφικής παραστάσεως της f η εφαπτομένη y=f(ξ) είναι οριζόντια, οπότε, σύμφωνα με την παρατήρηση και επειδή σε ένα διάστημα της μορφής (ξ–δ, ξ+δ) η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη, δηλ. f(x)≥f(ξ) για κάθε x (ξ–δ, ξ+δ), σημαίνει ότι το ξ είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

Ορισμός 2: *Δίνεται η συνάρτηση f και ξ ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Το σημείο P(ξ, f(ξ)) ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παραστάσεως της f, όταν*

1. *Η f είναι συνεχής στο ξ.*
2. *Υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο P και*
3. *Η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω αριστερά του ξ και προς τα κάτω δεξιά του ξ ή αντίστροφα.*



Σχ. 4

Το ξ ονομάζεται **θέση σημείου καμπής** της f. Όταν f (ξ)=0, τότε έχουμε **σημείο καμπής με οριζόντια** εφαπτομένη.

Στη συνθήκη 2. γράφουμε «υπάρχει η εφαπτομένη» και όχι «η f είναι παραγωγίσιμη» γιατί ο ορισμός ισχύει και για την κατακόρυφη εφαπτομένη, όπου f (ξ)=±• .

Πρόταση 2:

Δίνεται η συνάρτηση f και ξ ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

Αν το P(ξ, f(ξ)) είναι σημείο καμπής της f, τότε f (ξ)=0, αν υπάρχει, ή δεν υπάρχει η f στο ξ.

Συμπέρασμα:

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I=(α, β). Οι θέσεις των σημείων καμπής της συναρτήσεως θα αναζητηθούν μεταξύ των ριζών της εξισώσεως f (ξ)=0 ή των σημείων, όπου δεν υπάρχει η f .

Παρατήρηση 4: Το αντίστροφο της προτάσεως 2 δεν ισχύει. Είναι δυνατόν να μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος της f στο σημείο ξ, χωρίς αυτό να είναι σημείο καμπής (βλ. παραδείγματα 1 και 2 της παρατηρήσεως 3).

Γενικά ισχύουν οι επόμενες ικανές συνθήκες (**Δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης**):

Γενική πρόταση

Έστω ότι η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β], κ-φορές παραγωγίσιμη στο σημείο ξ (α, β) και

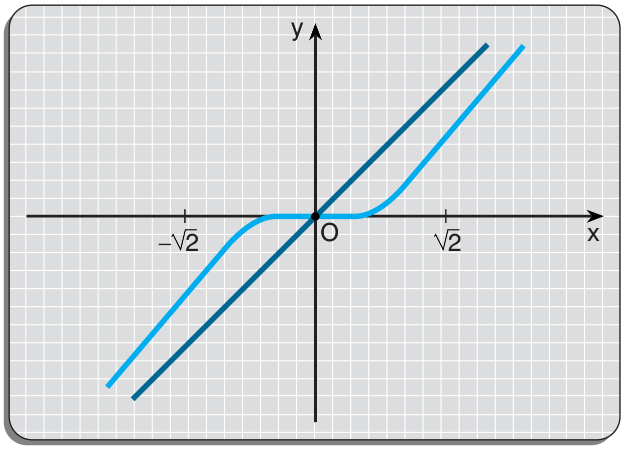
$$f (\xi) = f (\xi) = \dots = f^{(\kappa-1)}(\xi) = 0 \text{ και } f^{(\kappa)}(\xi)\ \pi\ 0.$$

- Αν κ άρτιος και $f^{(\kappa)}(\xi)>0$, τότε η f είναι κυρτή σε ένα διάστημα της μορφής (ξ–δ, ξ+δ).
- Αν κ άρτιος και $f^{(\kappa)}(\xi)<0$, τότε το ξ είναι κοίλη σε ένα διάστημα της μορφής (ξ–δ, ξ+δ).
- Αν κ περιττός, τότε το ξ δεν είναι θέση ακροτάτου, αλλά σημείο καμπής.

Παρατήρηση 5: Και στην περίπτωση αυτή μπορεί να συμβαίνει κάτι ανάλογο με αυτό που σχολιάσαμε για τα ακρότατα (βλ. παρατήρηση 3, §6.12). Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\pi 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ξ=0, που είναι θέση σημείου καμπής με οριζόντια εφαπτομένη αλλά δεν υπάρχει μη μηδενιζόμενη παράγωγος στο σημείο αυτό.



Σχ. 5

Παρατήρηση 6: Μέχρι τώρα έχουμε διαπιστώσει ότι μεταξύ των στάσιμων σημείων μιας συναρτήσεως περιλαμβάνονται εκείνα των τοπικών ακροτάτων και εκείνα των σημείων καμπής με οριζόντια εφαπτομένη. Το ερώτημα που τίθεται είναι:

Υπάρχουν μεταξύ των στάσιμων σημείων και άλλα εκτός από εκείνα των τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής με οριζόντια εφαπτομένη;

Ναι! Για τη συνάρτηση (Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, τεύχος 3)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x\pi 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

το ξ=0 είναι στάσιμο, χωρίς να είναι ούτε σημείο ακροτάτου ούτε σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη. Η απόδειξη ότι είναι στάσιμο βρίσκεται στο βιβλίο (βλ. επίσης §6.4 σχ. 7γ).

Παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη της στο σημείο (0, 0), που είναι ο άξονας x x, τέμνει τη γραφική παράστασή της σε αριθμήσιμου πλήθους σημεία οσονδήποτε κοντά στο 0 . Σε κανένα διάστημα της μορφής (0, δ) (αντ. (–δ, 0)), δ>0, η f δεν στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (αντ. προς τα κάτω) ή αντιστρόφως. Επομένως δεν μπορεί το ξ=0 να είναι θέση σημείου καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

Τέλος θα παραθέσουμε τον πίνακα 2 με τις βασικές ιδιότητες των **παραγωγίσιμων συναρτήσεων** και τις σημαντικότερες συνθήκες που είναι ικανές ή αναγκαίες για τις αντίστοιχες ιδιότητες:

Πίνακας 2		
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	**ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ**	**ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ**
Αύξουσα	f (x) ≥ 0	f (x) ≥ 0
Γνησίως αύξουσα	----	f (x) > 0
Φθίνουσα	f (x) 0	f (x) ≤ 0
Γνησίως φθίνουσα	----	f (x) < 0
Κυρτή	----	f (x) > 0
Κοίλη	----	f (x) < 0
Θέση τοπικού μεγίστου	f (ζ) = 0	f (ζ) = 0 & f (ζ) < 0 ή αλλαγή προσήμου της f (x): + –
Θέση τοπικού ελαχίστου	f (ζ) = 0	f (ζ) = 0 & f (ζ) > 0 ή αλλαγή προσήμου της f (x): – +
Θέση σημείου καμπής	f (ζ) = 0	f (ζ) = 0 & f (ζ)π0 ή αλλαγή προσήμου της f (x)

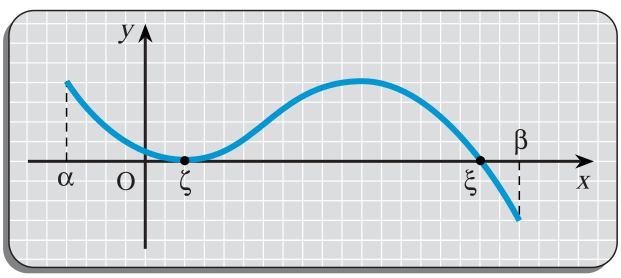
Σχόλιο

Στην §6.10 δώσαμε τον ορισμό της ρίζας μιας συναρτήσεως βαθμού πολλαπλότητας ν ℕ* και στη συνέχεια (εφαρμογή 3) τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε μια ρίζα ζ να είναι βαθμού πολλαπλότητας ν ℕ*. Στο σχόλιο που ακολουθεί το θεώρημα (α) (§4.2) έχουμε θέσει το ερώτημα:

Τι συμβαίνει με τον αριθμό των ριζών στο διάστημα (α, β) του πολυωνύμου με γραφική παράσταση του σχήματος 6(α) και 6(β);

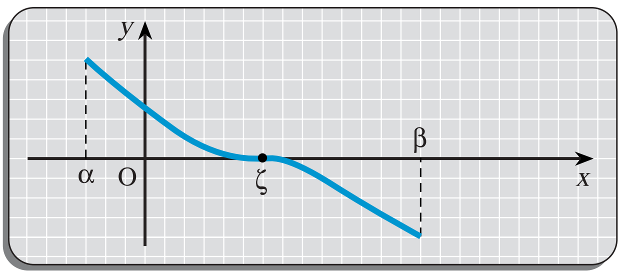
Απάντηση (αναφέρεται γενικά σε συναρτήσεις και όχι μόνο πολυώνυμα):

1. Στο σχ. 6(α) το σημείο ζ είναι ρίζα της f, αφού f(ζ) = 0, είναι στάσιμο, αφού f (ζ) = 0 (οριζόντια εφαπτομένη) και είναι σημείο τοπικού ελαχίστου [στην απλή περίπτωση θα είναι f (ζ) > 0 και στη γενική περίπτωση η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος θα είναι άρτιας τάξης, π.χ. 2ν]. Επομένως, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, η ρίζα ζ είναι άρτιου βαθμού πολλαπλότητας [2 ή, στη γενική περίπτωση, 2ν] και μαζί με την ξ οι ρίζες είναι περιττού πλήθους.



Σχ. 6(α)

2. Στο σχ. 6(β) το σημείο ζ είναι ρίζα της f, αφού f(ζ) = 0, είναι στάσιμο, αφού f (ζ) = 0 (οριζόντια εφαπτομένη) και είναι σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη [στην απλή περίπτωση θα είναι f (ζ) = 0 και f (ζ)π0 και στη γενική περίπτωση η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος θα είναι περιττής τάξης, π.χ. 2ν+1]. Επομένως, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, η ρίζα ζ είναι περιττού βαθμού πολλαπλότητας [3 ή, στη γενική περίπτωση, 2ν+1].



Σχ. 6(β)

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e και μια ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ

Το θέμα δεν ανήκει στη διδακτέα ύλη της Γ' Λυκείου, στοχεύει στην πληροφόρηση του διδάσκοντα

Του **Δ. Κραββαρίτη,** Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Στο σχολικό βιβλίο Ανάλυση Γ Λυκείου ο αριθμός e, που ονομάζεται **αριθμός Euler**, ορίστηκε ως το όριο της ακολουθίας (β_ν) με γενικό όρο

$$\beta_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu.$$

Θα δώσουμε εδώ έναν άλλο ισοδύναμο ορισμό του e, από τον οποίο θα πάρουμε περισσότερες πληροφορίες γι' αυτόν.

Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{\nu!}$$

είναι αύξουσα και φραγμένη και συγκλίνει επίσης στον αριθμό e *(βλ. Μαθηματική Ανάλυση Ι & ΙΙ, Γ. Παντελίδη, Εκδόσεις Ζήτη).*

Προσέγγιση του αριθμού e

Θεωρούμε την ακολουθία θετικών αριθμών

$$s_\nu = e - \alpha_\nu.$$

Αν $\kappa > \nu$, τότε είναι φανερό ότι

$$s_\nu - s_\kappa = \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \dots + \frac{1}{\kappa!} =$$

$$= \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)}+\dots+\frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)\dots\kappa}\right) <$$

$$< \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{(\nu+2)^2}+\dots+\frac{1}{(\nu+2)^{\kappa-\nu-1}}\right).$$

Επειδή για κάθε x, με $0 < x < 1$, ισχύει

$$1 + x + x^2 + \dots + x^\nu < \frac{1}{1-x}$$

έχουμε

$$s_\nu - s_\kappa < \frac{1}{(\nu+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\nu+2}} = \frac{1}{(\nu+1)!} \cdot \frac{\nu+2}{\nu+1}.$$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι ανεξάρτητο από το κ και επειδή

$$\lim_{\kappa \to \infty} s_\kappa = 0$$

η ανισότητα αυτή δίνει

$$s_\nu = \lim_{\kappa \to \infty} (s_\nu - s_\kappa) \le \frac{1}{(\nu+1)!} \cdot \frac{\nu+2}{\nu+1}.$$

Επομένως το σφάλμα που προκύπτει όταν γράφουμε $e \ \alpha_\nu$ είναι

$$s_\nu = e - \alpha_\nu \le \frac{1}{(\nu+1)!} \cdot \frac{\nu+2}{\nu+1}$$

Δηλαδή έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του e με όρους της ακολουθίας (α_ν).

Έτσι για $\nu = 12$ από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$s_{12} \le \frac{14}{13} \cdot \frac{1}{13!} < \frac{14}{13 \cdot 6 \cdot 10^9} = \frac{14}{78} \cdot 10^{-9} < 1{,}8 \cdot 10^{-10}$$

Επομένως ο

$$\alpha_{12} = 2{,}718281828289$$

προσεγγίζει τον

$$e = 2{,}718281828459045\dots .$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_\nu < e \le \alpha_\nu + \frac{\nu+2}{\nu+1} \cdot \frac{1}{(\nu+1)!} \qquad (1)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών ο Fourier απέδειξε ότι ο αριθμός e είναι άρρητος ως εξής:

Έστω ότι ο e είναι ο ρητός $\frac{\mu}{\nu}$. Αν πολλαπλασιάσουμε τις ανισότητες (1) με $\nu!$, τότε παίρνουμε

$$\alpha_\nu \cdot \nu! < \frac{\mu}{\nu} \cdot \nu! \le \alpha_\nu \cdot \nu! + \frac{\nu+2}{(\nu+1)^2}.$$

Ο αριθμός

$$\rho = \alpha^\nu \cdot \nu! = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{\nu!}\right) \cdot \nu!$$

είναι ακέραιος και ο

$$\frac{\nu+2}{(\nu+1)^2} < 1.$$

Επομένως θα ισχύει

$$\rho < \mu \cdot (\nu-1)! < \rho + 1,$$

δηλαδή ο ακέραιος αριθμός $\mu \cdot (\nu - 1)!$ θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των διαδοχικών ακεραίων ρ και $\rho + 1$, που είναι άτοπο.

Ο Euler απέδειξε ότι ο e είναι άρρητος με τη βοήθεια του αναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \ldots}}}}$$

Ο αριθμός e παίζει σημαντικό ρόλο στα Μαθηματικά. Η εκθετική συνάρτηση

$$y(x) = e^x$$

είναι μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση.

$$y\ (x) = y(x), \quad x \quad \mathbb{R},$$

και τη συνθήκη $y(0) = 1$.

Ο αριθμός e και ο π συνδέονται μέσω της σχέσεως Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

η οποία συνδέει τα βασικά μεγέθη 0, 1, π, e, i.

Το έτος 1873 ο Ch. Hermite απέδειξε ότι ο e είναι **υπερβατικός**, δηλαδή δεν είναι ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως. Η απόδειξη, που καταλαμβάνει 31 σελίδες και είναι αρκετά πολύπλοκη, περιέχεται στα Άπαντα του Hermite.

Πιο απλές αποδείξεις για την υπερβατικότητα του e δόθηκαν από τους Weiestrass, Hilbert, και Gordan. Για την απόδειξη του Hilbert παραπέμπουμε στο βιβλίο: Μ. Α. Μπρίκα, Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, Αθήναι 1970. Το βιβλίο αυτό περιέχει επίσης και την απόδειξη της υπερβατικότητας του π που δόθηκε από τον Hilbert το 1893. Σημειώνουμε ότι η πρώτη απόδειξη για την υπερβατικότητα του π δόθηκε από τον Lindemann το 1882. Η απόδειξη του Lindemann οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αν ο x είναι ρίζα μιας αλγεβρικής εξισώσεως, τότε η έκφραση e^x δεν μπορεί να είναι ρητός. Έτσι αν ο αριθμός $x=i\pi$ ήταν ρίζα μιας τέτοιας εξισώσεως, τότε το $e^{i\pi}$ δεν έπρεπε να είναι ρητός, ενώ γνωρίζουμε ότι $e^{i\pi}=-1$. Επομένως το iπ, οπότε και το π, δεν μπορεί να είναι ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως. ◆

ΜΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ Σ' ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΜΑ
(ΘΕΩΡΗΜΑ VECTEN)

Του **Ν. Κυριαζή** Μαθηματικού

Είναι γνωστό το Θεώρημα Vecten*:

Στις πλευρές ΑΓ και ΓΒ τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό κατασκευάζουμε τετράγωνα (βλ. Σχ.). Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο ύψος ΓΖ του δοσμένου τριγώνου.

Παραθέτουμε εδώ μια επέκταση του θεωρήματος αυτού που πιστεύουμε ότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

Πρόταση:

Στις πλευρές ΑΓ και ΓΒ τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό κατασκευάζουμε όμοια ορθογώνια ΑΓΤΕ και ΒΓΡΔ αντίστοιχα με λόγο ομοιότητας

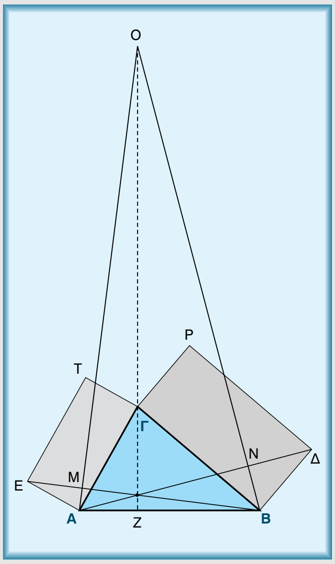
$$\nu = \frac{ΑΓ}{ΑΡ} = \frac{ΓΒ}{ΒΔ}.$$

Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο ύψος ΓΖ του δοσμένου τριγώνου.

Απόδειξη:

Φέρουμε την ΑΜ κάθετη στην ΒΕ και την προεκτείνουμε έως ότου τμήσει την ΓΖ, έστω στο σημείο Ο. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΓΟ είναι όμοια, γιατί έχουν τις πλευρές ανά δύο κάθετες (άρα έχουν ίσες γωνίες) οπότε

$$\frac{ΟΓ}{ΑΒ} \quad \frac{ΑΓ}{ΕΑ} = \nu \qquad ΟΓ - ΑΒ \cdot \frac{ΑΓ}{ΕΑ} = \nu \cdot ΑΒ$$



Φέρουμε τη ΒΝ κάθετη στην ΑΔ και την προεκτείνουμε έως ότου τμήσει την ΓΖ, έστω στο Ο. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΟ προκύπτει πάλι ότι ΓΟ = ν·ΑΒ.

Επομένως: Ο=Ο και οι ΟΖ, ΑΝ, ΒΜ είναι τα ύψη του τριγώνου ΑΟΒ και το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΟ.

Παρατήρηση: Όταν ο λόγος ομοιότητας είναι ν=1, δηλ. τα ορθογώνιοα είναι τετράγωνα, τότε παίρνουμε το Θεώρημα Vecten. ◆

ΟΙ ΙΣΟΤΙΜΙΕΣ (MODULO)

Του **Θ. Ξένου**, Μαθηματικού

Από το σχολικό έτος 1998-1999 στη Β τάξη του Ενιαίου Λυκείου, θετικής κατεύθυνσης, θα διδάσκεται η **Θεωρία Αριθμών**, δηλαδή η μελέτη των ιδιοτήτων των θετικών ακεραίων.

Μια σημαντική έννοια της Θεωρίας Αριθμών είναι οι **ισοτιμίες**. Αρχικά υπενθυμίζουμε τι σημαίνει διαιρετότητα στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Λέμε ότι ο ακέραιος $\alpha \neq 0$ διαιρεί τον ακέραιο β και γράφουμε

$$\alpha|\beta,$$

όταν η διαίρεση του β με τον α είναι τέλεια, που σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος, ώστε να ισχύει $\beta=\kappa\alpha$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού είναι οι εξής:

i) Αν $\alpha|\beta$, τότε και $\alpha|\kappa\beta$ για κάθε ακέραιο κ.

ii) Αν $\alpha|\beta$, τότε και $\kappa\alpha|\kappa\beta$ για κάθε ακέραιο $\kappa\neq 0$.

iii) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε $|\alpha|=|\beta|$

iv) Αν $\alpha|\beta$ κα $\beta|\gamma$, τότε και α/γ.

v) Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|\beta+\gamma$, $\alpha|\beta-\gamma$ και $\alpha|\beta\gamma$.

Οι ισοτιμίες ορίζονται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Θεωρούμε ένα θετικό ακέραιο ν. Δύο ακέραιοι α και β λέγονται ισοϋπόλοιποι με μέτρο ν, όταν διαιρούμενοι με τον ν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Γράφουμε τότε

$$\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$$

και διαβάζουμε «ο α είναι ισοδύναμος του β modulo ν».

Για παράδειγμα, ισχύει $37\equiv 13(\mathrm{mod}\,8)$, αφού οι 37 και 13, διαιρούμενοι με το 8, δίνουν το ίδιο υπόλοιπο 5.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό

$$\boxed{\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu) \quad \nu|\alpha-\beta}$$

Η σχέση $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$ είναι μία **σχέση ισοδυναμίας** στο σύνολο των ακεραίων αριθμών, αφού ισχύουν:

α) $\alpha\equiv\alpha(\mathrm{mod}\,\nu)$ *(ανακλαστική ιδιότητα)*

β) Αν $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$, τότε και $\beta\equiv\alpha(\mathrm{mod}\,\nu)$ *(συμμετρική ιδιότητα)*

γ) Αν $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$ και $\beta\equiv\gamma(\mathrm{mod}\,\nu)$, τότε και $\alpha\equiv\gamma(\mathrm{mod}\,\nu)$ *(μεταβατική ιδιότητα)*

Η σχέση που ορίσαμε παραπάνω λέγεται **ισοτιμία**.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού των ισοτιμιών είναι οι εξής:

i) Αν η διαίρεση $\alpha:\nu$ δίνει υπόλοιπο υ, τότε ισχύει $\alpha\equiv\upsilon(\mathrm{mod}\,\nu)$. Για παράδειγμα, είναι $13\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$ και $81\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$.

ii) Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε ή να πολλαπλασιάζουμε ισοτιμίες κατά μέλη. Δηλαδή, αν $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$ και $\gamma\equiv\delta(\mathrm{mod}\,\nu)$, τότε

$$\alpha+\gamma\equiv\beta+\delta(\mathrm{mod}\,\nu),\quad \alpha-\gamma\equiv\beta-\delta(\mathrm{mod}\,\nu) \text{ και } \alpha\gamma\equiv\beta\delta(\mathrm{mod}\,\nu).$$

iii) Αν $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$ και γ ακέραιος, τότε

$$\alpha+\gamma\equiv\beta+\gamma(\mathrm{mod}\,\nu),\quad \alpha-\gamma\equiv\beta-\gamma(\mathrm{mod}\,\nu) \text{ και } \alpha\gamma\equiv\beta\gamma(\mathrm{mod}\,\nu).$$

iv) Αν $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\nu)$ και $\kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε $\alpha^\kappa\equiv\beta^\kappa(\mathrm{mod}\,\nu)$.

Στη συνέχεια, δίνουμε ορισμένες χαρακτηριστικές εφαρμογές των ισοτιμών.

Εφαρμογή 1. (Κριτήριο διαιρετότητας με το 3)

Ένας θετικός ακέραιος α διαιρείται με το 3, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

Απόδειξη: Αν τα ψηφία του α είναι $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ (μονάδες, δεκάδες, ...), τότε η δεκαδική παράσταση του α είναι

$$\alpha = \alpha_0+\alpha_1\cdot 10+\alpha_2\cdot 10^2+\ldots+\alpha_\nu\cdot 10^\nu.$$

Είναι φανερό ότι αληθεύουν οι ισοτιμίες

$$\alpha_0 \equiv \alpha_0 (\mathrm{mod}\,3),\ \alpha_1\cdot 10 \equiv \alpha_1 (\mathrm{mod}\,3),$$

$$\alpha_2\cdot 10^2 \equiv \alpha_2(\mathrm{mod}\,3),\ \ldots,\ \alpha_\nu\cdot 10^\nu \equiv \alpha_\nu(\mathrm{mod}\,3)$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\alpha_0+\alpha_1\cdot 10+\alpha_2\cdot 10^2+\ldots+\alpha_\nu\cdot 10^\nu \equiv$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu(\mathrm{mod}3)$$

δηλαδή

$$\alpha \equiv \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu(\mathrm{mod}\,3)$$

ή

$$3 \mid \alpha-(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu) \qquad (1)$$

Αν $3\mid\alpha$, από την (1) προκύπτει $3\mid(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu)$.
Αν $3\mid(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu)$, τότε πάλι από την (1) προκύπτει ότι $3\mid\alpha$.
Άρα λοιπόν ισχύει

$$3\mid\alpha \Leftrightarrow 3\mid(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu).$$ ■

Σημείωση: Ομοίως αποδεικνύεται και το κριτήριο διαιρετότητας με το 9

$$9\mid\alpha \Leftrightarrow 9\mid(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu).$$

Εφαρμογή 2. (Κριτήριο διαιρετότητας με το 11)
Αν

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1\cdot 10+\alpha_2\cdot 10^2+\ldots+\alpha_\nu\cdot 10^\nu$$

είναι η δεκαδική παράσταση του θετικού ακεραίου α, τότε ισχύει

$$11\mid\alpha \Leftrightarrow 11\mid(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ldots+(-1)^\nu\alpha_\nu).$$

Απόδειξη:
Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\alpha_\nu\cdot 10^\nu \equiv (-1)^\nu\alpha_\nu(\mathrm{mod}\,11),$$

δηλαδή ο αριμός $\beta_\nu \equiv \alpha_\nu\cdot 10^\nu-(-1)^\nu\cdot\alpha_\nu$ διαιρείται με το 11.

- Αν ο ν είναι περιττός, ο αριθμός β_ν γράφεται
$$\beta_\nu = \alpha_\nu\cdot 10^\nu \alpha_\nu = \alpha_\nu\cdot(10^\nu+1) =$$
$$\alpha_\nu(10+1)\cdot(10^{\nu-1}-10^{\nu-2}+\ldots-10+1) =$$
$$11\alpha_\nu\cdot(10^{\nu-1}-10^{\nu-2}+\ldots-10+1) =$$
πολλαπλάσιο του 11.
- Αν ο ν είναι άρτιος με $\nu=2\kappa(\kappa \in \mathbb{N})$, τότε
$$\beta_\nu = \alpha_\nu\cdot 10^\nu-\alpha_\nu = \alpha_\nu(10^\nu-1) = \alpha_\nu(100^\kappa-1) =$$
$$\alpha_\nu\cdot 99\cdot(100^{\kappa-1}+100^{\kappa-2}+\ldots+100+1) =$$
πολλαλάσιο του 11.

Έτσι έχουμε τις ισοτιμίες

$$\alpha_0 \equiv \alpha_0(\mathrm{mod}\,11),\quad \alpha_1\cdot 10 \equiv -\alpha_1(\mathrm{mod}\,11),$$
$$\alpha_2\cdot 10^2 \equiv \alpha_2(\mathrm{mod}\,11),\ \ldots,\ \alpha_\nu\cdot 10^\nu \equiv (-1)^\nu\alpha_\nu(\mathrm{mod}\,11)$$

και συνεχίζουμε όπως στην εφαρμογή 1.

Σημείωση: Παρατηρώντας ότι $10^\nu \equiv 3^\nu(\mathrm{mod}\,7)$, διαπιστώνουμε ότι

$$7\mid\alpha \Leftrightarrow 7\mid(\alpha_0+3\alpha_1+3^2\alpha_2+\ldots+3^\nu\alpha_\nu).$$ ■

Εφαρμογή 3
Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $3^{614}:5$ και το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 3^{614}.

Απόδειξη:

α) Προσπαθούμε να γράψουμε ισοτιμία της μορφής
$$3^{614} \equiv \kappa(\mathrm{mos}\,5) \text{ με } 0\le\kappa<5,$$
οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ο ακέραιος κ.
Ισχύουν οι ισοτιμίες
$$3^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$$
$$3^3 \equiv 12(\mathrm{mod}\,5) \text{ ή } 3^3 \equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$$
$$3^4 \equiv 6(\mathrm{mod}\,5) \text{ ή } 3^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$$
Ο αριθμός 614, διαιρούμενος με το 4, γράφεται
$$614=153\cdot 4+2.$$
Επειδή $3^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, έχουμε
$$(3^4)^{153} \equiv 1^{153}(\mathrm{mod}\,5),\ \text{δηλαδή } 3^{612} \equiv 1(\mathrm{mod}\,5).$$
Επομένως $3^{164} \equiv 3^2(\mathrm{mod}\,5)$, δηλαδή $3^{614} \equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$.
Η τελευταία ισοτιμία δείχνει ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $3^{614}:5$ είναι 4.

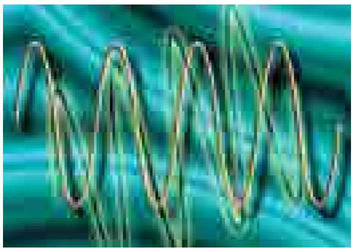
β) Από το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει ότι ο αριθμός 3^{614} γράφεται με τη μορφή $5\mu+4$, $\mu \in \mathbb{N}^*$. Ο αριθμός 5μ, ως πολλαπλάσιο του 5, λήγει σε 0 ή 5 και επομένως ο 3^{614} λήγει σε 4 ή 9. Αλλά ο 3^{614}, ως δύναμη περιττού αριθμού, είναι περιττός και κατά συνέπεια το τελευταίο ψηφίο του είναι το 9. ◆

Εσεις ρωτάτε

Εμεις προσπαθούμε ν' απαντήσουμε

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο (α, β) και συνεχής στο $x_0 \in$ (α, β) όπου έχει τοπικό ελάχιστο, είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0, β);*

Η απάντηση στο απόσπασμα από το «Βιβλίο του Διδάσκοντος», σελ. 5 αυτού του τεύχους.



ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Του **Μ. Λουβερδή,** Φυσικού

Μέσα στο πλαίσιο να μην περιχαρακώνεται ο υποψήφιος και να μην τυποποιεί τη σκέψη του, αλλά να είναι υποψιασμένος και πάνω σε αντικείμενα ευρύτερου προβληματισμού επιβάλλει την ενασχόλησή του με θέματα που ξεπερνούν την οριοθέτηση του σχολικού βιβλίου. Γι' αυτό προτείνεται το παρακάτω θέμα που αναφέρεται σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος.

Άσκηση

Ωμική αντίσταση, πηνίο και πυκνωτής χωρητικότητας $C = \frac{2}{15}$ mF συνδέονται σε σειρά και το κύκλωμα τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση. Τα πλάτη των τάσεων στα άκρα των τριών στοιχείων είναι αντίστοιχα

$V_{0R}=10\sqrt{2}$ V, $V_{0πην}=20$ V και $V_{0C}=30\sqrt{2}$ V.

Η ισχύς που δαπανάται στο πηνίο και στο κύκλωμα είναι αντίστοιχα $\bar{P}_{πην}=20W$ και $\bar{P}_{κυκλ}=40W$.

Να βρεθούν:

α) Οι εξισώσεις όλων των τάσεων σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς και η εξίσωση έντασης του ρεύματος $I=f(t)$ αν τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι η τάση του πυκνωτή $V_C=0$.

β) Οι ρυθμοί μεταβολής $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ έντασης του ρεύματος και $\frac{\Delta V_C}{\Delta t}$ της τάσης στα άκρα του πυκνωτή.

γ) Να βρεθεί η στιγμιαία ισχύς στα άκρα του κυκλώματος καθώς και οι στιγμιαίες ισχύς στα άκρα του πηνίου του πυκνωτή και της αντίστασης τη χρονική στιγμή $t = T\backslash 8$.

δ) Η μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου, και μαγνητικού πεδίου που αποθηκεύονται αντίστοιχα στον πυκνωτή και το πηνίο.

ε) Για πόσο χρονικό διάστημα σε μια περίοδο το κύκλωμα προσφέρει ενέργεια στην πηγή εναλλασσόμενης τάσης.

Λύση

Η μέση ισχύς στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{P}_{κυκλ}=I^2_{εν}(R+R_π) \quad (1)$$

στο πηνίο $\quad \bar{P}_{πην} = I^2_{εν}R_π \quad (2)$

διαιρώ (1)\(2) : $\frac{\bar{P}_{κυκλ}}{\bar{P}_{πην}} = \frac{I^2_{εν}(R+R_π)}{I^2_{εν}R_π} \qquad R = R_π \quad (3)$

$$\bar{P}_R = \bar{P}_{πην} \quad \text{γιατί} \quad \bar{P}_R = I^2_{εν}P - I^2_{εν}R_π = 20 \text{ W}$$

$$\bar{P}_R = \frac{V^2_{ενR}}{R} \qquad R = \frac{V^2_{ενR}}{\bar{P}_R} \qquad R = 5\ Ω \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) $\quad R = R_π = 5\ Ω$.

Υπολογίζω το $I_0 = \frac{V_{0R}}{R} = \frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$ A

Η εμπέδηση του πηνίου είναι

$$Z_π = \frac{V_{0πην}}{I_0} = 5\sqrt{2}\ Ω.$$

Όμως

$$Z_{πην} = \sqrt{R^2_π+(Z_L)^2} \qquad Z_L = \sqrt{Z^2_{πην}-R^2_π} \qquad Z_L = 5Ω$$

Η διαφορά φάσης της τάσης του πηνίου και του ρεύματος είναι

$$εφ\,φ = \frac{Z_L}{R_π} = \frac{5}{5} = 1 \qquad φ = \frac{π}{4} \text{ rad.}$$

Το ρεύμα υστερεί της τάσης του πηνίου κατά π/4.
Υπολογίζω την εμπέδηση του πυκνωτή

$$Z_C = \frac{V_{0C}}{I_0} = 15\ Ω$$

βρίσκω τη διαφορά φάσης της ολικής τάσης του κυκλώματος και του ρεύματος

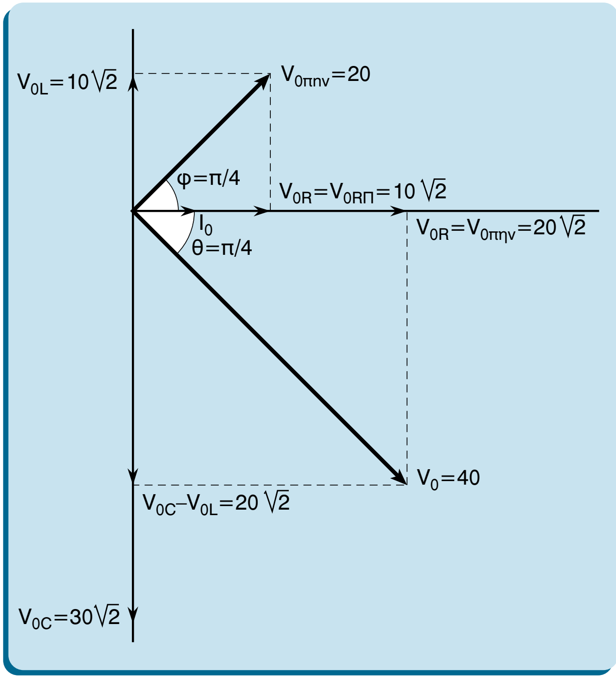
$$εφθ = \frac{Z_L-Z_C}{R+R_π} = \frac{Ω5-15Ω}{5+5} = 1 \qquad θ = \frac{π}{4} \text{ rad}$$

Έτσι το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά π/4.

Από την εμπέδηση του πυκνωτή υπολογίζω την ω

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} \qquad \omega = \frac{1}{Z_C C} \qquad \omega = 500 \text{ rad/sec}$$

Φτιάχνω διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων



Αν λάβουμε ως αναφορά την τάση του πυκνωτή ($t=0 \quad V_c=0$) τότε έχουμε τις εξισώσεις:

α) Επαγωγική τάση $\quad V_L = 10\sqrt{2}\,\eta\mu\,(500t+\pi)$

Τάση στο πηνίο $\quad V_\pi = 20\,\eta\mu\left(500t + \frac{3\pi}{4}\right)$

Τάση στην αντίσταση R $\quad V_R = 10\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right)$

Τάση στον πυκνωτή $\quad V_C = 30\sqrt{2}\,\eta\mu\,500t$

Τάση στο κύκλωμα $\quad V = 40\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{4}\right)$

όπου $V_0=I_0 Z=40$ V

$$Z = \sqrt{(R+R_\pi)^2+(Z_L-Z_C)^2} = 10\sqrt{2}\ \Omega$$

Εξίσωση έντασης

$$I = 2\sqrt{2}\,\eta\mu(500t + \frac{\pi}{2})$$

β) $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{V_L}{L}$ (γιατί $V_\Lambda = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$)

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{2}\,\eta\mu(500t+\pi)}{10^{-2}} = 10^3\sqrt{2}\,\eta\mu(500t+\pi)$$

υπολογίζω το L από:

$$Z_L = L\omega \qquad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{5}{500} = 10^{-2}\text{H}.$$

Έχω τη σχέση

$$Q = CV_L \qquad V_C = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{\Delta V_C}{\Delta t} = \frac{1}{C}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \frac{\Delta V_C}{\Delta t} = \frac{I}{C}$$

$$\frac{\Delta V_C}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t+\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2}{15}10^{-3}} =$$

$$15\sqrt{2}\,10^3\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right).$$

γ) $P_{\pi\eta\nu} = V_{\pi\eta\nu} I =$

$$20\eta\mu\left(500t + \frac{3\pi}{4}\right)2\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$P_R = V_R I =$

$$10\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right)2\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

20 Watt

$P_C = V_C I =$

$$30\sqrt{2}\,\eta\mu(500t)\,2\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right)$$

600 Watt

$P_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma} = VI =$

$$40\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{4}\right)2\sqrt{2}\,\eta\mu\left(500t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

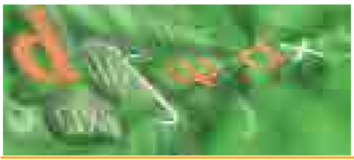
80 Watt

δ) $W_{0L} = \frac{1}{2} = 4\ 10^{-2}$ J $\quad$ μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου

$W_{0C} = \frac{1}{2}C V_{0C}^2 = 120$ mJ $\quad$ μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου

ε) Όταν η στιγμιαία ισχύς είναι αρνητική τότε το κύκλωμα προσφέρει ενέργεια στην γεννήτρια

$$t = \frac{2\theta}{\omega} = \frac{2\frac{\pi}{4}}{500} = \frac{\pi}{1000} \qquad \tau = \pi\cdot10^{-3}\text{ sec.}$$



ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΠΟΣΑ

Του **Θ. Βαγενά,** Φυσικού

1. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΠΟΣΑ (παράγωγος)

Η δοκιμασία μας να δώσουμε ή να πάρουμε ενέργεια σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα καθιέρωσε ένα νέο φυσικό μέγεθος που ονομάζεται ισχύς. Η μαθηματική διατύπωση που εκφράζει το θεωρητικό ορισμό είναι:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}\ .$$

Ο συμβολισμός $\frac{\Delta w}{\Delta t}$ εκφράζει το στοιχειώδες ποσό ενέργειας που ανταλλάσσει το σύστημα προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt, όπου προφανώς αναφερόμαστε σε χρονική στιγμή $\Delta t>0$.

α) Στην απλούστερη περίπτωση η τιμή ΔW υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta W = W_{τελ.} - W_{αρχ.}$$

Εάν διαιρέσουμε την ποσότητα ΔW με τον αντίστοιχο χρόνο θα πάρουμε τη μέση τιμή της ισχύος.

Σίγουρα ο ορισμός αυτός μας δείχνει ότι το Δ δεν είναι παρά διαφορά της τελικής τιμής από την αρχική. Θα μας έχει λυτρώσει η χρησιμοποίηση του παραπάνω τύπου κατά τον υπολογισμό της στιγμιαίας ισχύος αν ίσχυε πάντοτε.

Και αυτό θα συνέβαινε αν το W ήταν γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Στην περίπτωση αυτή μέση και στιγμιαία ισχύς ταυτίζονται.

$$W = W_0 + αt.$$

Δε συμβαίνει όμως πάντα αυτό. Έτσι:

β) Ταυτίζοντας το ΔW με το διαφορικό dW κάνουμε την εξής σκέψη:

$$P = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\Delta(Fs)}{\Delta t} = F\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = F\upsilon_{στιγμιαία(\Delta t\ \ 0)}.$$

Για να καταδειχτεί με τον απλούστερο δυνατό τρόπο η σκέψη μας προτιμήθηκε σαν παράδειγμα η μηχανική ισχύς.

Υποθέσαμε ότι στον απειροστό χρόνο Δt η δύναμη F παραμένει σταθερή. Αν τώρα η προσφορά ενέργειας γίνεται με την εφαρμογή σταθερής δύναμης F το αποτέλεσμα είναι πάλι στιγμιαία ισχύς, διότι η *ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο και σε κάθε χρονική στιγμή* παίρνει διαφορετική τιμή. Εάν κάνουμε τη γραφική παράσταση ενέργειας-χρόνου η κλίση της καμπύλης μας δίνει την ισχύ.

2. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΠΟΣΑ (ολοκλήρωμα)

Από τον ορισμό του μηχανικού έργου W=Fsσυνφ προκύπτει το ερώτημα πώς θα το υπολογίζαμε στην περίπτωση που η τιμή της δύναμης και του διαστήματος μεταβάλλονται;

Σαν πρώτη απάντηση είναι ότι δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μεγέθη που μεταβάλλονται. Το ερώτημα είναι πώς μπορεί να γίνει υπολογισμός για ένα τέτοιο μέγεθος που προκύπτει από το γινόμενο μεγεθών που μεταβάλλονται; Παρατίθενται δύο γενικοί τρόποι:

Α) Γραφική παράσταση

Είναι δυνατό με τη βοήθεια μιας γραφικής παράστασης να υπολογισθεί η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους ω, όταν αυτό είναι γινόμενο δύο άλλων μεγεθών τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση ψ=f(χ). Σε διάγραμμα ψ–χ παριστάνουμε την ψ=f(χ) για το διάστημα [α, β] που μας ενδιαφέρει. Αν

$$\Delta\omega = \psi_i \Delta\chi$$

τότε

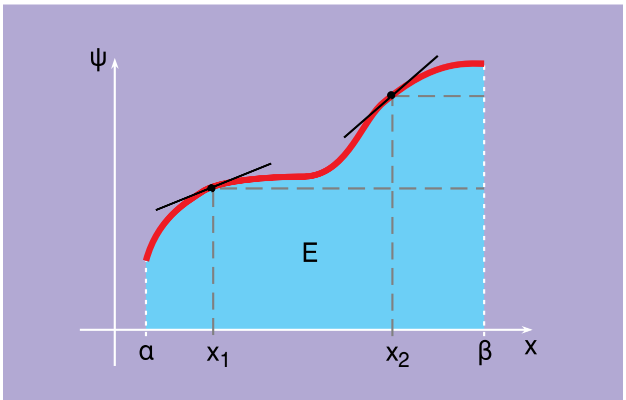
$\omega = \quad \psi_i \Delta\chi =$ αριθμητικά με το εμβαδό του χωρίου μεταξύ της καμπύλης και του άξονα χ με όρια τις ευθείες χ=α και χ=β.

Β) Ολοκληρωτικός λογισμός

Για την παραπάνω συνάρτηση f το εμβαδό του συγκεκριμένου χωρίου της f από το α έως β

$$\left[\int_{α}^{β} f(x)dx \text{ συμβολισμός}\right]$$

είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα και παίρνει μόνο μία τιμή για το διάστημα [α, β].



$\frac{d\psi}{dx}$ = κλίση της καμπύλης

$\int_\alpha^\beta \psi\, dx$ = αριθμητικά με το εμβαδό

ΣΧΟΛΙΑ

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το α έως το β παίρνει μόνο μία τιμή για το διάστημα [α, β].

Σε αντίθεση η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα [α, β] είναι μια νέα συνάρτηση και παίρνει άπειρες τιμές στο [α, β].

Όπως αναφέρθηκε η ισχύς P είναι **πρώτη παράγωγος** του έργου ως προς το χρόνο.

Έτσι έχει νόημα η στιγμιαία ισχύς

$$P_{\text{στιγμ.}} = \frac{dW}{dt} = Fu_{\text{στιγμ.}}$$

σε αντίθεση με την περίπτωση του έργου όπου η έκφραση στιγμιαίο έργο $W_{\text{στιγμ.}}$ δεν έχει έννοια.

Παρατηρούμε ότι εδώ **πολλαπλασιάζουμε μεγέθη που μεταβάλλονται**, όπως η ταχύτητα, και παίρνουμε άπειρες τιμές για την ισχύ. *Αυτό οφείλεται στο ότι η ισχύς είναι παράγωγος και* παίρνει άπειρες τιμές για το διάστημα [α, β], αφού γνωρίζουμε ότι η παράγωγος είναι νέα συνάρτηση για το διάστημα [α, β].

Για αυτό ακριβώς στην περίπτωση του εναλλασσόμενου ρεύματος, όπου τόσο η τάση V, όσο και το ρεύμα I μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου, ο υπολογισμός της ισχύος γίνεται πολλαπλασιάζοντας απλώς τη στιγμιαία τιμή της τάσης και της έντασης:

$$P = V \cdot I$$

Πολλαπλασιάζουμε δηλαδή δύο μεγέθη που μεταβάλλονται και καταλήγουμε σε ορθό αποτέλεσμα (σε αντίθεση με τη διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό του έργου, όπου μια ανάλογη τακτική οδηγεί σε εσφαλμένα αποτελέσματα).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

i. *Έργο δύναμης F μεταβαλλόμενης με την απόσταση s*

$$\Delta W = F\Delta s$$

$$\Delta W = \quad F\Delta s$$

$$W_{ολ} = \quad F\Delta s$$

Η δύναμη του ελατηρίου αποτελεί εφαρμογή της παραπάνω σκέψης για μια μετατόπιση Δx. Σύμφωνα με το νόμο του Hooke $F=Kx$. Οπότε έχουμε:

$$\Delta W = F\Delta x \qquad \Delta W = Kx\Delta x$$

$$\Delta W = \quad Kx\Delta x \qquad W = \frac{1}{2}Kx^2$$

ii. *Υπολογισμός της ενέργειας με τη βοήθεια της ισχύος.*

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \Delta W = P\Delta t \qquad \Delta W = \quad P\Delta t.$$

Το αποτελεί ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση.

Η άσκηση 20 του σχολικού βιβλίου[1] είναι εφαρμογή της παραπάνω σκέψης.

«Η απομάκρυνση x σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση

$$x = x_0 ημωt.$$

Αν η τριβή F που αντιστέκεται στην ταλάντωση είναι $F=-bu$ όπου b η σταθερά απόσβεσης, να βρεθεί η ενέργεια που πρέπει να προσφέρεται μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης, ανά κύκλο, για να διατηρείται αμείωτη η ταλάντωση».

$$P = Fu \qquad P = bu^2 \qquad P = b\omega^2 x_0^2\, συν^2\omega t \qquad (1)$$

$$\Delta W = P\Delta t \qquad (2)$$

$$\Delta W = P\Delta t \overset{(1)}{\quad} \Delta W = b\omega^2 x_0^2\, συν^2 \omega t\Delta t$$

$$\Delta W = b\omega^2 x_0^2 \quad συν^2\omega t\Delta t \qquad W_{ολ} =$$

$$b\omega^2 x_0^2 \quad \frac{1+συν2\omega t}{2}\Delta t$$

$$W_{ολ} = b\omega^2 x_0^2\left[\quad \frac{1}{2}\Delta t + \quad \frac{συν2\omega t}{2}\Delta t\right] =$$

$$b\omega^2 x_0^2 \frac{T}{2} = \frac{b\omega^2 x_0^2\, 2\pi}{2\omega}$$

$$W_{ολ} = b\omega x_0^2 \pi.$$

1. Φυσική Γ Λυκείου (Βλάχος Ι. - Ζάχος Κ. - Κόκκοτας Π. - Τιμοθέου Γ. Κεφ. 11 (σελ. 417).

iii. *Θερμότητα που αναπτύσσεται σε μια ωμική αντίσταση.*

$$\Delta Q = I^2 R \Delta t \qquad \Delta Q = \quad I^2 R \Delta t.$$

Να υπολογιστεί όταν $I = I_0 ημωt$.

$$Q_{ολ} = \quad I_0^2 ημ^2ωt\, R\, \Delta t = \quad I_0^2 \frac{1-συν2ωt}{2} R\, \Delta t$$

$$Q_{ολ} = \quad I_0^2 \frac{R}{2} \Delta t - \quad I_0^2 \frac{R}{2} συνωt\, \Delta t = \frac{I_0^2}{2R} \quad \Delta t - 0$$

$$Q_{ολ} = \frac{I_0^2 R\, T}{2}$$

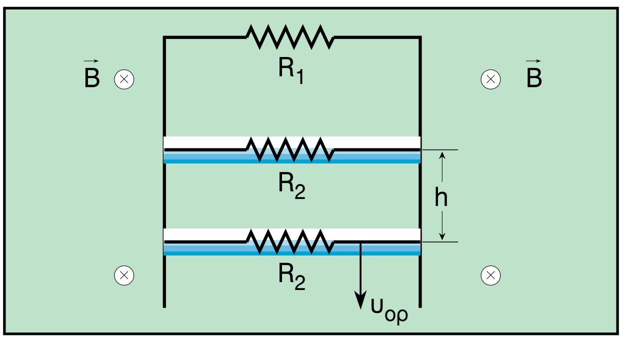
iv. *Κατά την κίνηση ράβδου ΚΛ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο αφού αποκτήσει οριακή ταχύτητα σε απόσταση h, τα ποσά θερμότητα στις R_1, R_2 είναι:*

$$\Delta Q_1 = I^2 R_1 \Delta t \qquad \Delta Q_1 = \quad I^2 R_1 \Delta t$$

$$Q_1 = R_1 \quad I^2 \Delta t \qquad (1)$$

$$\Delta Q_2 = I^2 R_2 \Delta t \qquad \Delta Q_2 = \quad I^2 R_2 \Delta t$$

$$Q_2 = R_2 \quad I^2 \Delta t \qquad (2)$$



Διαιρούμε τις 1 και 2 κατά μέλη:

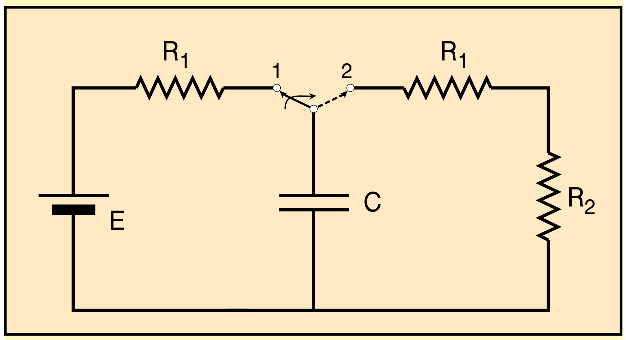
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \frac{Q_1+Q_2}{Q_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$Q_{ολ} = \frac{Q_2(R_1+R_2)}{R_2}$$

Η κατηγορία αυτή αποτελεί μια ιδιαίτερη εφαρμογή των στοιχειωδών ποσών.

Άσκηση

Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση 1, το φαινόμενο της φόρτισης έχει τελειώσει και η αποθηκευμένη στο ηλεκτροστατικό πεδίο του πυκνωτή ενέργεια είναι W=40 mJ. Φέρνουμε στη συνέχεια το διακόπτη στη θέση 2. Να βρεθούν οι θερμότητες Q_1, Q_2 που αναπτύσσονται στις αντιστάσεις R_1, R_2 αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια της εκφόρτισης. Δίνεται ο λόγος των αντιστάσεων $\frac{R_1}{R_2}=4$.



ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ σε ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ και ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Για μαθητές από την Α' μέχρι και τη Γ' Λυκείου

Του **Γ. Ατρείδη,** Φυσικού

Στο τεύχος αυτό θα ασχοληθούμε με προβλήματα που αναφέρονται στην κίνηση σώματος πάνω σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο. Τα προβλήματα αυτά είναι πολύ σημαντικά επειδή συνδυάζουν τη δυναμική και την κινητική της Α' λυκείου, μπορούν όμως να λυθούν και με τη θεωρία των ενεργειών.

Α' τρόπος

(Μελέτη με εξισώσεις δυναμικής και κινητικής)

Στις περισσότερες των περιπτώσεων το κλειδί της άσκησης είναι ο υπολογισμός της επιτάχυνσης (ή επιβράδυνσης) κατά την κίνηση του σώματος.

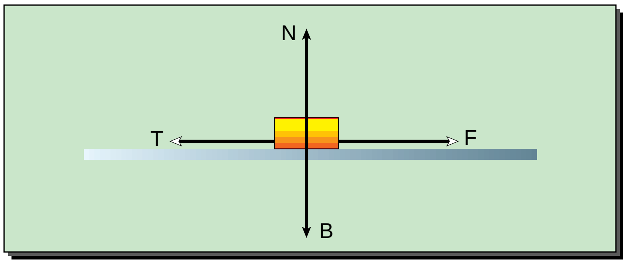
Θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό της επιτάχυνσης για ένα σώμα το οποίο κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης F και της τριβής.

Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

- Εκλέγουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ο ένας άξονας βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση της κίνησης και ο άλλος κάθετος στον προηγούμενο.
- Στον άξονα ο οποίος είναι κάθετος στην κίνηση η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν. Από τη συνθήκη αυτή υπολογίζουμε την κάθετη αντίδραση (N).
- Υπολογίζουμε την τριβή από το νόμο της τριβής $T = nN$.
- Αφού το σώμα κινείται επιταχυνόμενο, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα αυτό είναι ίση με το γινόμενο $m\gamma$.
- Υπολογίζοντας με τον τρόπο αυτό την επιτάχυνση μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στις εξισώσεις της κινητικής για να βρούμε αυτά που μας ζητάει το πρόβλημα.

☛ ΠΡΟΣΕΞΕ: Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε και στον άξονα της κίνησης η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν.

Ας επεξεργαστούμε μαθηματικά το παραπάνω πρόβλημα.



Η κίνηση γίνεται στον οριζόντιο άξονα. Εκλέγουμε έναν οριζόντιο και ένα κατακόρυφο άξονα. Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N - B = 0 \qquad N = B \qquad N = mg.$

Από το νόμο της τριβής έχουμε: $T = nN = nmg$*.

Για να κινηθεί το σώμα επιταχυνόμενο θα πρέπει $F > T$.

Στον οριζόντιο άξονα έχουμε :

$$\Sigma F_x = m\gamma \qquad F - T = m\gamma \qquad \gamma = \frac{F-T}{m}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση την τριβή παίρνουμε:

$$\gamma = \frac{F - nmg}{m}.$$

Πρόβλημα

Σώμα το οποίο έχει μάζα $m=4$ kgr ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F=20$ N η οποία σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο για χρόνο $t_1=5$ sec. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το επίπεδο είναι $n=0{,}15$. Να βρείτε πόσο διάστημα θα έχει διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει. Δίνεται $g=10$ m/sec^2.

Λύση

Στο παραπάνω πρόβλημα το σώμα εκτελεί δύο κινήσεις. Στο χρόνο t_1 που θα επιδρά πάνω του η δύναμη F θα επιταχύνεται με την επίδραση της συνι-

---

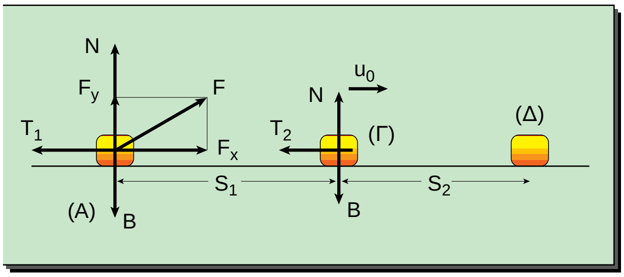
* Αναφέρεται στην τριβή ολίσθησης

σταμένης $F_x – T_1$. Στη συνέχεια αυτό θα επιβραδύνεται υπό την επίδραση της T_2.

Για την επιταχυνόμενη κίνηση έχουμε

$$\Sigma F_\psi = 0 \quad N + F_\psi - B = 0 \quad N = B - F_\psi \qquad (1)$$

$$\Sigma F_x = m\gamma \quad F_x - T_1 = m\gamma \qquad (2)$$



Για τις συνιστώσες F_x και F_ψ έχουμε:

$$F_x = F\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,N \qquad (3)$$

και

$$F_\psi = F\eta\mu 30^\circ = 20\,\frac{1}{2} = 10\ N. \qquad (4)$$

Από τις (1) και (4) έχουμε:

$$N = B - F_\psi = mg - F_\psi = 40 - 10 = 30\ N \text{ και}$$

$$T_1 = nN = 0{,}15 \cdot 30 = 4{,}5\ N$$

Από την (2) παίρνουμε:

$$\gamma_1 = \frac{F_x - T_1}{m} \qquad \gamma_1 = \frac{10\sqrt{3} - 4{,}5}{4} = 3{,}2\ m/sec^2$$

Το διάστημα στην επιταχυνόμενη κίνηση θα είναι:

$$S_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 t_1^2 \qquad S_1 = 40\ m.$$

Η ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει το σώμα είναι:

$$\upsilon_0 = \gamma_1 t_1 = 3{,}2 \cdot 5 = 16 m/sec.$$

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N - B = 0 \qquad N = B$$

$$\Sigma F_x = m\gamma_2 \qquad -T_2 = m\gamma_2 \qquad \gamma_2 = -\frac{T_2}{m} \qquad (5)$$

και $\qquad T_2 = nN = nB = nmg = 6N \qquad (6)$

Από τις (5) και (6) έχουμε: $\gamma_2 = -1{,}5\ m/sec^2$.

Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει το σώμα βρίσκεται ως εξής.

Όταν σταματάει το σώμα η τελική ταχύτητά του είναι μηδέν.

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma_2 t_2 \qquad 0 = \upsilon_0 - \gamma_2 t_2 \qquad \gamma_2 t_2 = \upsilon_0$$

$$t_2 = \frac{\upsilon_0}{\gamma_2} \qquad t_2 = \frac{16}{1{,}5} = 10{,}66\ sec$$

και το S_2 θα είναι:

$$S_2 = \upsilon_0 t_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 t^2 = 16 \cdot 10{,}66 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 10{,}66^2 =$$

$$= 170{,}66 - 85{,}2267 = 85{,}33\ m$$

και $\qquad S = S_1 + S_2 = 145{,}33\ m.$

Β' τρόπος

(Ενεργειακά)

Αφού έχουμε βρει την ταχύτητα στο σημείο (Γ) χρησιμοποιούμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για την κίνηση του σώματος από το (Α) στο (Γ).

$$E^0_{\kappa(A)} + W_F + W_{T_1} = E_{\kappa(\Gamma)}$$

$$F \cdot S_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ - T_1 S_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

$$20 S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - 4{,}5 S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16^2$$

$$10\sqrt{3} S_1 - 4{,}5 S_1 = 512 \qquad S_1 = 40\ m$$

και με ΘΜΚΕ από το (Γ) μέχρι το (Δ) βρίσκουμε το S_2.

$$E_{\kappa(\Gamma)} + W_{T2} = E_{\kappa(\Delta)} \qquad \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 - T_2 S_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16^2 = 6 \cdot S_2 \qquad 512 = 6 \cdot S_2$$

$$S_2 = 85{,}33\ m$$

και $\qquad S = S_1 + S_2 = 145{,}33\ m.$

• Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Στο κεκλιμένο επίπεδο συνήθως ξεκινάμε με τις παρακάτω ενέργειες:

- Εκλέγουμε δυο άξονες. Ένα παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο και ένα κάθετο σ' αυτόν.
- Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που υπάρχουν πάνω στους άξονες αυτούς (όσες χρειάζονται ανάλυση).
- Στον άξονα ψ παίρνουμε $\Sigma F_\psi = 0$ και υπολογίζουμε την αντίδραση N.
- Βρίσκουμε την τριβή από το νόμο $T = nN$.
- Αν το σώμα κινείται επιταχυνόμενο στον άξονα x παίρνουμε $\Sigma F_x = m\gamma$ και υπολογίζουμε την επιτάχυνση γ.
- Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της κινητικής για να υπολογίσουμε τα μεγέθη που ζητάει το πρόβλημα.

☛ ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν στον άξονα x η κίνηση είναι ομαλή, ισχύει και σ' αυτόν $\Sigma F_x = 0$.

Πρόβλημα

Ένα σώμα βάλλεται προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10$ m/sec. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το επίπεδο είναι $n = 0{,}1$ και η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου $\varphi = 30^\circ$. Να βρεθεί το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.

Λύση

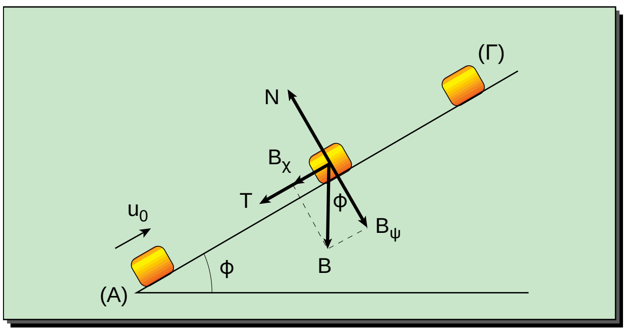
Α' τρόπος

Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε για τις συνιστώσες του βάρους:

$$B_x = mg\eta\mu\varphi \quad \text{και} \quad B_\psi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Στον άξονα των ψ έχουμε:

$$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N - B_\psi = 0 \qquad N = B_\psi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$



Από το νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = nN = nmg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Στον άξονα των x έχουμε

$$\Sigma F_x = m\gamma \qquad -B_x - T = m\gamma$$

$$-mg\eta\mu\varphi - nmg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\gamma.$$

Και $\gamma = -g\eta\mu\varphi - ng\sigma\upsilon\nu\varphi = -5{,}866$ m/sec^2.

Από τη σχέση που μας δίνει το ολικό διάστημα στην επιβραδυνόμενη κίνηση έχουμε:

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} = 8{,}52\text{m}.$$

- *Μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τις γενικές σχέσεις της επιβραδυνόμενης κίνησης.*

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t \quad \text{και} \quad S = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$$

βρίσκοντας από την πρώτη το χρόνο και από τη δεύτερη το διάστημα.

Β' τρόπος

Χρησιμοποιώντας θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τις θέσεις (Α) και (Γ) παίρνουμε:

$$E_{\kappa(A)} + W_{B_x} + W_T = E_{\kappa(\Gamma)}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - B_x \cdot S - T \cdot S = 0$$

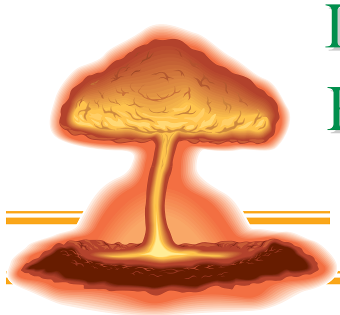
$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - mg\eta\mu\varphi S - nmg\sigma\upsilon\nu\varphi S = 0$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgS(\eta\mu\varphi + n\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{2g(\eta\mu\varphi + n\sigma\upsilon\nu\varphi)} =$$

$$= \frac{10^2}{2 \cdot 10\left(\frac{1}{2} + 0{,}1\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 8{,}52 \text{ m}.$$

◆



ΠΥΡΗΝΙΚΑ ΑΤΥΧΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΡΑΔΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΣΕΡΝΟΜΠΙΛ

Του **Κ. Παπαστεφάνου,** Καθηγητή Πυρηνικής Φυσικής στο Α.Π.Θ.

Μέσα στη δύνη των καιρών μας, των πολεμικών εξοπλισμών και ανταγωνισμών, του πολέμου των άστρων και των πυρηνικών δοκιμών, ένα πυρηνικό ατύχημα συντάραξε την ανθρωπότητα ολόκληρη και δεν είναι παρά μια εισαγωγή ενός επικειμένου(;) πυρηνικού ολοκληρώματος που μας επιφυλάσσει το σύνολο των πυρηνικών οπλοστασίων όλων των δυνάμεων της γης μεγάλων και μικρών. Γιατί έχουν και οι μικροί μεγάλα οπολοστάσια.

Το Τσερνομπίλ μια μικρή και άσημη ως χτες πόλη της Σοβιετικής Ένωσης, 160 περίπου χιλιόμετρα βόρεια του Κιέβου στην Καρδιά της Ουκρανίας, έστησε την πιο μεγάλη του παράσταση με μια μόνο πράξη: Έκρηξη και τήξη του αντιδραστήρα, που από τα σωθικά του τίναξε ψηλά στους αιθέρες τα ραδιενεργά προϊόντα, νέφος τεράστιο, πυρηνικό και σκόρπισε στους τέσσερις ορίζοντες τη συμφορά.

Η Πυρηνική ενέργεια για την Ειρήνη και η Ειρήνη για τον αφανισμό. Πόσο παράηχα ακούγεται!

Το πυρηνικό ατύχημα του Τσερνομπίλ πέρασε σαν το μοναδικό στα χρονικά της Πυρηνικής ενέργειας. Κι ίσως γι' αυτό χρειάστηκε καιρός πολύς για να εκτιμηθεί το μέγεθός του, οι επιπτώσεις του. Αν πριν από το ατύχημα είχε ερωτηθεί πυρηνικός μηχανικός-σχεδιαστής πυρηνικού εργοστασίου, ποια είναι η πιθανότητα για ένα τέτοιο ατύχημα δίνοντάς του όλο το σενάριο όπως πρόσφατα γράφτηκε, θα 'λεγε 1:1.000.000 και ίσως 1:10.000.000. Το ατύχημα έγινε και η πολύ μικρή, ασήμαντη, πλην όμως υπαρκτή πιθανότητα έγινε πραγματικότητα.

437 είναι τα πυρηνικά εργοστάσια που λειτουργούν σήμερα πάνω στη Γη και άλλα 39 υπό κατασκευή* πολλαπλασιάζουν τη μικρή αυτή πιθανότητα και αυξάνουν τον κίνδυνο για νέα Τσερνομπίλ –προσφορά στις επερχόμενες γενεές γιατί όχι και στην παρούσα. Ποιος είπε πως μας ήταν αρκετό!

Η δική μας χώρα περιστοιχισμένη από 7 πυρηνικά εργοστάσια, 6 στη γειτονική Βουλγαρία και 1 στη Γιουγκοσλαβία δεν διαφέρει και πολύ από το νά 'χει η ίδια έστω και ένα δικό της.

Όποια και αν είναι τα αίτια του πυρηνικού ατυχήματος, και υπάρχουν πολλά, δεν έχει και τόση πολλή σημασία να αναλυθούν και να αναπτυχθούν εδώ.

Εμείς εδώ θα πούμε, τι σημαίνει το συγκεκριμένο ατύχημα για την Ελλάδα, τον Ελληνικό πληθυσμό, εμάς όλους. Παρά τις όποιες επιπτώσεις, όπως ψυχολογικές, οικονομικές (κάμποσα δις της Εθνικής οικονομίας) θα τις αντιπαρέλθουμε για να μείνουμε περισσότερο στις ραδιολογικές επιπτώσεις. Το ατύχημα του Τσερνομπίλ έγινε ως γνωστό την 01:23 του Σαββάτου 26 Απριλίου 1986 σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία που αναφέρονται σε έκρηξη και τήξη του αντιδραστήρα Νο. 4 ισχύος 1 GWe, ο τελευταίος της σειράς στο Τσερνομπίλ που άρχισε να λειτουργεί το 1984 (Ο Νο. 1 λειτουργεί από το 1978). Επτά χρόνια πριν, στις 28 Μαρτίου 1979 είχε προηγηθεί το ατύχημα του Three Mile Island της πολιτείας Πενσυλβάνια (ΗΠΑ) και ακόμα καλά καλά δεν το έχουμε ξεχάσει. Νωρίς την Δευτέρα 28 Απριλίου 1986 στην Ουψάλα της Σουηδίας, στις 9 π.μ. τεχνικοί Πυρηνικού εργοστασίου 100 περίπου χιλιόμετρα βόρεια της Στοκχόλμης παρατήρησαν στα όργανα ελέγχου ραδιενέργειας του περιβάλλοντος ασυνήθιστη αύξηση, γεγονός που προκάλεσε έντονη αναταραχή πως κάτι συνέβαινε στο δικό τους σταθμό. Γρήγορα διαπίστωσαν πως κάτι τέτοιο δεν συνέβαινε και δεν άργησαν να εντοπίσουν την κατεύθυνση της ακτινοβολίας και να την αναζητήσουν νοτιανατολικά της χώρας τους. Η ένταση της ακτινοβολίας δεν έχανε το καιρό της. Γρήγορα διπλασιάστηκε, τριπλασιάστηκε, ίσως εκατονταπλασιάστηκε (;) όπως γράφηκε από ορισμένες πηγές. Τα καιρικά φαινόμενα φαίνεται ότι έπαιξαν τον πρωτεύοντα ρόλο. Πνέοντας βορειοδυτικοί άνεμοι, ίσως είναι και οι επικρατέστεροι της περιοχής, γρήγορα μετέφεραν το ραδιενεργό νέφος μέσα σε 2 μέρες στη Σουηδία.

Στις ειδήσεις όλων των τηλεοπτικών δικτύων έγινες αμέσως πρώτο θέμα. Κι ο θόρυβος γύρω από το ατύχημα όλο και μεγάλωνε. Το Εργαστήριο Πυρηνικής Φυσικής του Παν/μίου Θεσσαλονίκης με ένα πολύ καλά εξοπλισμένο εργαστήριο ραδιενεργών μετρήσεων στα πλαίσια της έρευνας στη Ραδιενέργεια Περιβάλλοντος και τη Ραδιο-οικολογία, εντείνοντας τις προσπάθειές του για την παρακολούθηση του ραδιενεργού νέφους, έστησε μια σειρά από συστήματα ανίχνευσης και μέτρησης των ραδιενεργών ακτινοβολιών, όλων των ειδών των ακτινοβολιών, που εκπέμπονται από τα ραδιονουκλίδια του πυρηνικού νέφους. Μέχρι και το μεσημέρι της Παρασκευής 2 Μαΐου 1986, δεν υπήρχε στις εγγραφές των οργάνων μέτρησης καμιά ένδειξη που να πιστοποιεί την επίσκεψη του ραδιενεργού νέφους στην Ελλάδα. Το βράδυ όμως της Παρασκευής γύρω στις 8μ.μ. αυτή η αύξηση που ποτέ δε θα θέλαμε να δούμε ήταν γεγονός. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι υπήρξε συμφωνία με το χάρτη που δείχνει τις τροχιές του νέφους από 26 Απριλίου ως την 1η Μαΐου 1986 όπως δημοσιεύθηκε από ερευνητικό κέντρο της Καρλσρούης, Δυτ. Γερμανίας. Έτσι, στις 9μ.μ. διπλασιάστηκε η συνηθισμένη ένδειξη των οργάνων, αυτή που λέμε «Φυσική Ραδιενέργεια» που εδώ και χρόνια πριν απ' το ατύχημα δεν παρουσίαζε καμία σημαντική αυξομείωση, ενώ το Σάββατο 3 Μαΐου 1986 ώρα 1.30μ.μ. έγινε τριπλάσια, για να τετραπλασιαστεί την Κυριακή 4 Μαΐου 1986 (Κυριακή του Πάσχα) και να ανέβει αρκετά πιο πάνω ως το πρωί της Τρίτης 6 Μαΐου 1986 που είχαμε και τη μεγάλη ένδειξη, που όμως δεν ξεπέρασε τα επιτρεπτά όρια. Η πιο υψηλή καταγραφή δεν κράτησε για πολύ. Ευτυχώς!

Οι μετρήσεις μας που αφορούσαν τη ραδιενέργεια του περιβάλλοντος περιλάμβαναν τη ραδιενέργεια του αέρα, τη ραδιενέργεια του νερού της βροχής, τη ραδιενέργεια του εδάφους και τη ραδιενέργεια της χλόης. Σαν μοντέλο μελετήθηκε η ραδιενέργεια στην ευρύτερη περιοχή της πόλης της Θεσσαλονίκης για να εκτιμηθεί η ραδιενεργή φόρτιση από την πόλη

* International Atomic Energy Agency, IAEA, Vienna, July 1996.

–κατοικημένη περιοχή, το Θερμαϊκό κόλπο– θάλασσα, το Σέιχ Σου –δάσος, τη Βιομηχανική ζώνη στην ατμόσφαιρα της οποίας υπάρχουν ρυπαντές, τον Αξιό ποταμό με τις εκβολές του. Για τη μελέτη της κατανομής της ραδιενέργειας καθ' ύψος στην ατμόσφαιρα χρησιμοποιήθηκε ελικόπτερο εφοδιασμένο με φορητά όργανα ελέγχουν (monitors). Για τη θάλασσα του Θερμαϊκού και τον Αξιό ποταμό χρησιμοποιήθηκε ακταιωρός. Μετρήσεις που έγιναν σε διάφορες περιοχές της Βορ. Ελλάδος αλλά και αυτές στην περιοχή των Αθηνών που έδωσαν άλλες πηγές, δεν αλλάζουν το μοντέλο μελέτης.

Από την ανάλυση των μετρήσεων της ραδιενέργειας βρέθηκε ότι υφίσταται περίπου μια εικοσάδα ραδιενεργών νουκλιδίων σε διάφορες συγκεντρώσεις στον αέρα, το νερό της βροχής, το χώμα και τη χλόη.

Αναφέρονται ενδεικτικά μερικά από αυτά που τόσο πολύ συζητήθηκαν και που έχουν μια ιδιαιτερότητα ως προς τις επιπτώσεις στην υγεία μας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει κανένα ραδιενεργό νουκλίδιο που να μην προκαλεί έστω και ελάχιστη επίπτωση. Βρέθηκαν λοιπόν 131I, 137Cs, 134Cs, 136Cs, 140Ba, 140La, 132Te, 132I, 103Ru, κατά κυριότητα ως 100Ru, 125Sb, 108Ag, 239Np. Στην Αγγλία ανακοίνωσαν ότι ανίχνευσαν ακριβώς τα ίδια. Στη Σουηδία ανακοίνωσα ότι ανίχνευσαν 16 νουκλίδια μεταξύ των οποίων μερικά αρκετά βραχύβια όπως το 133I, προφανώς λόγω της γρήγορης μετακίνησης του νέφους στη χώρα τους. Έτσι, μπήκαν στη ζωή μας λέξεις καινούριες, εύηχες ή κακόηχες, ιώδιο-κάσιο-στρόντιο συνοδεία με αριθμούς και σαν να μην έφταναν μόνον αυτά, βομβαρδιστήκαμε με μικρορέντγκεν ανά ώρα, με μιλλιρέμ και μπεκερέλ, ποσότητες δόσης και ραδιενέργειας, αντίστοιχα. Ακούστηκε το ιώδιο να έχει σχέση με τον θυρεοειδή, το κάσιο να αποτίθεται σ' ολόκληρο το σώμα, το στρόντιο –συστατικό στο γάλα– να αντικαθιστά το ασβέστιο στα κόκαλα. Κι όλα τα μάθαμε.

Κι οι επιπτώσεις από τη βήτα ή γάμμα ακτινοβολία του νέφους; Σ' ένα περίγραμμα για το συγκεκριμένο ατύχημα έχουν κάπως έτσι: Στη γύρω από το πυρηνικό εργοστάσιο περιοχή τα συμπτώματα των αντινοβοληθέντων περνούν με ραγδαίο ρυθμό το ένα το άλλο: εγκεφαλικές αιμορραγίες, ναυτία, εμμετοί, διάρροια, απώλεια μυϊκής ισορροπίας και φυσικά θάνατος. Δόση πάνω από 400 rem που αντιστοιχούν σε έκθεση 2-3 ωρών.

Σε απόσταση 5-7 χιλιομέτρων τα θύματα έχουν πιθανότητα επιβίωσης πενήντα-πενήντα αν και όχι χωρίς κάποια βλάβη στο αιματοποιητικό (μυελός των οστών) και το γαστρεντερικό σύστημα.

Σε απόσταση 8-11 χιλιομέτρων θα μπορούσε να προξενηθεί ναυτία και άλλα συμπτώματα, αλλά θα ήταν απίθανο να πεθάνουν σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. Αλλά θα υπάρχουν θάνατοι λόγω του ατυχήματος. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε ακτίνα περίπου μέχρι 15 χιλιόμετρα γύρω από κάθε πυρηνικό εργοστάσιο δεν υπάρχει κατοικημένη περιοχή, ενώ οι πυρηνικές δοκιμές γίνονται υπόγεια σε εκτεταμένες ερήμους. Και κάτι ακόμα, το προσωπικό ενός πυρηνικού εργοστασίου είναι κατά πολύ μικρότερο σε αριθμό σε σχέση με το αντίστοιχο θερμοηλεκτρικό.

Από 11 και μέχρι περίπου 100 χιλιόμετρα (το Κίεβο είναι εκτός αυτής της ζώνης) μικρότερες ποσότητες ακτινοβολίας θα μπορούσαν να έχουν σαν αποτέλεσμα σημαντικά αυξημένους θανάτους από λευχαιμία και άλλες μορφές, καρκίνου (όπως θυρεοειδής, πνευμόνων, ήπατος, μαστού και νεφρών) κατά τη διάρκεια των επόμενων 30 ημερών.

Άτομα που ζουν 300 χιλιόμετρα και κάτι παραπάνω πέρα από τον τόπο του ατυχήματος θα μπορούσαν να διατρέχουν μικρότερους κινδύνους.

Για μας τους Έλληνες, σε απόσταση 2000 χιλιομέτρων από τον τόπο του ατυχήματος, όπως και για πολλούς άλλους Ευρωπαίους η δόση που πήραμε το πρώτο δίμηνο (το μήνα Μάιο '86 κατά κυριότητα) από τη ραδιενέργεια της ατμόσφαιρας (λόγω εισπνοής) και του εδάφους (χώμα, χλόη) είναι ισοδύναμη δόση έκθεσης μιας ή το πολύ δύο ακτινογραφιών θώρακα (30-60 μιλλιρέμ περίπου) και δε θα υπερβεί στην πιο ακραία περίπτωση το 30% της συνολικής ετήσιας δόσης που παίρνουμε πριν από το ατύχημα σαν φυσική δόση συν τη διαγνωστική δόση (ακτινογραφίες, σπινθηρογραφήματα). Βέβαια στη δόση αυτή δεν περιλαμβάνεται η δόση από τα τυχόν βεβαρυμένα είδη διατροφής, όπως λαχανικά, φρούτα, δημητριακά (ψωμί κ.λπ.), γάλα και γαλακτοκομικά προϊόντα. Αν συνεκτιμηθεί και η δόση από τα είδη διατροφής, που είναι και πιο σημαντική, τότε η επιβάρυνση για ένα χρόνο στο μέσο άτομο φθάνει και ξεπερνά τα 200 μιλλιρέμ καθόσον έχει πλήρως αποσαφηνισθεί από τις ως τώρα μετρήσεις η μέση συγκέντρωση των ραδιονουκλιδίων του καισίου στα ανωτέρω είδη. Αποτέλεσμα; Ο διπλασιασμός της φυσικής μας δόσης για το 1986.

Τα όρια της δόσης για τον πλατύ πληθυσμό ή για τα μεμονωμένα άτομα που για κάποιο λόγο εκτέθηκαν σε ακτινοβολία είναι 500 μιλλιρέμ το χρόνο, δόση ολόσωμη, ενώ για τους ασχολούμενους με ακτινοβολίες το όριο αυτό γίνεται 5000 μιλλιρέμ το χρόνο. Θα πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι η ραδιοευαισθησία των διαφόρων οργάνων, των ιστών και των συστημάτων του ανθρωπίνου σώματος ποικίλλει. Για παράδειγμα τα χέρια πιο ραδιοανθεκτικά μπορούν να δεχθούν μέχρι 75 rem το χρόνο έναντι της εγκύου γυναίκας (σε σχέση με το έμβρυο) μόνο 0.5 rem για την περίοδο της κύησης.

Σύμφωνα με διεθνή νόρμα για την για μακρό χρόνο αθροιστική δόση (N–18) 5 rem σε ηλικία N ετών γίνεται εύκολα προφανές ότι τα νεαρά άτομα κάτω των 18 ετών δεν θα πρέπει να φορτίζονται με δόση. Κι ακόμα, δεν υπάρχει δόση «καλή» ή κακή, είτε μεγάλη είτε μικρή, κι ότι κάθε δόση όσο μικρή και αν είναι θα πρέπει να αποφεύγεται, όπου αυτό είναι δυνατόν.

Συνοψίζοντας όλα τα ανωτέρω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τον Ελληνικό πληθυσμό η δόση από την ραδιενεργό ολόσωμη επιβάρυνση δεν θα πρέπει να υπερβεί τα επιτρεπτά όρια ακόμα και για το πιο ραδιευαίσθητο όργανο του ανθρωπίνου σώματος, όπως π.χ. είναι τα όργανα αναπαραγωγής (170 μιλλιρέμ το χρόνο). Η χώρα μας δεν θα πρέπει να έχει «θύματα» του Τσερνομπίλ. Κι αυτά που θα υπάρξουν θα είναι ελάχιστα ώστε να είναι αδύνατο να διακριβωθούν μέσα σε τριάντα-σαράντα χρόνια από το ατύχημα.

Από τις επιπτώσεις λόγω έκθεσης σε δόση πολύ πιο πάνω από τα επιτρεπτά όρια είναι ο καταρράκτης των ματιών, η στείρωση, ανώμαλες κυήσεις και τοκετοί, οι διαφόρων μορφών καρκίνοι και λευχαιμίες και φυσικά ο θάνατος που μπορεί νά 'ναι από ακαριαίος (στις πολύ μικρές αποστάσεις από τον τόπο του ατυχήματος για πολύ ισχυρές δόσεις), μέχρι ύστερα από λίγες ώρες ή ημέρες ή και χρόνια. Στη Χιροσίμα αργοπεθαίνουν ακόμα τα θύματα του πυρηνικού ολέθρου, 40 χρόνια μετά την έκρηξη της βόμβας.

Θάνατοι υπάρχουν κάθε φορά σε πυρηνικό ατύχημα. Το Τσερνομπίλ δεν μπορούσε να αποτελέσει εξαίρεση. Υπήρξαν και τώρα θάνατοι και θα υπάρξουν ακόμα περισσότεροι.

Δεν έχει σημασία αν ήταν τριάντα δύο ή τριάντα δύο χιλιάδες. Γιατί, «ο θάνατος και ενός μόνον ανθρώπου, κάθε ανθρώπου, λιγοστεύει εμένα τον ίδιο γιατί είμαι ένα με την ανθρωπότητα»*.

* John Donne, Άγγλος ποιητής (1571-1631).

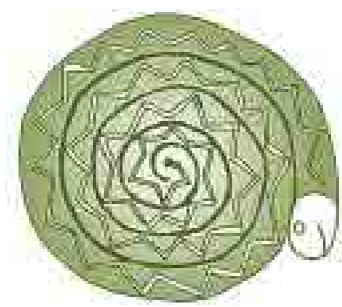
ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ με ΚΟΥΤΙΑ ΑΝΑΨΥΚΤΙΚΩΝ

Του **Δ. Τσιώλη,** Φυσικού

Τα αλουμινένια τενεκεδάκια των αναψυκτικών προσφέρουν υλικό για πολλά πειράματα φυσικής.

Το φύλλο αλουμινίου, απ' το οποίο είναι κατασκευασμένα, κόβεται εύκολα με ένα κοινό ψαλιδάκι που χρησιμοποιούμε στα σπίτια μας, για να κόβουμε χαρτί, ύφασμα κ.λπ.

Α Το φιδάκι



Πάνω σε ένα φύλλο αλουμινίου που πήρατε από αλουμινένιο τενεκεδάκι αναψυκτικών σχεδιάστε μια σπειροειδή ταινία που το ένα άκρο της να καταλήγει σ' ένα φιδίσιο κεφάλι, όπως δείχνει το σχήμα· με το ψαλίδι κόψτε το αλουμινένιο φύλλο κατά μήκος της γραμμής. Πιέζουμε με το στυλό μας το κεντρικό σημείο της σπειροειδούς ταινίας (γραμμοσκιασμένος κύκλος) έτσι που να κάνει μικρή λακουβίτσα.

Κατόπιν παίρνουμε ένα σύρμα μήκους 50 cm περίπου, λυγίζουμε το ένα του άκρο σε σχήμα κύκλου έτσι που να μπορεί να στέκεται πατώντας με τον κύκλο στο τραπέζι και το υπόλοιπο ίσιο κομμάτι κατακόρυφο. Λιμάρουμε το πάνω άκρο του σύρματος, έτσι που να γίνει μυτερό (ή κολλάμε μια καρφίτσα).

Μετά στηρίζουμε την ταινία πάνω στο σύρμα, έτσι που η μύτη του σύρματος (ή της καρφίτσας) να μπει στη λακουβίτσα της ταινίας.

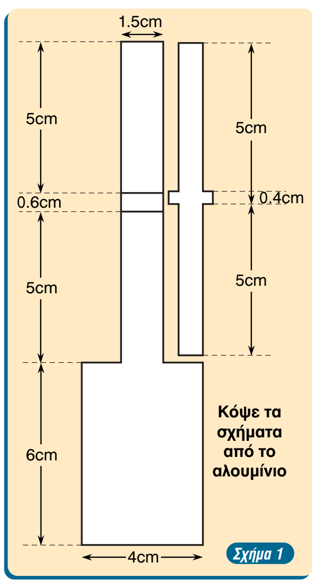
Στη βάση της κατασκευής τοποθετούμε τώρα ένα αναμμένο κερί. Ο ζεστός αέρας που ανεβαίνει ασκεί δύναμη στην ταινία και κάνει την ταινία να στριφογυρίζει έτσι που το φίδι φαίνεται να προσπαθεί να μας δαγκώσει.

Η συνθήκη «δουλεύει» και χωρίς κερί, αν την τοποθετήσουμε πάνω από σώμα καλοριφέρ ή σόμπα.

Β Ηλεκτροσκόπιο

Το ηλεκτροσκόπιο είναι μια συσκευή την οποία χρησιμοποιούμε, όταν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν ένα σώμα είναι φορτισμένο.

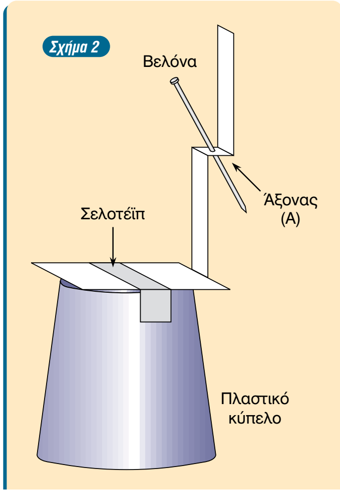
Για να κατασκευάσουμε ένα ηλεκτροσκόπιο παίρνουμε ένα αλουμινένιο τενεκεδάκι, πρώτα κόβουμε την κορυφή και τον πάτο και έπειτα κόβουμε το πλευρικό τοίχωμα κατακόρυφα, έτσι ώστε να μπορεί να ανοίξει και να δώσει ένα ορθογώνιο φύλλο 10 cm 20 cm περίπου.



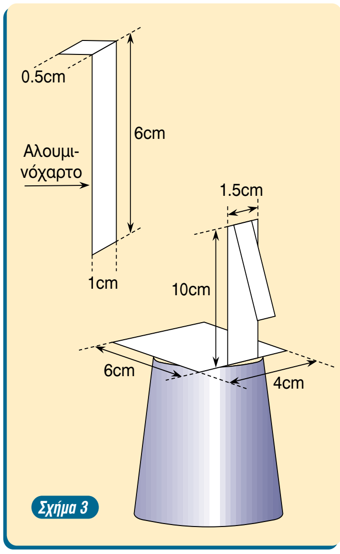
Σχήμα 1

Από αυτό το φύλλο αλουμινίου κόβουμε δύο κομμάτια, όπως δείχνει το σχήμα 1. Τώρα λυγίζουμε το μεγαλύτερο κομμάτι, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, και τοποθετούμε το μικρότερο κομμάτι –βελόνα– να ισορροπήσει στον άξονα της περιοχής Α. Η βελόνα στην αρχή θα πρέπει να μην ισορροπεί· κόβουμε μικρά κομμάτια από την κορυφή της μέχρι να ισορροπήσει τελικά (κατακόρυφα).

Το ηλεκτροσκόπιο πρέπει να είναι μονωμένο, γι' αυτό το κολλάμε με σελοτέιπ στον πάτο ενός αναποδογυρισμένου πλαστικού κυπέλλου (σχήμα 2).



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Η ευαισθησία του οργάνου εξαρτάται από τη θέση του κέντρου βάρους της βελόνας.

Ωστόσο το φύλλο στο οποίο είναι τυλιγμένη η σοκολάτα ή ένα κομματάκι αλουμινόχαρτου κουζίνας μπορεί να αποτελέσει μια καλή βελόνα· προς τούτο κόβουμε ένα κομμάτι αλουμινόχαρτου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Κάνοντάς το όσο πιο επίπεδο γίνεται· μετά διπλώνουμε την κορυφή και το κρεμάμε, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η εκτροπή της βελόνας ή του αλουμινόχαρτου από τη θέση ισορροπίας μαρτυρεί την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων.

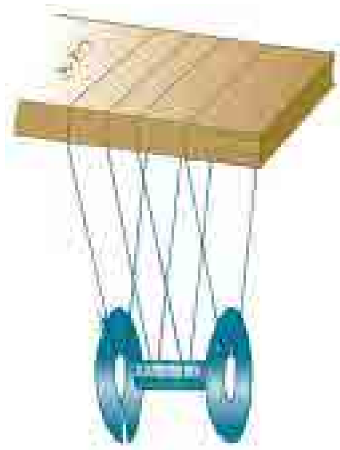
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η υγρασία είναι ο χειρότερος εχθρός των πειραμάτων ηλέκτρισης. Αν τα πειράματά σας δεν πετύχουν, είναι πολύ πιθανόν η υγρασία να έχει επικαθήσει στους μονωτές εκφορτίζοντάς τους. Γι' αυτό σιγουρευτείτε ότι ο αέρας είναι στεγνός. Μη φέρνετε κρύους μονωτές μέσα σε ένα ζεστό δωμάτιο· ένα αερόθερμο ή σεσουάρ είναι μια εύκολη σχετικά λύση.

Γ Κανόνας του Lenz

Παίρνουμε ένα αλουμινένιο τενεκεδάκι και κόβοντάς το με ψαλίδι αφαιρούμε τον πάτο και την κορυφή του· κατόπιν κόβουμε το πλευρικό τοίχωμα κατακόρυφα, έτσι ώστε να μπορεί να ανοίξει επίπεδα και να δώσει ένα φύλλο ορθογώνιου σχήματος διαστάσεων 10 cm 20 cm περίπου (όπως κάναμε και προηγουμένως).

Κατόπιν κόβουμε το φύλλο, έτσι ώστε να σχηματιστεί ένας δακτύλιος, του οποίου η εσωτερική διάμετρος να είναι 3 cm και η εξωτερική 10 cm. Επαναλαμβάνω τη διαδικασία άλλες 5 φορές.

Κατόπιν φέρω τους δακτύλιους σε επαφή ανά τρεις, έτσι που να ταιριάζουν και τους κολλάω με σελοτέιπ. Έτσι έχω δύο δακτύλιους (ο καθένας τριπλός).



Παίρνω τώρα τον ένα δακτύλιο και το κόβω ακτινικά. Κρεμάω με σχοινάκια τους δακτύλιους από ένα σύστημα δύο οριζόντιων και παράλληλων μεταλλικών ράβδων που στηρίζονται σε χυτοσιδερένιες βάσεις.

Ανάμεσα στους δακτύλιους κρεμάω ένα ραβδόμορφο μαγνήτη με δύο σχοινάκια· ο άξονας του μαγνήτη είναι οριζόντιος, κάθετος στα επίπεδα των δακτυλίων και περνάει από τα κέντρα των δακτυλίων. Οι άκρες του μαγνήτη είναι ακριβώς μπροστά από τις οπές των δακτυλίων.

Βάζω σε ταλάντωση του μαγνήτη, ενώ οι δακτύλιοι είναι ακίνητοι. Ο μαγνήτης μπαινοβγαίνει στους δακτύλιους.

Παρατηρώ ότι, ο ανοιχτός δακτύλιος δεν επηρεάζεται από την κίνηση του μαγνήτη, ενώ ο κλειστός δακτύλιος παρακολουθεί σιγά-σιγά την κίνηση του μαγνήτη!

Τα επαγωγικά ρεύματα που δημιουργήθηκαν στον κλειστό δακτύλιο λόγω της κίνησης του μαγνήτη $\left(E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$ έχουν τέτοια φορά που αντιστέκονται στην αιτία που τα προκαλεί.

Στον ανοιχτό δακτύλιο δεν υπάρχουν επαγωγικά ρεύματα.

Ένα άλλο πείραμα που μπορούμε να κάνουμε με την ίδια διάταξη είναι το εξής: εκτρέπουμε από τη θέση ισορροπίας τους δύο δακτύλιους και τους αφήνουμε ελεύθερους· θα δούμε το πλάτος ταλάντωσης του κλειστού δακτύλιου να ελαττώνεται και ο δακτύλιος να σταματάει γρήγορα· αντίθετα, ο ανοιχτός δακτύλιος ταλαντώνεται κανονικά, σαν να μην υπάρχει μαγνήτης.

Αντί των σιδερένιων ράβδων και των χυτοσιδερένιων βάσεων θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε «δεμένο» βιβλίο (με σκληρά εξώφυλλα) το οποίο θα τοποθετούσαμε στην άκρη του τραπεζιού, έτσι ώστε να προεξέχει (εμποδίζοντας την ανατροπή του με άλλα βιβλία που θα βάζαμε πάνω του, στο μέρος που δεν προεξέχει). Από αυτό το βιβλίο κρεμάμε τα τέσσερα σχοινιά.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τον μαγνήτη μας τον χάρισε ένας αγελαδοτρόφος. Αυτός ο μαγνήτης με ένα πλαστικό περιτύλιγμα (θήκη) καταπίνεται από τις αγελάδες και σταματάει στο στομάχι τους· εκεί μαζεύει τα σύρματα χορτοδεσίας που καταπίνει λαίμαργα η αγελάδα μαζί με το χορτάρι το χειμώνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Edge R., «String and Sticky tape Experiments», American Association of Physics Teachers 1981.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΜΕΙΓΜΑΤΩΝ

(ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ)

Της **Αικ. Γιούρη-Τσοχατζή**, Επ. Καθηγήτριας στο Τμήμα Χημείας Α.Π.Θ.

Σύνθετα ονομάζονται τα σώματα που μπορούν να διαχωριστούν σε άλλα απλούστερα είτε με χημικά είτε με φυσικά μέσα. Τα σύνθετα σώματα διακρίνονται σε χημικές ενώσεις και μείγματα.

Μείγματα είναι σύνθετα σώματα που η μάζα τους αποτελείται από δύο ή περισσότερα διαφορετικά είδη μορίων, που μπορούν να διαχωριστούν μεταξύ τους και με φυσικά (μηχανικά) μέσα. Τα μείγματα διακρίνονται σε ομογενή και ετερογενή.

Τα **ομογενή** μείγματα παρουσιάζουν σε όλη τη μάζα τους την ίδια σύσταση και τις ίδιες ιδιότητες. Θεωρητικά όλα τα ομογενή μείγματα ονομάζονται διαλύματα, πρακτικά όμως διαλύματα ονομάζονται κυρίως τα υγρά ομογενή μείγματα.

Τα **ετερογενή** μείγματα αποτελούνται από δύο ή περισσότερα ομογενή σώματα, που δεν εμφανίζουν τις ίδιες ιδιότητες σ' όλη την έκταση της μάζας τους. Τα συστατικά ενός ετερογενούς μείγματος διακρίνονται μεταξύ τους είτε με γυμνό μάτι (π.χ. λάδι-νερό) είτε με μικροσκόπιο (π.χ. αίμα ή γάλα).

Τα διάκριτα συστατικά ή τα ομογενή μέρη ενός ετερογενούς συστήματος ονομάζονται **φάσεις**.

Η διάκριση των μειγμάτων επομένως σε ομογενή και ετερογενή είναι σχετική και εξαρτάται από τη διακριτική μας ικανότητα. Σήμερα ένα μείγμα θεωρείται ομογενές όταν τα συστατικά του δεν είναι δυνατόν να διακριθούν με κανένα οπτικό μέσο. Τα κολλοειδή διαλύματα είναι ενδιάμεση κατάσταση και είναι ετερογενή μείγματα, που το διεσπαρμένο σώμα βρίσκεται μέσα στο μέσο διασποράς υπό μορφή σωματιδίων μεγέθους 10^{-7}–10^{-5} cm.

Ο διαχωρισμός των συστατικών ενός μείγματος εξαρτάται από τη φυσική κατάσταση και τις ιδιότητες των συστατικών του μείγματος. Παρακάτω αναφέρονται οι πιο γνωστές μέθοδοι διαχωρισμού μειγμάτων.

1. ΑΠΟΧΥΣΗ

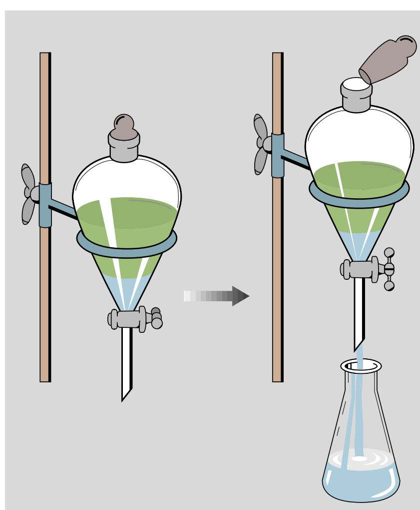
α) Διαχωρισμός μείγματος στερεού-υγρού

Όταν τα στερεά μέσα σ' ένα διάλυμα έχουν καταπέσει με τη μορφή ιζήματος, επειδή το στερεό είναι βαρύτερο του υγρού, ο διαχωρισμός γίνεται με **απόχυση** (κοινώς μετάγγιση), π.χ. διαχωρισμός νερού - άμμου (Εικόνα 1.1).

Εικόνα 1.1. *Διαχωρισμός νερού - άμμου με απόχυση.*

β) Διαχωρισμός μείγματος υγρού-υγρού

Όταν δύο υγρά σ' ένα διάλυμα έχουν διαφορετικές πυκνότητες, ο διαχωρισμός επιτυγχάνεται με τη βοήθεια διαχωριστικής χοάνης, π.χ. διαχωρισμός μείγματος νερού - λαδιού (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2. *Διαχωρισμός νερού-λαδιού με διαχωριστική χοάνη.*

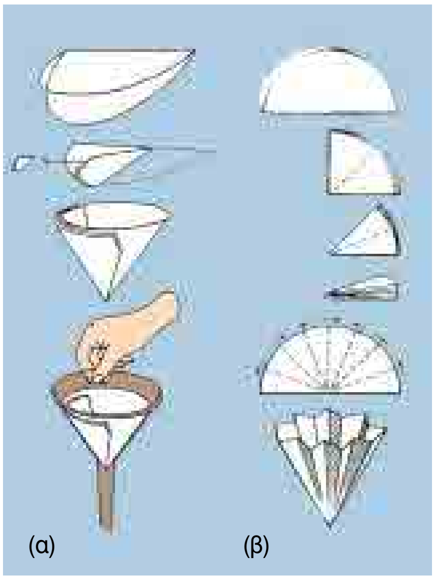
2. ΔΙΗΘΗΣΗ (διαχωρισμός μείγματος στερεού-υγρού)

Όταν μία στερεά ουσία αιωρείται σ' ένα διάλυμα και δύσκολα καθιζάνει, για το διαχωρισμό της χρησιμοποιείται η **διήθηση** (κοινώς φιλτράρισμα).

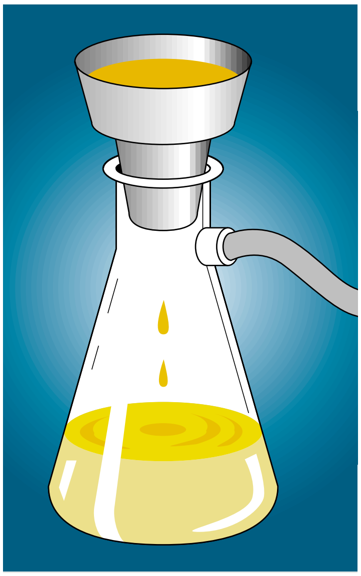
Η διήθηση συνίσταται στη διαύγαση ενός διαλύματος με διαβίβαση αυτού μέσω πορώδους υλικού (ηθμός), που συγκρατεί το στερεό (ίζημα) και επιτρέπει τη δίοδο του υγρού (διήθημα). Ως πορώδες υλικό χρησιμοποιείται διηθητικό χαρτί, πορώδης πορσελάνη, αμίαντος, υαλοβάμβακας κ.λπ.

Για την απλή διήθηση με διηθητικό χαρτί (Σχήμα 2.1), χρησιμοποιούνται απλοί ηθμοί (Σχήμα 2.1α), ενώ για την ταχύτερη χρησιμοποιούνται πτυχωτοί ηθμοί (Σχήμα 2.1β). Η διήθηση υπό κενό με χωνί Buchner (Εικόνα 2.2) χρησιμοποιείται για πολύ γρήγορες διηθήσεις και πλύσεις στερεών.

Ο διαχωρισμός μείγματος νερού - χρωματιστής κονιοποιημένης κιμωλίας γίνεται με απλή διήθηση (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.1. Τρόπος χρήσεως α) απλού ηθμού, β) πτυχωτού ηθμού.



Σχήμα 2.2. Διήθηση υπό κενό.

Σχήμα 2.3. Διάταξη διηθήσεως.

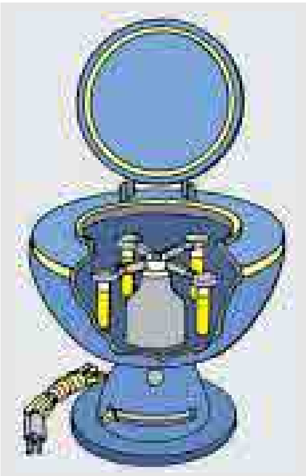
3. ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΙΣΗ

Η **φυγοκέντριση** είναι μέθοδος διαχωρισμού α) στερεής ουσίας - υγρού, όταν η ουσία βρίσκεται σε πολύ μικρές ποσότητες ή σε κολλοειδή κατάσταση και για κάποιο λόγο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διήθηση ως μέθοδος διαχωρισμού και β) δύο υγρών με παραπλήσια πυκνότητα. Ο διαχωρισμός των υγρών αυτών βασίζεται στη μεγαλύτερη φυγόκεντρη δύναμη που αναπτύσσεται κατά την περιστροφή, στο υγρό με τη μεγαλύτερη πυκνότητα.

Ο διαχωρισμός γίνεται σε ειδική συσκευή, τη συσκευή φυγοκέντρισης, που μπορεί να είναι ηλεκτρική ή χειροκίνητη. Στην ηλεκτρική συσκευή φυγοκέντρισης (Σχήμα 3.1) η περιστροφή γίνεται με τη βοήθεια ηλεκτρικού κινητήρα, που περιστρέφει με ταχύτητα που κυμαίνεται από 3.000-6.000 στροφές ανά λεπτό. Η ταχύτητα και ο χρόνος περιστροφής είναι ρυθμιζόμενα.

Τις ουσίες που θέλουμε να διαχωρίσουμε τις βάζουμε μέσα σε γυάλινους σωλήνες φυγοκέντρισης τους οποίους τοποθετούμε στους ειδικούς μεταλλικούς υποδοχείς της συσκευής. Συγκεκριμένα κάνουμε τις ακόλουθες ενέργειες:

Σε δύο ή τέσσερις σωλήνες φυγοκέντρισης προσθέτουμε την προς διαχωρισμό ουσία, έτσι ώστε το περιεχόμενο των σωλήνων να βρίσκεται περίπου 3-4 cm κάτω από το στόμιο των σωλήνων. Είναι απαραίτητο το υγρό να βρίσκεται στο ίδιο ύψος σ' όλους τους σωλήνες για να εξισορροπούνται αμοιβαία οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την περιστροφή. Όταν χρησιμοποιούμε δύο σωλήνες τους τοποθετούμε σε διαμετρι-



Σχήμα 3.1. Ηλεκτρική συσκευή φυγοκέντρισης.

κά αντίθετους υποδοχείς της συσκευής.

Αν η ποσότητα του προς διαχωρισμό διαλύματος δεν είναι αρκετή, ώστε να γεμίσουν δύο σωλήνες, γεμίζουμε μόνο τον έναν και στο δεύτερο σωλήνα προσθέτουμε νερό ίσου βάρους με τον πρώτο. Με την περιστροφή η προς διαχωρισμό στερεή ουσία «επικολλάται» στα τοιχώματα του σωλήνα ή των σωλήνων. Στη συνέχεια αποχύνεται το υπερκείμενο υγρό και κατόπιν παραλαμβάνεται από τα τοιχώματα η στερεή ουσία.

Χαρακτηριστικό πείραμα είναι ο διαχωρισμός κολλοειδούς διαλύματος υδροξειδίου του σιδήρου $Fe(OH)_3$, προϊόν της αντιδράσεως

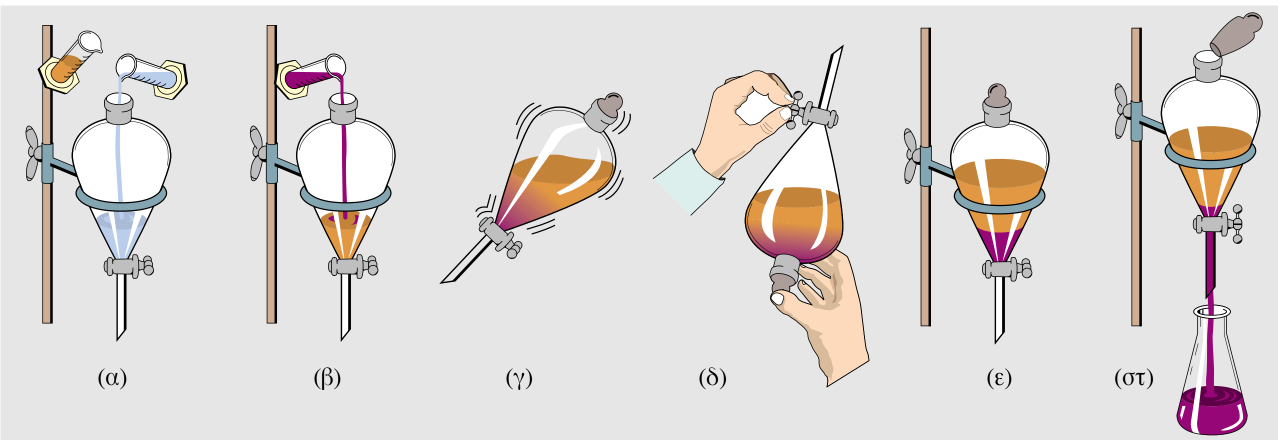
$$FeCl_3 + 3NH_4OH \quad Fe(OH)_3 + 3NH_4Cl$$

4. ΕΚΧΥΛΙΣΗ

Εκχύλιση χαρακτηρίζεται η «μεταφορά» μιας ουσίας από τη φάση στην οποία βρίσκεται σε μια άλλη φάση, με τη βοήθεια ενός διαλύτη που ονομάζεται **εκχυλιστικό υγρό**. Τα χαρακτηριστικά ενός κατάλληλου εκχυλιστικού υγρού είναι ότι διαλύει ένα μόνο από τα συστατικά του μείγματος, ή υπάρχει μεγάλη διαφορά στις διαλυτότητες των ουσιών του μείγματος σ' αυτόν, δεν αναμειγνύεται με τα άλλα και δεν αντιδρά με την ουσία που θα εκχυλιστεί. Τα εκχυλιστικά υγρά έχουν συνήθως χαμηλό σημείο ζέσεως όπως π.χ. είναι οι αλκοόλες, ο αιθέρας, το χλωροφόρμιο κ.λπ.

Διακρίνουμε την απλή εκχύλιση με διαχωριστικό χωνί (Σχήμα 4.1) και τη «συνεχή» εκχύλιση που γίνεται με διάφορες συσκευές, όπως είναι η συσκευή Soxhlet (Σχήμα 4.2).

Χαρακτηριστικό πείραμα στην εκχύλιση είναι ο διαχωρισμός του ιωδίου από το βάμμα ιωδίου. (Το βάμμα ιωδίου είναι διάλυμα ιωδίου σε οινόπνευμα). Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται η διαδικασία διαχωρισμού ιωδίου με εκχύλιση.

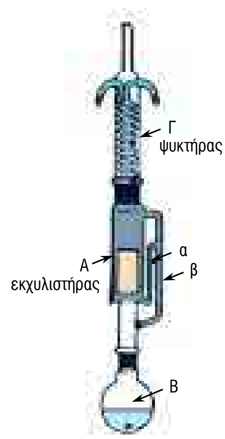


__Σχήμα 4.1. Εκχύλιση ιωδίου α)__ Αναμειγνύουμε νερό με βάμμα ιωδίου οπότε έχουμε ένα καστανό διάλυμα (διάλυμα ιωδίου σε διαλύτες που περιέχουν οξυγόνο π.χ. οινόπνευμα C_2H_5OH, έχει χρώμα καστανό). __β)__ Προσθέτουμε χλωροφόρμιο __γ)__ Αναμειγνύουμε. __δ)__ Ελαττώνουμε την πίεση. __ε)__ Αφήνουμε να διαχωριστούν οι στιβάδες, οπότε η στιβάδα του χλωροφορμίου χρωματίζεται ιώδης (Διάλυμα ιωδίου σε διαλύτες που δεν περιέχουν οξυγόνο π.χ. τετραχλωράνθρακα CCl_4, χλωροφόρμιο $CHCl_3$ έχει χρώμα ιώδες). __στ)__ Παραλαμβάνουμε το υγρό της κατώτερης στιβάδας του χλωροφορμίου σε φιάλη.

Η λειτουργία της συσκευής Soxhlet είναι η εξής:

Το μείγμα των στερεών ουσιών τοποθετείται μέσα σε ειδικό σωλήνα (φύσιγγα) από διηθητικό χαρτί, κλειστό από το ένα άκρο, ενώ το ελεύθερο άκρο καλύπτεται με χαρτί ή με βαμβάκι. Το ύψος του σωλήνα, που τοποθετείται στον εκχυλιστήρα Α, πρέπει να είναι μικρότερο από το ύψος του παράπλευρου σωλήνα α. Ο υποδοχέας Β που περιέχει τον κατάλληλο διαλύτη, θερμαίνεται με ηλεκτρικό μανδύα. Οι ατμοί του διαλύτη περνούν από το σωλήνα β και φθάνουν στον ψυκτήρα Γ όπου υγροποιούνται και ξαναπέφτουν στον εκχυλιστήρα, όπου διαλύουν μέρος της ουσίας.

Όταν το ύψος του διαλύτη στον εκχυλιστήρα φθάσει στο ανώτατο σημείο του παράπλευρου σωλήνα α, λόγω σιφωνισμού, επιστρέφει στην υποδοχέα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται πολλές φορές έως ότου εκχυλιστεί το μεγαλύτερο μέρος της ουσίας που πρέπει να διαχωριστεί. Η εν διαλύσει ουσία, που συγκεντρώνεται στον υποδοχέα, παραλαμβάνεται με εξάτμιση του διαλύτη με καταβύθιση με συμπύκνωση και κρυστάλλωση ή με άλλους τρόπους.

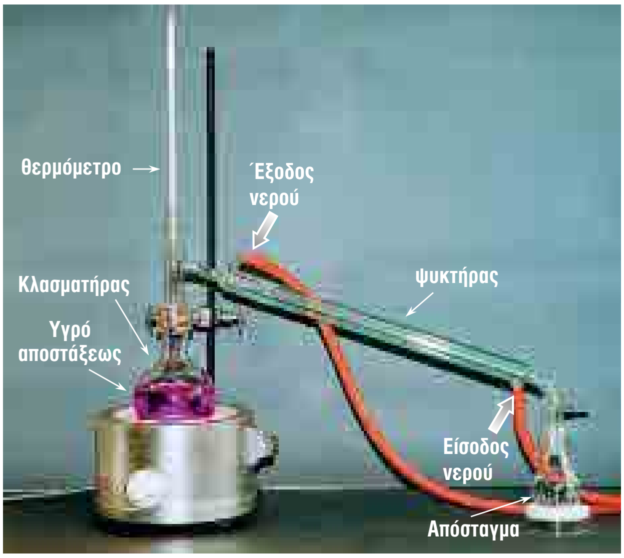


__Σχήμα 4.2.__ Συσκευή εκχύλισης Soxhlet

5. ΑΠΟΣΤΑΞΗ

Η **απόσταξη** είναι μέθοδος διαχωρισμού α) μείγματος διαφόρων υγρών και βασίζεται στα διαφορετικά σημεία βρασμού τους (ζέσεως) και β) μείγματος στερεών-υγρών.

Η διάταξη απόσταξης (Εικόνα 5.1) αποτελείται από τον υποδοχέα ή κλασματήρα ή αποστακτήρα όπου βρίσκεται το μείγμα των ουσιών, τον ψυκτήρα για την ψύξη των ατμών του διαλύτη, τον υποδοχέα για τη συλλογή του διαλύτη και το θερμόμετρο για την παρακολούθηση της θερμοκρασίας.



Εικόνα 5.1. *Διάταξη απόσταξης.*

Το μείγμα θερμαίνεται και τα διάφορα συστατικά εξαερώνονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες. Οι ατμοί που σχηματίζονται ψύχονται και το κάθε συστατικό συλλέγεται χωριστά. Εφόσον τα πτητικά συστατικά του μείγματος είναι πολλά, χρησιμοποιείται ο όρος **κλασματική απόσταξη**. Αν οι διαλύτες έχουν υψηλό σημείο βρασμού ή τα συστατικά αλλοιώνονται κατά τη θέρμανση τότε γίνεται **απόσταξη «υπό κενό»** δηλαδή με ελαττωμένη πίεση οπότε ελαττώνεται το σημείο βρασμού και η εξαέρωση γίνεται σε χαμηλότερη θερμοκρασία. Μία παραλλαγή της συσκευής απόσταξης υπό κενό είναι οι περιστροφικοί εξατμιστήρες κενού (Rotary vacuum evaporators) (Εικόνα 5.2).

Η απόσταξη διαλύματος στερεών - υγρών (π.χ. σταφυλιών - οινοπνεύματος - νερού), βρίσκει εφαρμογή στην ποτοποιΐα. Ο αποστακτήρας είναι χάλκινος και οι ατμοί συμπυκνώνονται σε οφιοειδή σωλήνα (σερπαντίνα) με ρεύμα ψυχρού νερού. Στην Εικόνα 5.3 φαίνεται ένας παραδοσιακός χάλκινος αποστακτήρας για παραγωγή τσίπουρου.

Εικόνα 5.2. *Περιστροφικός εξατμιστήρας κενού.*

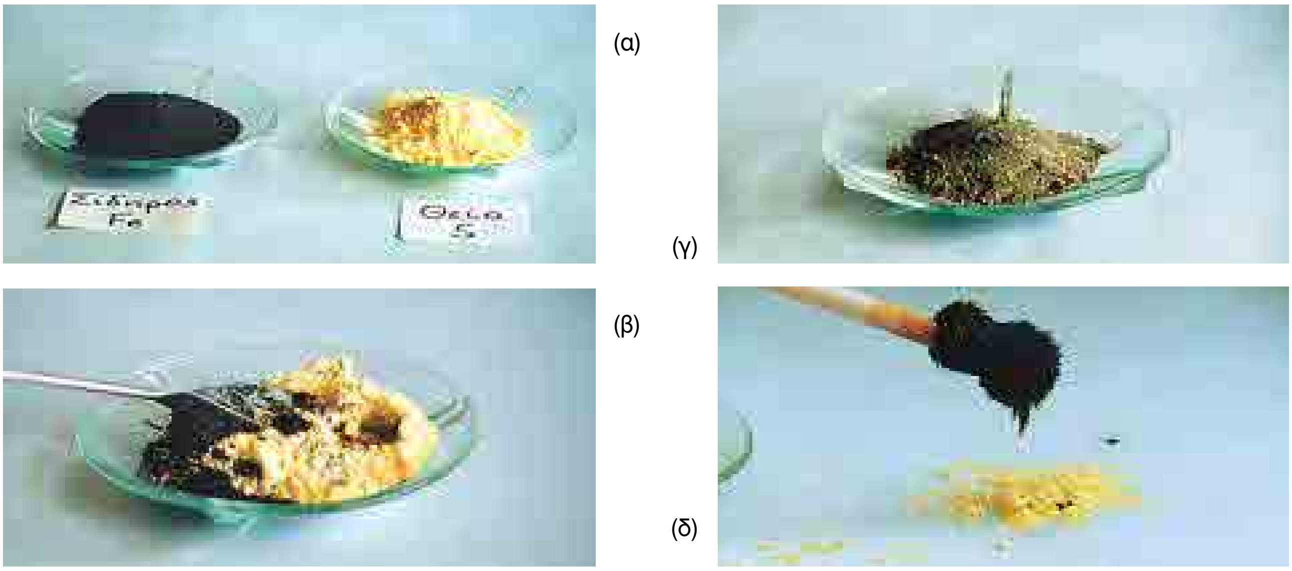
Εικόνα 5.3. *Παραγωγή τσίπουρου με παραδοσιακό αποστακτήρα (Φωτ. Φ. Σαμπάνη).*

Όταν θερμαίνεται μείγμα νερού - οινοπνεύματος το πτητικότερο οινόπνευμα αποστάζει πρώτα. Αν σε κάποιο χρόνο διακοπεί η απόσταξη το απόσταγμα δεν αποτελείται μόνο από οινόπνευμα αλλά περιέχει και λίγο νερό. Αν το απόσταγμα υποβληθεί σε νέα απόσταξη διαπιστώνεται μεγαλύτερη περιεκτικότητα σε οινόπνευμα. Έτσι μόνο με διαδοχικές αποστάξεις πετυχαίνουμε τη μέγιστη περιεκτικότητα οινοπνεύματος στο απόσταγμα. Με τη μέθοδο αυτή παρασκευάζονται τα πλούσια σε οινόπνευμα ποτά (30-70%), όπως κονιάκ, ρούμι, ουΐσκι, τσίπουρο κ.λπ.

Χαρακτηριστικό πείραμα απόσταξης στο εργαστήριο είναι ο διαχωρισμός κόκκινου κρασιού στα συστατικά του.

6. ΜΑΓΝΗΤΙΣΗ (διαχωρισμός στερεού-στερεού)

Ο διαχωρισμός μείγματος σιδήρου - θείου με μαγνήτιση φαίνεται στο παρακάτω πείραμα που δίνεται με εικόνες.



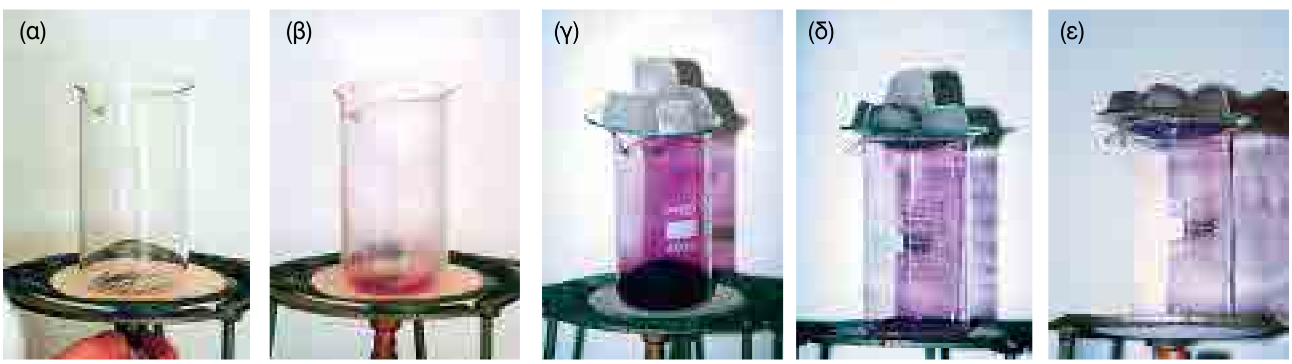
__Εικόνα 6. Διαχωρισμός σιδήρου - θείου με μαγνήτιση. α)__ Η σκόνη του σιδήρου έχει μαύρο χρώμα, ενώ του θείου κίτρινο χρώμα. __β)__ Σε μία ύαλο ωρολογίου βάζουμε ίσες ποσότητες σιδήρου και θείου και αναμειγνύουμε τις σκόνες. __γ)__ Μετά την ανάμειξη προκύπτει ένα κιτρινόμαυρο μείγμα. __δ)__ Μ' ένα μαγνήτη διαχωρίζουμε το μείγμα σιδήρου - θείου. Στο μαγνήτη «κολλάει» ο μαύρος σίδηρος. Αν πάνω από ένα άσπρο χαρτί, χτυπήσουμε ελαφρά το μαγνήτη, θα πέσει το κίτρινο θείο που συμπαρασύρθηκε με το σίδηρο.

7. ΕΞΑΧΝΩΣΗ (διαχωρισμός μείγματος στερεού-στερεού)

Κατά την εξάχνωση μία ουσία μεταβαίνει από τη στερεά φάση απευθείας στην αέρια, χωρίς να μεσολαβήσει η υγρή φάση. Εφόσον μια ουσία μπορεί να εξαχνωθεί (π.χ. ιώδιο, ναφθαλίνη) η μέθοδος αυτή είναι ιδανική για να διαχωριστούν οι ουσίες από τις ανεπιθύμητες προσμείξεις.

Χαρακτηριστικό εργαστηριακό πείραμα είναι η εξάχνωση ιωδίου. Οι κρύσταλλοι του ιωδίου έχουν χρώμα γκριζόμαυρο με μεταλλική λάμψη, με τη θέρμανση εξαχνώνονται και δίνουν ιώδεις ατμούς που γεμίζουν το ποτήρι μέσα στο οποίο βρίσκονται (Εικόνα 7α-β). Αν τοποθετήσουμε πάγο (Εικόνα 7γ-ε) οι ατμοί ψύχονται στα κρύα τοιχώματα της υάλου, οπότε μπορούμε να παραλάβουμε το ιώδιο.

Το πείραμα εξελίσσεται ως εξής:



__Εικόνα 7. Εξάχνωση ιωδίου. α)__ Σε ποτήρι ζέσεως βάζουμε κρυστάλλους ιωδίου και αρχίζουμε και θερμαίνουμε. __β)__ Το ιώδιο αρχίζει να εξαχνώνεται και παράγονται ιώδεις ατμοί. __γ)__ Κλείνουμε το στόμιο του ποτηριού με ύαλο που περιέχει κομμάτια πάγου. Το ποτήρι γεμίζει ιώδες ατμούς. __δ-ε)__ Σταματούμε τη θέρμανση. Οι ατμοί αρχίζουν να στεροποιούνται στα κρύα τοιχώματα της υάλου.

8. ΕΞΑΛΑΤΩΣΗ (διαχωρισμός αερίου-υγρού)

Εξαλάτωση ονομάζεται ελάττωση της διαλυτότητας ενός αερίου σ' ένα υγρό με την προσθήκη κάποιου ηλεκτρολύτη (π.χ. μαγειρικό αλάτι). Η επίδραση του ηλεκτρολύτη είναι ανεξάρτητη από τη φύση του διαλυμένου αερίου. Η διαλυτότητα ενός αερίου σε υγρό γενικά εξαρτάται από τη φύση του αερίου και του υγρού και είναι ανάλογη της πίεσης και αντιστρόφως ανάλογη της θερμοκρασίας.

Όταν ανοίγουμε ένα αεριούχο ποτό (σόδα ή σαμπάνια) δημιουργείται αφρός όταν ανοίγουμε το μπουκάλι, επειδή ελαττώνεται απότομα η πίεση στο εσωτερικό του μπουκαλιού και ένα μεγάλο μέρος του διοξειδίου του άνθρακα δεν μπορεί να είναι πια διαλυμένο στο υγρό και αποδεσμεύεται απότομα. Η διαλυτότητα του αερίου διοξειδίου του άνθρακα ελαττώνεται ακόμη περισσότερο όταν σ' ένα μπουκάλι π.χ. σόδας ρίξουμε μικρή ποσότητα (ένα κουταλάκι) αλάτι (Εικόνα 8.1) οπότε παρατηρούμε έντονο αφρισμό. Η ελάττωση της διαλυτότητας των αερίων σε υγρό με την προσθήκη ηλεκτρολύτη αποδίδεται α) στην εφυδάτωση των ιόντων του ηλεκτρολύτη με αποτέλεσμα την ελάττωση του διαλύτη και β) στην ελάττωση της πολικότητας του διαλύτη με την προσθήκη ιόντων του ηλεκτρολύτη.

Εικόνα 8.1. *Τα αεριούχα ποτά αφρίζουν αν ρίξουμε αλάτι.*

9. ΕΠΙΠΛΕΥΣΗ (διαχωρισμός στερεού-στερεού)

Η **επίπλευση** είναι μέθοδος διαχωρισμού μιας στερεής ουσίας από μείγμα ουσιών που βρίσκονται σε λεπτό διαμερισμό.

Ο διαχωρισμός βασίζεται στη διαφορά των πυκνοτήτων των συστατικών του μείγματος, όταν το μείγμα αναμειχθεί με ποσότητα νερού, ώστε κάποιο απ' αυτά, το ελαφρότερο στο νερό, να επιπλεύσει.

Η επίπλευση είναι συνηθισμένη μέθοδος διαχωρισμού από άλλες προσμείξεις και έτσι εμπλουτισμού διαφόρων ορυκτών σε κάποιο μετάλλευμα, αφού προηγουμένως τα ορυκτά υποστούν λειοτρίβηση και κατεργασία με ειδικά λάδια νερό και κάποια ουσία που προκαλεί αφρισμό.

10. ΧΡΩΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ

Η χρωματογραφική ανάλυση ή **χρωματογραφία** είναι μία μέθοδος διαχωρισμού των διαφόρων συστατικών ενός μείγματος και στηρίζεται στο φυσικοχημικό φαινόμενο της προσρόφησης, δηλαδή στην ικανότητα ενός πορώδους υλικού (προσροφητικό μέσο) να προσροφά εκλεκτικά διάφορες ουσίες και έτσι να επιτρέπει το διαχωρισμό τους από μείγματα.

Το προσροφητικό μέσο μπορεί να είναι: πορώδες χαρτί, Al_2O_3 (αλουμίνα), SiO_2 (silica gel), άμυλο, άνθρακας, CaO, $CaCO_3$, MgO, ζελατίνα, καολίνης κ.λπ. Ο Twsett, ρώσος βοτανολόγος πρώτος χρησιμοποίησε αυτή τη μέθοδο για να διαχωρίσει τις χρωστικές ουσίες φύλλων διαφόρων φυτών (π.χ. χλωροφύλλη), αφήνοντας ένα μείγμα διαλυτών να τις παρασύρει διαμέσου μιας στήλης που περιείχε διάφορα προσροφητικά υλικά. Από το πείραμα αυτό πήρε και το όνομα η τεχνική της χρωματογραφίας «γράφω χρώματα».

Το όνομα όμως αυτό είναι μόνο περιγραφικό, γιατί η τεχνική εφαρμόζεται και σε άχρωμες ενώσεις.

Το προς διαχωρισμό μείγμα τοποθετείται πάνω στο πορώδες υλικό και αναγκάζεται να κινηθεί με την επίδραση της ροής ενός υγρού (**διαλύτης ανάπτυξης**). Έτσι διαχωρίζονται τα συστατικά του μείγματος, λόγω της διαφορετικής ταχύτητας κίνησής τους πάνω στο πορώδες υλικό (**ανάπτυξη χρωματογραφήματος**).

Όταν στο χρωματογράφημα τα συστατικά που διαχωρίστηκαν δίνουν έγχρωμες κηλίδες, η θέση τους είναι φανερή. Η θέση άχρωμων κηλίδων γίνεται φανερή με τη χρησιμοποίηση κατάλληλων αντιδραστηρίων που δίνουν χρωματισμένες ενώσεις (**εμφάνιση του χρωματογραφήματος**).

Υπάρχουν διάφορα είδη χρωματογραφίας όπως: α) **Χρωματογραφία στήλης** (Column Chromatography, CC). Η διάταξη είναι ένας γυάλινος σωλήνας γεμάτος προσροφητικό υλικό. β) **Χρωματογραφία σε χαρτί** (Paper Chromatography, PC). Το προσροφητικό υλικό είναι πορώδες χαρτί. γ) **Χρωματογραφία λεπτής στοιβάδας** (Thin Layer Chromatography, TLC). Γυάλινες πλάκες στην επιφάνεια των οποίων απλώνεται ένα λεπτότατο στρώμα από silica gel, ζελατίνη κ.λπ. δ) **Αέριος χρωματογραφία**. ε) **Υγρή χρωματογραφία υψηλής πίεσης**. Τα δύο τελευταία είδη χρωματογραφίας απαιτούν ειδικά όργανα.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Του **Π. Παπαθεοφάνους**, Χημικού

Στη συνείδηση των περισσότερων μαθητών, ο Χημικός είναι ο μάγος του σχολείου, που ανακατεύοντας διάφορα άχρωμα υγρά δημιουργεί νέα, με εντυπωσιακά χρώματα. Την αντίληψη αυτή πρέπει να εκμεταλλευτούμε όσοι διδάσκουμε το μάθημα της Χημείας στη Β Γυμνασίου και να «κερδίσουμε» τους μικρούς μαθητές μας.

Η εκτέλεση των απλών πειραμάτων, από την πρώτη κιόλας μέρα, από τη μεριά των ίδιων των μαθητών με την καθοδήγηση του καθηγητή τους είναι καθοριστικής σημασίας.

Βέβαια η πειραματική διδασκαλία του μαθήματος της Χημείας προϋποθέτει μεγάλη προετοιμασία από τον καθηγητή και κατάλληλη διαπαιδαγώγηση των μαθητών. Το βιβλίο του Π. Παπαθεοφάνους «Χημεία Β Γυμνασίου» των εκδόσεων ΖΗΤΗ περιέχει ένα σημαντικό αριθμό πειραμάτων σε κάθε κεφάλαιο, που μπορούν να πραγματοποιηθούν από τους μαθητές στο χώρο της τάξης τους ή στο σπίτι με όργανα και υλικά καθημερινής χρήσης.

• Ένα απλό πείραμα που προσφέρεται για την πρώτη επαφή με τους μαθητές και αναφέρεται στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου είναι το *συναισθηματικό γράψιμο*.

Τα υλικά που χρειάζονται: φυσικός χυμός λεμονιού και βάμμα ιωδίου. Τα όργανα εξίσου συνηθισμένα, σταγονόμετρο, χαρτί φωτοτυπίας, πινελάκι ζωγραφικής, ποτηράκι του καφέ και ένα φαρδύ γυάλινο βάζο.

Εκτέλεση του πειράματος

Παίρνουμε το χαρτί φωτοτυπίας, το κόβουμε σε μικρά κομμάτια και τα χωρίζουμε σε ομάδες. Γράφουμε πάνω σε κάθε χαρτάκι, με τη βοήθεια του πινέλου που το βουτάμε στο φλιτζάνι με το χυμό λεμονιού, τα ονόματα των πιο διμοφιλών ποδοσφαιρικών ομάδων και τα μοιράζουμε στους μαθητές με βάση τις συλλογικές τους προτιμήσεις.

Μπροστά σε κάθε μαθητή, αν είναι δυνατόν, βάζουμε ένα γυάλινο βάζο, μπολ ή ποτήρι με νερό. Δίνουμε στους μαθητές το σταγονόμετρο και το μπουκάλι με το βάμμα ιωδίου και τους ζητάμε να ρίξουν στο νερό 20 περίπου σταγόνες βάμματος ιωδίου. Στη συνέχεια τους προτρέπουμε να βουτήξουν το χαρτί μέσα στο δοχείο και να γράψουν στο τετράδιό τους τις παρατηρήσεις τους.

Το αποτέλεσμα είναι πραγματικά εντυπωσιακό. Όλο το χαρτί χρωματίζεται έντονα μοβ εκτός από μια περιοχή που παραμένει άσπρη και απεικονίζει το όνομα της ομάδας. Εξηγούμε στους μαθητές ότι το πείραμα αυτό βοηθάει το χημικό να εντοπίσει –*ανιχνεύσει*– την πιο διαδεδομένη ίσως οργανική ένωση, την κυτταρίνη, που υπάρχει στην κυτταρική μεμβράνη των φυτικών κυττάρων. •

Αξιοποίηση της διάθεσης των μαθητών για συλλογικές δημιουργικές εργασίες

Οι μαθητές του Γυμνασίου επηρεασμένοι ακόμη από τη συλλογική δράση στο Δημοτικό σχολείο, επιζητούν την ανάθεση τέτοιων εργασιών από τους καθηγητές τους, εργασίες που θα επιτρέψουν στους καλούς σε επίδοση μαθητές να αναδείξουν τις διάφορες δεξιότητες και ικανότητές τους, θα τους παρακινήσουν να επισκεφτούν διάφορες βιβλιοθήκες για να βρουν στοιχεία και πληροφορίες, θα τους βοηθήσουν να αρθρώσουν ένα σωστό επιστημονικό λόγο, να παρουσιάσουν στους συμμαθητές την πρωτότυπη εργασία τους και να αισθανθούν περήφανοι με το χειροκρότημα που θα αποσπάσουν. Όμως και οι αδιάφοροι μαθητές μπορούν να βγουν κερδισμένοι από την ανάθεση μιας απλής εργασίας. Η πραγματοποίησή της θα τους ενθαρρύνει και θα τους επιτρέψει να συμμετέχουν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια σειρά από προτεινόμενες συνθετικές δημιουργικές εργασίες που μπορούν να ανατεθούν σε ομάδες μαθητών και να πραγματοποιηθούν και στα πλαίσια των προγραμμάτων κινητικότητας.

Ενδεικτικά αναφέρονται οι τίτλοι μερικών εργασιών

και η προτεινόμενη βιβλιογραφία.

I. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ

– Η ετυμολογία της λέξης «Χημεία».
– Ο πρώτος χημικός.
– Η περίοδος της προϊστορίας της Χημείας.
– Η περίοδος της αλχημείας.
– Η περίοδος της Ιατροχημείας.
– Η περίοδος της ανεξάρτητης χημικής επιστήμης. Οι μεγάλοι χημικοί.
– Κλάδοι της σύγχρονης Χημείας:
  - i. Οργανική Χημεία
  - ii. Ανόργανη Χημεία
  - iii. Αναλυτική χημεία
  - iv. Βιοχημεία - Ιατρική Χημεία
  - v. Βιομηχανική Χημεία
  - vi. Χημεία τροφίμων

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΦΥΣΙΚΗ - ΧΗΜΕΙΑ Εκδοτική Αθηνών.
2. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ ΣΕ ΚΟΜΙΚΣ. Cinzia Ghgliano και Luca Noxelli. Εκδόσεις «κάτοπτρο».
3. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ, Δ. ΚΟΥΡΤΗΣ - Μ. ΜΠΑΣΙΟΣ, Εκδόσεις «Πελεκάνος».
4. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ. Henry M. Leicester. Εκδόσεις «Τροχαλία».
5. ΜΕΓΑΛΟΙ ΧΗΜΙΚΟΙ: Η παλιά φρουρά - Α. Βάρβογλης, Εκδόσεις ΖΗΤΗ.
6. ΜΕΓΑΛΟΙ ΧΗΜΙΚΟΙ: Η ΧΡΥΣΗ ΕΠΟΧΗ - Α. Βάρβογλης, Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΧΗΜΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

– Η αξία των πειραμάτων στην κατανόηση βασικών εννοιών της Χημείας.

i. Διαπίστωση των φυσικών ιδιοτήτων ορισμένων σωμάτων, όπως της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας.
ii. Ανίχνευση του διοξειδίου του άνθρακα στον ατμοσφαιρικό αέρα και στα αέρια της εκπνοής.
iii. Τεχνικές διαχωρισμού ομεγενών μιγμάτων.
iv. Τεχνικές διαχωρισμού ετερογενών μιγμάτων.
v. Διαχωρισμός χημικών ενώσεων στα συστατικά τους. Ηλεκτρόλυση νερού.
vi. Πραγματοποίηση χημικών αντιδράσεων, διαπίστωση της δημιουργίας νέων ουσιών.
vii. Ταχύτητα χημικών αντιδράσεων.
viii. Εξώθερμες αντιδράσεις.
ix. Σειρά δραστικότητας των μετάλλων. Ταξινόμηση των μετάλλων σίδηρος, χαλκός, άργυρος σε σειρά δραστικότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΧΗΜΕΙΑΣ, Γ. Μανουσάκης.
2. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΧΗΜΕΙΑΣ, Τ. Ραγκούσης, Δ. Κατσίνης, Β. Αγγελόπουλος, Εκδόσεις Σαββάλα.
3. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ II. ΣΧΟΛΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΧΗΜΕΙΑΣ, Αικ. Γιούρη - Τσοχατζή, Γ. Μανουσάκης.
4. ΧΗΜΕΙΑ για παιδιά, Javice Van Cleave's, Εκπαιδευτικές εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού.

ΜΙΑ ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΔΥΣΚΟΛΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΙΟΝΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Του **Ερ. Γιακουμάκη**, Χημικού, Ε.Π.Λ. Αλίμου

Θέμα:
Ο υπολογισμός των βαθμών υδρόλυσης των ιόντων καθώς και του pH σε διάλυμα άλατος BH^+A^- συγκέντρωσης C που προέρχεται από ασθενές μονοπρωτικό οξύ HA και ασθενή μόνοξινη βάση B.

τα $\underset{C}{BHA}$ δίνουν $\underset{C}{BH^+} + \underset{C}{A^-}$

Το BH^+ υδρολύεται:

(I): $BH^+ + H_2O \rightleftharpoons B + H_3O^+$

αρχικά (M)	C		
ισορρ. (M)	C–x	x	φ

$$K_h^+ = \frac{K_w}{K_b} = \frac{[B][H_3O^+]}{[BH^+]} \qquad (1)$$

K_h^+: σταθερά υδρόλυσης του κατιόντος BH^+

Το A^- υδρολύεται:

(II): $A^- + H_2O \rightleftharpoons HA + OH^-$

αρχικά (M)	C		
ισορρ (M)	C–y	y	ω

$$K_h^- = \frac{K_w}{K_\alpha} = \frac{[HA][OH^-]}{[A^-]} \qquad (2)$$

Το H_3O^+ από την (I) αντιδρούν με τα OH^- από τη (II) οπότε ακολουθεί η εξουδετέρωση:

(III): $H_3O^+ + OH^- \rightleftharpoons 2H_2O$

αρχικά (M)	x	y
ισορρ. (M)	φ	ω

$$K_w = [H_3O^+][OH^-] \qquad (3)$$

Με πολλαπλασιασμό των (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{K_w}{K_b}\cdot\frac{K_w}{K_\alpha} = \frac{[B][HA]}{[BH^+][A^-]} \qquad (4)$$

Η σταθερά K_h καλείται σταθερά υδρόλυσης του άλατος και φαίνεται να αντιστοιχεί στην εξίσωση

(IV): $BH^+ + A^- \rightleftharpoons B + HA$

που μπορεί να προκύψει από την πρόσθεση των (I), (II), (III) όμως δεν αντιστοιχεί σε πραγματική χημική ισορροπία.

Ακόμη οι βαθμοί υδρόλυσης των ιόντων βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_{BH^+} = \frac{x}{C} = \frac{[B]}{[BH^+]+[B]} = \frac{[B]}{\dfrac{[B][H_3O^+]}{K_h}} = \frac{K_h^+}{K_h^+ + [H_3O^+]} \qquad (5)$$

$$\alpha_{A^-} = \frac{y}{C} = \frac{[HA]}{[A^-]+[HA]} = \frac{[HA]}{\dfrac{[HA][OH^-]}{K_h^-}+[HA]} = \frac{K_h^-}{K_h^- + [OH^-]} = \frac{[H_3O^+]}{K_\alpha + [H_3O^+]} \qquad (6)$$

Από τις εξισώσεις που έχουμε ας προσεγγίσουμε το πρόβλημα:

- **Αν $K_\alpha = K_b$ τότε**

$K_h^+ = K_h^-$ $\quad x=y \quad \alpha_{BH^+} = \alpha_{A^-} \quad [H_3O^+] = [OH^-]$

δηλ. το δ/μα είναι ουδέτερο. Σε μια τέτοια περίπτωση οι σχέσεις που προκύπτουν μελετώντας την ψευδοϊσορροπία (IV) είναι ακριβείς

	BH^+ +	A^- $\rightleftharpoons$	B +	HA
αρχικά (M)	C	C		
ισορρ. (M)	C–x	C–x	x	x

$$\alpha_{BH^+} = \alpha_{A^-} = \frac{x}{C} = \alpha \qquad x = \alpha C$$

$$[BH^+] = [A^-] = C - \alpha C = C(1-\alpha)$$

Η (4) δίνει:

$$K_h = \frac{\alpha C\cdot\alpha C}{C(1-\alpha)\cdot C(1-\alpha)} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \sqrt{K_h} = \sqrt{\frac{K_w}{K_\alpha\cdot K_b}} \qquad (7)$$

Από την (1) προκύπτει ότι:

$$[H_3O^+] = K_h^+ \frac{[BH^+]}{[B]} = \frac{K_w}{K_b} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$[H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_w \cdot K_\alpha}{K_b}} \qquad (8)$$

και επειδή $K_\alpha = K_b$ η (8) δίνει όπως περιμέναμε

$$[H_3O^+] = \sqrt{K_w} = 10^{-7} \qquad pH = 7.$$

- **Αν όμως $K_\alpha \pi K_b$**

τότε $x \pi y$ άρα $\alpha_{BH^+} \pi \alpha_{A^-}$ συνεπώς οι εξισώσεις (7) και (8) δεν είναι ακριβείς.

Έτσι αν $K_\alpha > K_b$ τότε

$$K_h^+ > K_h^- \qquad x > y \qquad \alpha_{BH^+} > \alpha_{A^-}$$

συνεπώς

$$[H_3O^+] > [OH^-] \quad \text{(όξινο δ/μα)}$$

Ενώ αν $K_\alpha < K_b$ τότε

$$K_h^+ < K_h^- \qquad x < y \qquad \alpha_{BH^+} < \alpha_{A^-}$$

συνεπώς

$$[H_3O^+] < [OH^-] \quad \text{(βασικό διάλυμα)}$$

Συνεπώς η άκριτη χρησιμοποίηση της εξίσωσης

(IV): $$BH^+ + A^- \rightleftharpoons B + HA$$

οδηγεί στο χημικό παράδοξο ότι

$$x = y \text{ ή } \alpha_{BH^+} = \alpha_{A^-}$$

(που εκ των προτέρω δεν ισχύει διότι $K_\alpha \pi K_b$) και καταλήγουμε στη σχέση ότι:

$$[H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_w \cdot K_\alpha}{K_b}}$$

η οποία δίνει την τιμή της $[H_3O^+]$ κατά προσέγγιση.

Αν η τιμή αυτή αντικατασταθεί στις σχέσεις (5) και (6) δίνει ότι

$$\alpha_{BH^+} = \alpha_{A^-} = \frac{\frac{K_w}{K_b}}{\frac{K_w}{K_b} + \sqrt{K_\alpha}}$$

κάτι που αναμενόταν αφού η εξίσωση (8) βασίζεται στην υπόθεση ότι $\alpha_{BH^+} = \alpha_{A^-}$.

Το ερώτημα επομένως που τίθεται είναι «Μπορούμε στην περίπτωση $K_\alpha \pi K_b$ να υπολογίσουμε τους διαφορετικούς βαθμούς υδρόλυσης των ιόντων και την ακριβή τιμή του pH».

Επειδή το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε όλα τα βοηθήματα Χημείας που απευθύνονται σε μαθητές της Γ Λυκείου ή ακόμη σε βοηθήματα Γενικής Χημείας που απευθύνονται σε φοιτητές και χρησιμοποιούν την προσεγγιστική λύση της κύριας αντίδρασης (IV), η οποία οδηγεί σε προσεγγιστικές λύσεις, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια αναλυτική λύση μελετώντας ταυτόχρονα τις ισορροπίες (I), (II), (III) και χρησιμοποιώντας παράλληλα τις αρχές της ισοστάθμισης μάζας και της ηλεκτρικής ουδετερότητας.

Ισοστάθμιση μάζας (B):

$$C = [BH^+] + [B] \qquad (9)$$

Ισοστάθμιση μάζας (A):

$$C = [A^-] + [HA] \qquad (10)$$

Ηλεκτρική ουδετερότητα:

$$[H_3O^+] + [BH^+] = [OH^-] + [A^-] \qquad (11)$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων: (1), (2), (3), (9), (10), (11) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\boxed{\begin{aligned} &[H_3O^+]^4 + (C + K_\alpha + K_h^+)[H_3O^+]^3 + \\ &(K_\alpha \cdot K_h^+ - K_w)[H_3O^+]^2 - \\ &(C \cdot K_\alpha \cdot K_h^+ + K_w K_\alpha + K_w \cdot K_h^+) \cdot [H_3O^+] - \\ &K_w K_\alpha K_h^+ = 0 \qquad (12) \end{aligned}}$$

Η 4-θμια αυτή εξίσωση δίνει την $[H_3O^+]$ με σημαντική ακρίβεια και λύνεται συνήθως με τη μέθοδο των προσεγγίσεων (επίπονη διαδικασία). Επομένως για να προσδιορίσουμε από τις εξισώσεις (5) και (6) τους ακριβείς βαθμούς υδρόλυσης των ιόντων είμαστε υποχρεωμένοι να λύσουμε μια πλήρη και πολύπλοκη 4-θμια εξίσωση για να βρούμε την ακριβή τιμή της $[H_3O^+]$!!

Επιπλέον οι μαθητές της Γ Λυκείου αν και γνωρίζουν την αρχή της ηλεκτρικής ουδετερότητας των διαλυμάτων και την αρχή διατήρησης της μάζας δεν συνηθίζουν να χρησιμοποιούν τις αντίστοιχες σχέσεις που προκύπτουν απ' αυτές για την επίλυση των προβλημάτων της ιοντικής ισορροπίας.

Ξεκινώντας από τις δύο παραπάνω διαπιστώσεις θα προτείνουμε μια μαθηματική λύση την οποία θα ονομάσουμε «απόκλιση από τη μέση τιμή», η οποία δίνει ακριβή αποτελέσματα για τους βαθμούς υδρόλυσης και το pH χωρίς να καταφύγουμε στην επίλυση της 4-θμιας εξίσωσης (12).

- *Έστω για παράδειγμα διάλυμα NH_4CN 0,1 M όπου $K_\alpha = 4 \cdot 10^{-10}$, $K_b = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$, $K_w = 10^{-14}$.*

Στην περίπτωση αυτή $K_b > K_\alpha$ άρα

$$K_h^- > K_h^+ \qquad \alpha_{CN^-} > \alpha_{NH_4^+}.$$

Έστω ότι $\alpha_{NH_4^+} = \alpha_1$ και $\alpha_{CN^-} = \alpha_2$.

Δουλεύοντας όπως στην αναλυτική μέθοδο πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) καταλήγουμε στη σχέση (4):

$$K_h = \frac{[NH_3][HCN]}{[NH_4^+][CN^-]} = \frac{x \cdot y}{(C-x)(C-y)} \qquad (\Pi_1)$$

Όμως

$$\alpha_1 = \frac{x}{C} \qquad x = \alpha_1 \cdot C$$

και

$$\alpha_2 = \frac{y}{C} \qquad y = \alpha_2 \cdot C$$

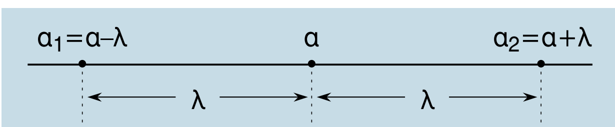
Από (Π_1) προκύπτει:

$$\frac{K_w}{K_\alpha \cdot K_b} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} = \frac{25}{18} \qquad (\Pi_2)$$

Θεωρούμε προσωρινά ότι $x=y$ ή $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ τότε η (Π_2) γίνεται:

$$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 = \frac{25}{18} \qquad \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{5}{3\sqrt{2}} \qquad \alpha = \frac{5}{5+3\sqrt{2}} = 0{,}54$$

Αν λ είναι η απόκλιση των α_1 και α_2 από τη μέση τιμή α τότε $\alpha_2=\alpha+\lambda$ και $\alpha_1=\alpha-\lambda$



οπότε η (Π_2) δίνει:

$$\frac{25}{18} = \frac{(\alpha-\lambda)(\alpha+\lambda)}{(1-\alpha+\lambda)(1-\alpha-\lambda)} = \frac{\alpha^2-\lambda^2}{(1-\alpha)^2-\lambda^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{25(1-\alpha)^2-18\alpha^2}{7}} = 0{,}08$$

Άρα $\qquad \alpha_{NH_4^+} = \alpha_1 = 0{,}54-0{,}08 = 0{,}46$

και $\qquad \alpha_{CN^-} = \alpha_2 = 0{,}54+0{,}08 = 0{,}62$

Για τον υπολογισμό της $[H_3O^+]$ από την (1) συνάγεται ότι

$$[H_3O^+] = \frac{K_h^+ \cdot [NH_4^+]}{[NH_3]}$$

$$[H_3O^+] = \frac{K_h^+ \cdot (C-x)}{x} = K_h^+ \cdot \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \qquad (\Pi_3)$$

Για $\alpha_1=0{,}46$ η (Π_3) γίνεται:

$$[H_3O^+] = \frac{10^{-14}}{1{,}8 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0{,}54}{0{,}46} = 6{,}5 \cdot 10^{-10}\ M$$

pH=9,19

Παρατηρήσεις

1. Από την εξίσωση (Π_2) φαίνεται ότι οι βαθμοί υδρόλυσης α_1 και α_2 των ιόντων είναι ανεξάρτητοι από τη συγκέντρωση C του άλατος. Έτσι η εξίσωση (Π_3) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και το pH του διαλύματος δεν εξαρτάται από την C.

   Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και από τις εξισώσεις (7) και (8).

   Πράγματι η ακριβής τιμή της $[H_3O^+]$ με επίλυση της (12) με την μέθοδο των προσεγγίσεων για C=0,1 M είναι

   $$[H_3O^+]=6{,}5 \cdot 10^{-10}\ M \qquad pH = 9{,}19.$$

   Η ίδια τιμή για την $[H_3O^+]$ προκύπτει και για μια άλλη τιμή της C π.χ. 10^{-4} M.

2. Αντικαθιστώντας την τιμή

   $$[H_3O^+]= 6{,}5 \cdot 10^{-10}\ M$$

   στις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

   $$\alpha_{NH_4^+} = \frac{K_h^+}{K_h^+ + [H_3O^+]} = 0{,}46$$

   και

   $$\alpha_{CN^-} = \frac{[H_3O^+]}{K_\alpha + [H_3O^+]} = 0{,}62.$$

   Αν αντίθετα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

   $$[H_3O^+] = \frac{K_w \cdot K_\alpha}{K_b} = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$$

   pH = 9,33 (προσεγγιστική τιμή)

   οι (5), (6) δίνουν

   $$\alpha_{NH_4^+} = \alpha_{CN^-} = 0{,}54$$

   όπου $0{,}54 = \dfrac{0{,}62+0{,}46}{2}$.

3. Η παραπάνω τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα «δύσκολα προβλήματα» όπως
   i) Στην υδρόλυση όξινων αλάτων ασθενών οξέων π.χ. $NaHCO_3$ όπου το ανιόν HCO_3^- έχει αμφολυτική συμπεριφορά δρα δηλαδή σαν βάση και σαν οξύ,
   ii) Στην υδρόλυση αλάτων ασθενών βάσεων με ασθενή διπρωτικά οξέα π.χ. $(NH_4)_2CO_3$.

Βιβλιογραφία

Θ.Π. Χατζηϊωάννου: *Ποιοτική Ανάλυση και Χημική Ισορροπία.*

ΟΙ ΚΑΤΑΛΥΤΕΣ ΣΤΟ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ ΜΑΣ

Του **Ευ. Παπαγιάγκου,** Χημικού

Οι καταλυτικοί μετατροπείς που βοηθούν στη μείωση των εκπομπών μονοξειδίου του άνθρακα, υδρογονανθράκων και οξειδίων του αζώτου από τα αυτοκίνητα είναι ουσιαστικά δύο μετατροπείς σ' έναν αναγωγικό μετατροπέα και έναν οξειδωτικό, οι οποίοι δρώντας συνδυαστικά μετατρέπουν τους ρύπους σε αβλαβή αέρια.

Οι καταλύτες στους μετατροπείς είναι κατά κύριο λόγο πλατίνα και παλλάδιο που τοποθετούνται σε λεπτό στρώμα πάνω σε πορώδες υλικό με μεγάλη επιφάνεια. Και οι δύο μετατροπείς χρησιμοποιούν τους ίδιους καταλύτες, αλλά μια τελείως διαφορετική ομάδα αντιδράσεων λαμβάνει χώρα στον καθένα.

Το σύστημα ελέγχου που ξεκινά από το καρμπυρατέρ έχει δύο δράσεις: ελαττώνει τη θερμοκρασία ανάφλεξης με συνέπεια να παράγεται λιγότερο NO, και παράγει περίσσεια υδρογονανθράκων (HC), CO και H_2. Τα αέρια αυτά όλα αναγωγικά, χρησιμοποιούνται ως αντιδρώντα στον αναγωγικό μετατροπέα. Μερικές από τις αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στον αναγωγικό μετατροπέα είναι:

$$2CO + 2NO \quad N_2 + 2CO_2$$

$$5H_2 + 2NO \quad 2NH_3 + 2H_2O$$

$$2H_2 + 2NO \quad N_2 + 2H_2O$$

$$CO + H_2O \quad CO_2 + H_2$$

Για να δράσει ο οξειδωτικός καταλύτης, η φτωχή απόδοση σε οξυγόνο του αναγωγικού μετατροπέα πρέπει να εμπλουτιστεί. Ένα ρεύμα αέρα διοχετεύεται στα καυσαέρια καθώς αυτά εισέρχονται στον οξειδωτικό μετατροπέα όπου λαμβάνουν χώρα οι εξής αντιδράσεις:

$$2CO + O_2 \quad 2CO_2$$

$$4HC + 5O_2 \quad 4CO_2 + 2H_2O$$

$$2H_2 + O_2 \quad 2H_2O$$

Έτσι θεωρητικά τα αέρια της εξάτμισης τα οποία βγαίνουν από τον οξειδωτικό μετατροπέα περιέχουν μόνο CO_2, N_2, H_2O και O_2. Στην πραγματικότητα τα ανεπιθύμητα αέρια δεν απομακρύνονται πλήρως.

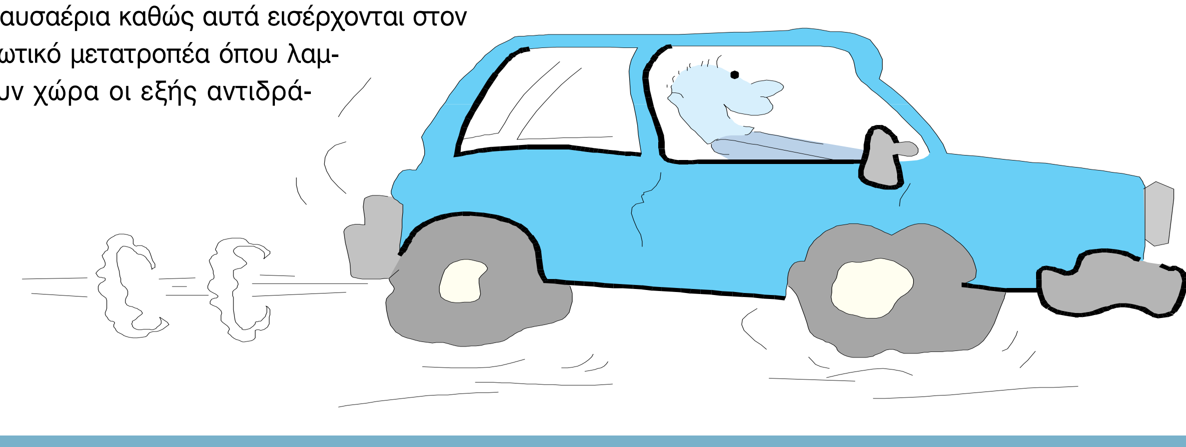
Ένα από τα προϊόντα του αναγωγικού μετατροπέα είναι η NH_3 η οποία στον οξειδωτικό μετατροπέα σχηματίζει ανεπιθύμητα οξείδα του αζώτου σύμφωνα με τις αντιδράσεις:

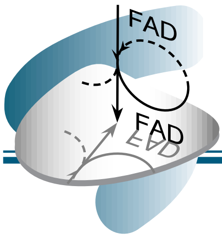
$$4NH_3 + 5O_2 \quad 4NO + 6H_2O$$

$$2NH_3 + 2O_2 \quad N_2O + 3H_2 .$$

Υπάρχουν όμως και πρόσθετες δυσκολίες. Όταν η μηχανή ξεκινά, απαιτούνται αρκετά λεπτά για να φτάσει ο οξειδωτικός μετατροπέας τη θερμοκρασία λειτουργίας του, οπότε το σύστημα πρέπει να βελτιωθεί ως προς τη μηχανική του, προκειμένου ο αναγωγικός μετατροπέας να εκτελεί τις οξειδώσεις προσωρινά.

Και βέβαια να σημειωθεί ότι τα αυτοκίνητα με καταλυτικούς μετατροπείς πρέπει να χρησιμοποιούν μόνο αμόλυβδη βενζίνη, καθώς ο τετρααιθυλιούχος μόλυβδος που προστίθεται στη βενζίνη ως βελτιωτικό (προς αποφυγή προανάφλεξης), μπορεί να επικαλύψει και να «δηλητηριάσει» τον καταλύτη.





ΜΙΤΟΧΟΝΔΡΙΑ

Του **Δημήτρη Κοτρόπουλου**, Βιολόγου

Τα μιτοχόνδρια βρίσκονται σ' όλα τα ευκαρυωτικά κύτταρα και αποτελούν το σύμβολο της εξάρτησης των κυττάρων αυτών από τις αερόβιες συνθήκες. Στο μιτοχόνδριο γίνεται **η οξειδωτική φωσφωρυλίωση**, διεργασία που είναι υπεύθυνη για την παραγωγή του ATP, το οποίο αποτελεί πηγή ενέργειας για όλες τις βιοχημικές αντιδράσεις του κυττάρου. Στο εσωτερικό του μιτοχονδρίου διάφορα οργανικά μόρια, από την αποικοδόμηση των τροφών, οξειδώνονται με μια σειρά χημικών αντιδράσεων που είναι γνωστή ως «**κύκλος του κιτρικού οξέος**» ή «**κύκλος του Krebs**». Τα ηλεκτρόνια που μεταφέρονται στις αντιδράσεις του κύκλου του Krebs περνούν μέσα από μια σειρά ενζυμικών συστημάτων που βρίσκονται στην εσωτερική μεμβράνη του μιτοχονδρίου και προκαλούν φωσφορυλίωση του ADP σε ATP. Έτσι τα μιτοχόνδρια θεωρούνται ως τα «ενεργειακά κέντρα» του κυττάρου.

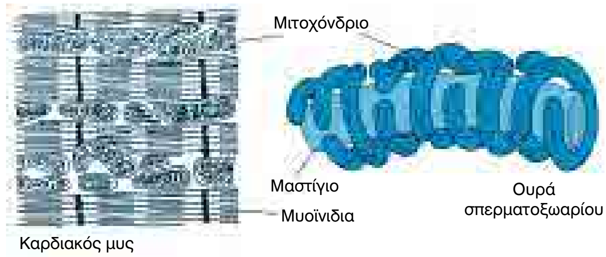
Μορφολογικά χαρακτηριστικά

Μέγεθος και σχήμα

Το μέγεθος των μιτοχονδρίων διαφέρει συνήθως μεταξύ των κυτταρικών τύπων. Στα περισσότερα όμως κύτταρα έχει πλάτος περίπου 0.5 μm και μήκος που πολλές φορές φθάνει μέχρι και τα 7 μm. Το σχήμα των μιτοχονδρίων διαφέρει επίσης ανάμεσα στα κύτταρα αλλά συνήθως πρόκειται για επιμήκεις ωοειδείς ή ραβδόμορφους σχηματισμούς. Σ' ένα συγκεκριμένο κυτταρικό τύπο τα μιτοχόνδρια έχουν την ίδια μορφολογία. Για παράδειγμα, στα μυϊκά κύτταρα, τα μιτοχόνδρια έχουν πολύ μεγαλύτερο μέγεθος και ως προς το σχήμα είναι επιμηκυσμένα.

Κατανομή

Η κατανομή των μιτοχονδρίων στους διάφορους τύπους κυττάρων σχετίζεται άμεσα με την ανάγκη του κυττάρου για παροχή ενέργειας στη συγκεκριμένη κυτταρική θέση. Για παράδειγμα, τα μιτοχόνδρια σχηματίζουν δακτυλίους γύρω από την ουρά των σπερματοζωαρίων ή σειρές κατά μήκος των Ι-ζωνών των μυϊκών κυττάρων (Εικ. 1).



Εικόνα 1. Κατανομή των μιτοχονδρίων στους διάφορους τύπους κυττάρων

Κατά τη μίτωση, τα μιτοχόνδρια συγκεντρώνονται κοντά στη μιτωτική άτρακτο –αυτό γίνεται για να εξοικονομηθεί η ενέργεια που θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα στάδια της διαίρεσης του κυττάρου– και στο τέλος της διαίρεσης κατανέμονται ομοιόμορφα, σχεδόν εξίσου στα θυγατρικά κύτταρα.

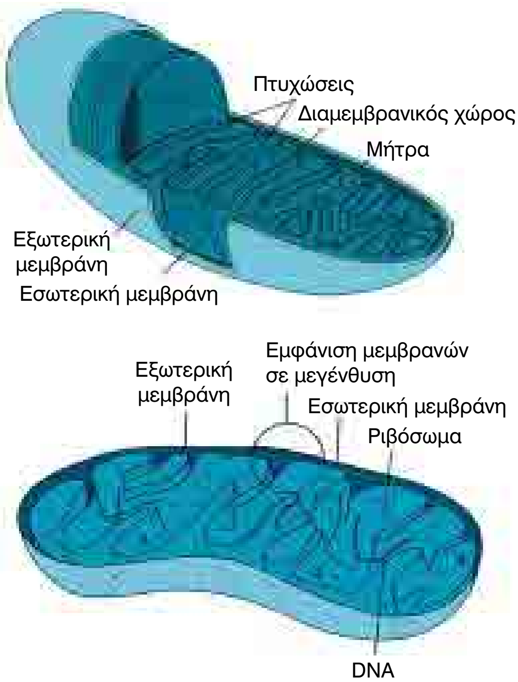
Αριθμός

Ο αριθμός των μιτοχονδρίων ενός κυττάρου μεταβάλλεται ανάλογα με τον τύπο και το λειτουργικό στάδιο του κυττάρου. Για παράδειγμα, σ' ένα ηπατικό κύτταρο βρίσκονται πολλά μιτοχόνδρια, περίπου 1000-1600. Τα μιτοχόνδρια είναι πολύ λιγότερα στα φυτικά κύτταρα απ' ότι στα ζωικά κύτταρα.

Δομή των μιτοχονδρίων

Τα μιτοχόνδρια περιβάλλονται από διπλή στοιχειώδη μεμβράνη. Ο χώρος μεταξύ των δύο μεμβρανών ονομάζεται *διαμεμβρανικός χώρος* ενώ ο χώρος που περικλείεται από την εσωτερική μιτοχονδρική μεμβράνη ονομάζεται μιτοχονδριακή μήτρα. Η εσωτερική μεμβράνη του μιτοχονδρίου σχηματίζει πολύπλοκες αναδιπλώσεις (πτυχώσεις), οι οποίες είναι συνήθως κάθετες προς τον επιμήκη άξονα του μιτοχονδρίου (Εικ. 2).

Ακόμη, έχει αποδειχθεί, ότι τα μιτοχόνδρια περιέχουν ριβοσώματα **(μιτοχονδριακά ριβοσώματα)** των οποίων οι μορφολογικές ιδιότητες είναι ίδιες μ' αυτές των κυτταροπλασματικών ριβοσωμάτων. Αποτελούνται κι αυτά από RNA και πρωτεΐνες και λειτουργούν με τον ίδιο μηχανισμό για τη μιτοχονδριακή σύνθεση πρωτεϊνών, όπως και τα ριβοσώματα του κυτταροπλάσματος.



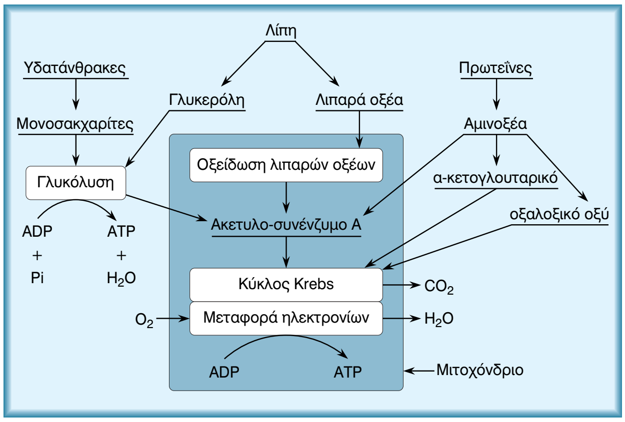
***Εικόνα 2.** Δομή των μιτοχονδρίων*

Τα μιτοχόνδρια, ως προς τη χημική τους σύσταση, περιέχουν πρωτεΐνες, λιπίδια, RNA και ένα μικρό ποσοστό DNA. Στα ζωικά κύτταρα, το μιτοχονδριακό DNA αποτελεί λιγότερο από το 1% του συνολικού DNA του κυττάρου.

Λειτουργίες των μιτοχονδρίων

Με την οξειδωτική φωσφορυλίωση το κύτταρο αποκτά την απαραίτητη ενέργεια, με τη μορφή ATP. Τα τελικά προϊόντα αποικοδόμησης των πρωτεϊνών, υδατανθράκων και λιπιδίων –οξείδωση καύσιμων μορίων– σχηματίζουν ακετυλοσυνένζυμο Α (ακετυλ-CoA), το οποίο μπαίνει στον κύκλο του Krebs. Ο κύκλος του Krebs είναι υπεύθυνος για την οξείδωση των 2/3 όλων των οργανικών ενώσεων του κυττάρου. Η οξείδωση του ακετυλο-συνένζυμου Α στον κύκλο του Krebs δημιουργεί διοξείδιο του άνθρακα (CO_2) και μεταφέρει άτομα υδρογόνου στα συνένζυμα NAD και FAD τα οποία και ανάγονται. Το οξυγόνο είναι ο τελικός αποδέκτης των ηλεκτρονίων που παράγονται από τις αντιδράσεις για το σχηματισμό ATP (Εικ. 3).

Στους ζωντανούς οργανισμούς, η παραγωγή του CO_2 γίνεται από απλές αποκαρβοξυλιώσεις, ουσιαστικά χωρίς απόδοση ενέργειας. ***Η ενεργειακά σημαντική αντίδραση στη ζωντανή ύλη είναι η αναγωγή του οξυγόνου.*** Στις βιολογικές οξειδώσεις, η αναγωγή του οξυγόνου δεν γίνεται σ' ένα στάδιο αλλά σε πολλά, που στο κάθε ένα κατανέμεται και μέρος της ενέργειας. Ένα μέρος της ενέργειας της οξείδωσης εμφανίζεται ως θερμότητα ενώ το υπόλοιπο μετατρέπεται σε χημική ενέργεια με τη μορφή του μορίου ATP. Εάν η ενέργεια αυτή δεν αξιοποιηθεί, τότε θα απελευθερωθεί στο περιβάλλον με μορφή θερμότητας, αυτό όμως θ' αποτελούσε σπατάλη ενέργειας για τους οργανισμούς.



***Εικόνα 3.** Κύρια βιοχημικά μονοπάτια οξείδωσης των υδατανθράκων, λιπών και πρωτεϊνών*

Σε γενικές γραμμές, η οξείδωση μιας ουσίας συνεπάγεται απώλεια ηλεκτρονίων. Όταν για παράδειγμα οξειδώνεται μοριακό υδρογόνο, ελευθερώνει 2 ηλεκτρόνια και μετατρέπεται σε δύο πρωτόνια ($2H^+$). Τα ηλεκτρόνια όμως που απελευθερώνονται πρέπει να παραλαμβάνονται από άλλη οξειδωτική ουσία, όπως είναι για παράδειγμα ο τρισθενής σίδηρος (Fe^{3+}) με αποτέλεσμα να μετατρέπεται σε δισθενή σίδηρο (Fe^{2+}):

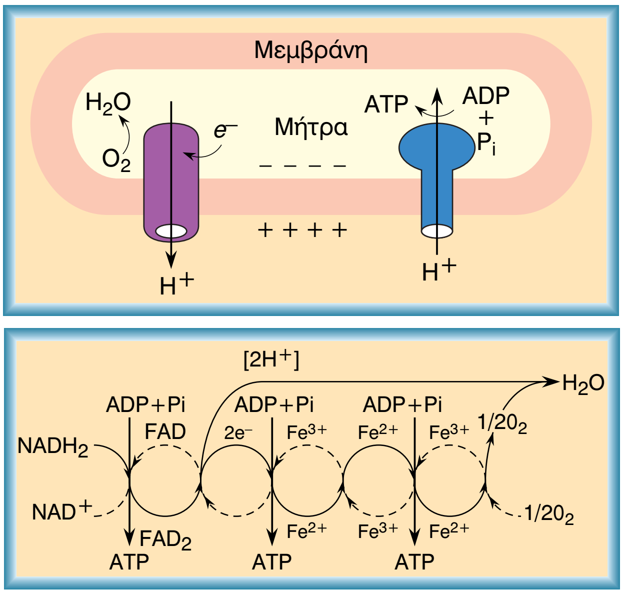
$$\begin{array}{llll} H_2 & - & 2e^- & 2H^+ \\ 2Fe^{3+} & + & 2e^- & 2Fe^{2+} \\ \hline H_2 & - & 2Fe^{3+} & 2H^+ + 2Fe^{2+} \end{array}$$

Οι αντιδράσεις αυτές είναι αμφίδρομες. Ως αποδέκτης ηλεκτρονίων μπορεί να δράσει και το μοριακό οξυγόνο. Εδώ όμως, μόνο το ένα από τα δύο άτομα του οξυγόνου ανάγεται σε H_2O.

Στο κύτταρο όμως δεν οξειδώνεται μοριακό υδρογόνο, αλλά κάποιο υπόστρωμα και συνήθως το συνένζυμο $NADH_2$. Με την οξείδωση των συνενζύμων και τον ιονισμό του υδρογόνου σε πρωτόνια (H^+) και ηλεκτρόνια (e^-), μια αλυσίδα μεταφοράς ηλεκτρονίων που βρίσκεται στην εσωτερική μιτοχονδριακή μεμβράνη **(αναπνευστική αλυσίδα)** δεσμεύει τα ηλεκτρόνια και δημιουργεί μια βαθμίδωση συγκέντρωσης πρωτονίων, δηλαδή ενώ τα ηλεκτρόνια ρέουν διαμέσου της αναπνευστικής αλυσίδας, τα πρωτόνια αντλούνται από τη μία πλευρά της εσωτερικής μιτοχονδριακής μεμβράνης προς την άλλη. Τα ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας που παράγονται από το $NADH_2$ και το $FADH_2$ μεταφέρονται κατά μήκος της αναπνευστικής αλυσίδας με τη βοήθεια ενζυμικών συμπλόκων, τα οποία είναι διαταγμένα το ένα δίπλα στο άλλο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η κανονική ροή των ηλεκτρονίων από τα συνένζυμα προς τους υπόλοιπους αποδέκτες.

Τα κυριότερα ένζυμα της αναπνευστικής αλυσίδας είναι τα κυτοχρώματα. Τα κυτοχρώματα περιέχουν σίδηρο και μπορούν να μεταφέρουν ηλεκτρόνια. Το τελευταίο από τα ένζυμα της αναπνευστικής αλυσίδας ονομάζεται **οξειδάση του κυτοχρώματος** και καταλύει την τελική ένωση του οξυγόνου με το υδρογόνο. Το σύμπλοκο της οξειδάσης του κυτοχρώματος είναι υπεύθυνο για την πρόσληψη του 90% του οξυγόνου στα περισσότερα κύτταρα.

Στενά συνδεδεμένο με την αναπνευστική αλυσίδα είναι το σύστημα φωσφορυλίωσης, το οποίο βρίσκεται στην εσωτερική μιτοχονδρική μεμβράνη, δηλαδή έχει εξελιχθεί ένας μηχανισμός που μετατρέπει μέρος της ενέργειας της οξείδωσης των υποστρωμάτων σε χημική ενέργεια, συνθέτοντας μόρια ATP. Ορισμένες από τις αντιδράσεις μεταφοράς ηλεκτρονίων στην αναπνευστική αλυσίδα αποδίδουν ενέργεια που χρειάζεται η αντίδραση δημιουργίας του ATP. Έτσι λοιπόν, η οξείδωση του $NADH_2$ δίνει 3 μόρια ATP (για κάθε τρία φωσφορικά που ενσωματώνονται σε αντίστοιχα μόρια ADP καταναλώνεται ένα άτομο οξυγόνου) ενώ η οξείδωση του $FADH_2$ δίνει 2 μόρια ATP (Εικ. 4).



Εικόνα 4. Σχηματική παράσταση της ροής ηλεκτρονίων διαμέσου των ενζυμικών συμπλόκων της αναπνευστικής αλυσίδας με τα σημεία σύζευξης με την οξειδωτική φωσφορυλίωση. Η οξείδωση και η σύνθεση του ATP είναι συνδεδεμένες μέσω της διαμεμβρανικής ροής πρωτονίων.

Ημιαυτόνομα οργανίδια

Τα μιτοχόνδρια έχουν, ως ένα βαθμό, κάποια αυτονομία μέσα στο κύτταρο αφού περιέχουν μόρια DNA, ένζυμα και ριβοσώματα και έχουν την ικανότητα για το σχηματισμό RNA και για πρωτεϊνική σύνθεση.

Προέλευση των μιτοχονδρίων

Σήμερα είναι γενικά αποδεκτό ότι τα μιτοχόνδρια δημιουργήθηκαν από την εισβολή αερόβιων και αναερόβιων φωτοσυνθετικών βακτηρίων σε αρχέγονα κύτταρα και την ανάπτυξη συμβιωτικών σχέσεων. Σύμφωνα λοιπόν με τη **θεωρία της συμβίωσης**, το μιτοχόνδριο ήταν κάποτε προκαρυωτικός, ατελής, αυτόνομος, μιτοκύτταρος οργανισμός και άρχισε να συμβιώνει με το ευκαρυωτικό κύτταρο, μέσα στο οποίο έχασε πολλές από τις λειτουργίες του, αφού τις διέθετε το κύτταρο-δέκτης και έτσι μετατράπηκε σε οργανίδιο. Επομένως, τα ευκαρυωτικά κύτταρα άρχισαν τη ζωή τους ως πρωτόγονοι οργανισμοί χωρίς βακτήρια. Μετά την εισβολή κάποιου βακτηρίου, δημιουργείται σχέση ενδοσυμβίωσης και το ευκαρυωτικό κύτταρο χρησιμοποιεί το σύστημα οξειδωτικής φωσφορυλίωσης του βακτηρίου για δική του χρήση.

Αυτή η συμβίωση ήταν επωφελής, γιατί το βασικότερο πρόβλημα των πρώτων ευκαρυωτικών κυττάρων ήταν η ανάγκη της προσαρμογής τους σε ένα περιβάλλον όπου η πυκνότητα του O_2 στην ατμόσφαιρα αυξανόταν, ενώ ταυτόχρονα έπρεπε να γίνεται αποτελεσματική χρησιμοποίηση του αερίου αυτού. Στην αρχή αυτή η συμβίωση θα πρέπει να ήταν προαιρετική, μετά έγινε υποχρεωτική. Για τους χλωροπλάστες, οι οποίοι μοιάζουν με τα μιτοχόνδρια, ίσως να έγινε μια παρόμοια διαδικασία.

Επειδή τα μιτοχόνδρια των ζωικών και φυτικών κυττάρων είναι όμοια μορφολογικά, πιστεύεται ότι η ανάπτυξη των μιτιχονδρίων έγινε πριν από το διαχωρισμό ζωικών και φυτικών κυττάρων.

◆

Διορθώσεις στο άρθρο: **ΜΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΤΗΝ Α ΛΥΚΕΙΟΥ**

Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί Νº 4 Δεκέμβριος 1997

σ. 9 στήλη 1: να διαγραφεί η πρόταση: Οι αντιλήψεις για τη μάθηση που κυριαχούν τα τελευταία χρόνια στη Διδακτική των Μαθηματι

σ. 10 στήλη 1: η σχέση $\sqrt{x^2} = x$ να γίνει $\sqrt{x^2} = \Omega x\Omega$ και η σχέση $\sqrt{x^2} = \Omega x\Omega$ να γίνει $\sqrt{x^2} = x$

σ. 11 στήλη 2: Στο παράδειγμα β αντί για $A = \Omega x+2\Omega + \Omega x-2\Omega$ να γραφτεί $\Omega x+2\Omega+\Omega x-2\Omega = 6$

Στο παράδειγμα γ αντί για $\Omega x-2\Omega > 3$ να γραφτεί $\Omega x-2\Omega < 3$

σ. 12 στήλη 1: Αντί $\left\{ x \Omega x - \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2} \right\}$ να γραφτεί $\left\{ x \Omega \left| x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| < \frac{\beta-\alpha}{2} \right\}$

ΠΕΡΙ ΒΙΒΛΙΑΝΑΓΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Της **Παναγιώτας Αλατζόγλου**, Φιλολόγου

Σ’ αυτό το σημείωμα θα ήθελα ν’ ασχοληθώ με το θέμα της βιβλιανάγνωσης και με το συναφές θέμα των σχολικών βιβλιοθηκών.

Θα ήθελα ν’ αρχίσω μ’ αυτό που γράφει ο Ιωάννης ο Χρυσόστομος στο έργο του «Ομιλία Θ εις την προς Κολοσσαείς επιστολήν του Αποστόλου Παύλου»: «Ακούσατε, παρακαλώ, πάντες οι βιωτικοί, και κτάσθε βιβλία, φάρμακα της ψυχής [...]» γράφει ο Χρυσόστομος χαρακτηρίζοντας το βιβλίο, που είναι δημιούργημα πνευματικό, έκφραση και φορέας ιδεών, ως φάρμακο της ψυχής. Και γιατί είναι το βιβλίο «φάρμακο της ψυχής»; Γιατί βοηθάει τον άνθρωπο να βγει από το μονοδιάστατο υλικό προσανατολισμό του, από τον κύκλο του ευδαιμονισμού στον οποίο είναι κλεισμένος. Γιατί τον βοηθάει εν τέλει να βρει τον εαυτό του ξεφεύγοντας από το κυνήγι του κέρδους που τον αλλοτριώνει.

Αν είναι έτσι τα πράγματα, γίνεται φανερό πόσο ιδιαίτερα σημαντική είναι η επαφή των νέων ανθρώπων με το βιβλίο και κατά συνέπεια με τον κόσμο των ιδεών, αφού μόνο έτσι θα μπορέσουν οι νέοι να παίξουν ηγετικό ρόλο τόσο στον κοινωνικό όσο και στον πνευματικό τομέα. Γιατί το βιβλίο προωθεί την ανθρώπινη σκέψη, διευρύνει τους πνευματικούς μας ορίζοντες, καταδεικνύει το μοναδικό και ανεπανάληπτο της ζωής του καθενός, την ύπαρξη άλλων σκέψεων, αποδεικνύει την πολυπλοκότητα της ζωής, βοηθάει να ζήσουμε μέσα από τις σελίδες του πάμπολλες άλλες ζωές, μας κάνει κοινωνούς με την εμπειρία του παρελθόντος, βοηθάει τον άνθρωπο να κάνει σωστές επιλογές. Γιατί, μόνο η σωστή πληροφόρηση μπορεί να μας βοηθήσει να γίνουμε ικανοί να κρίνουμε και να επιλέγουμε ό,τι μας συμφέρει καλύτερα και ιδίως να εκλέγουμε άξιους χειριστές των πολιτικών μας πραγμάτων.

Μετά απ’ όλα αυτά έγινε, νομίζω, σαφές ότι, αν θέλουμε ένα καλύτερο αύριο για τα παιδιά μας, οφείλουμε να ιδρύσουμε σχολικές βιβλιοθήκες, αφού έτσι θα τους εξασφαλίσουμε μια συνεχή επαφή με τον κόσμο των ιδεών. «Σχολεῖον χωρίς βιβλία εἶναι τό αὐτό καί τεχνίτου ἐργαστήριον, γυμνόν ἀπό τά ἀναγκαῖα τῆς τέχνης ἐργαλεῖα» γράφει ο Αδ. Κοραής παραμένοντας εκπληκτικά σύγχρονος, αφού ακόμη στις μέρες μας και δεν έχει καταστεί η σχολική βιβλιοθήκη θεσμός στη συνείδησή μας, όπως το σχολείο το ίδιο.

Πρέπει, όμως, να θεωρείται πια αυτονόητη η ύπαρξη σχολικής βιβλιοθήκης, γιατί η παρουσία πολλών βιβλίων στο σχολείο δηλώνει πολυφωνία, όχι μια μόνο γνώμη, όχι την αποδοχή ενός τρόπου σκέψης ή μιας αλήθειας· η ύπαρξη πολλών βιβλίων στο σχολείο είναι έκφραση δημοκρατική, αφού επιτρέπει την πολλαπλότητα, την αναζήτηση και της αντίθετης άποψης και συντελεί έτσι στη σύνθεση και στη δημιουργία προσωπικότητας συγκροτημένης· τα πολλά βιβλία ριζώνουν σε περιβάλλον ελευθερίας και εμείς ζούμε, βέβαια, σ’ ένα περιβάλλον ελεύθερο· ωστόσο, πρέπει πάντα κάτι τέτοιο ν’ αποδεικνύεται.

ΠΛΑΓΙΟΣ ΛΟΓΟΣ

(ΛΑΤΙΝΙΚΑ)

Του **Β. Ι. Αθανασά**, Φιλολόγου

Ορισμός

Πλάγιο λόγο έχουμε όταν τα λόγια κάποιου δεν τα ακούμε ή δεν τα πληροφορούμαστε ακριβώς όπως τα είπε αλλά εξαρτημένα από κάποιο ρήμα. Η εξάρτηση συνεπάγεται τροποποιήσεις ως προς τις εγκλίσεις, τους χρόνους, τις αντωνυμίες αλλά και ως προς ορισμένα επιρρήματα τοπικά ή χρονικά.

Σημείωση

Μερικές φορές η εξάρτηση από ρήμα είναι χαλαρή και ο λόγος εκφέρεται αμετάβλητος μέσα σε εισαγωγικά. Στην περίπτωση αυτή, αφού πρόκειται για μεταφορά λόγων που ειπώθηκαν χωρίς όμως τροποποίηση, μιλάμε για **έμμεσο ευθύ λόγο.**

Γενικά

1. Στον πλάγιο λόγο μεταφέρονται ανεξάρτητες προτάσεις και, καθώς οι προτάσεις αυτές διακρίνονται σε κρίσης και επιθυμίας, μπορούμε να πούμε ότι στον πλάγιο λόγο μεταφέρεται κάθε κρίση και κάθε επιθυμία ή προτροπή μας.
2. Και οι δευτερεύουσες προτάσεις μπορούν να μεταφερθούν στον πλάγιο λόγο, εφόσον εξαρτηθούν από κάποιο ρήμα (πιο συχνά οι αναφορικές και οι υποθετικές).

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΥΡΙΑΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΚΡΙΣΗΣ ΣΕ ΠΛΑΓΙΟ ΛΟΓΟ

Εξάρτηση: Ο πλάγιος λόγος κρίσης ακολουθεί λεκτικά, γνωστικά, δοξαστικά ή ερωτηματικά ρήματα.

Για να μετατρέψουμε μια κύρια πρόταση κρίσης σε πλάγιο λόγο, δουλεύουμε ως εξής:

– Παίρνουμε το ρήμα εξάρτησης.

– Παίρνουμε το υποκείμενο του ρήματος της πρότασης κρίσης και το τρέπουμε σε αιτιατική χωρίς να πειράξουμε τον αριθμό του.

– Παίρνουμε το ρήμα της πρότασης και το τρέπουμε σε απαρέμφατο του ίδιου χρόνου, το οποίο θα έχει υποκείμενο την αιτιατική.

Σημείωση:

1. Η μετατροπή του ευθέος λόγου σε πλάγιο συνεπάγεται μεταβολές και των διάφορων αντωνυμιών ως εξής:
   α) Οι προσωπικές και κτητικές αντωνυμίες 1ου προσώπου (ego, meus) μετατρέπονται σε 3ου προσώπου (se, suus) αντίστοιχα. Αν όμως δε χρειάζεται να δηλωθεί αυτοπάθεια ή αν χρειάζεται να δηλωθεί αντίθεση, η ego μπορεί να μετατραπεί σε ispe και η meus σε γενική ipsius.
   β) Οι αντωνυμίες του 2ου προσώπου (tu, tuus) γίνονται ille ή is, illius ή eius αντίστοιχα.
   γ) Η hic ή η iste ή η ille ή η is μεταβάλλονται σε ille ή is.
2. Οριστ. ενεστ.-πρτ. = απαρμφ ενεστ.
   Οριστ. πρκ. - υπερσ. = απρμφ. πρκ.
   Οριστ. μέλ. - σ. μέλ. = απρμφ. μέλ.

   Όταν το ρήμα που έρχεται στον πλάγιο λόγο δεν έχει σουπίνο και μετοχή μέλλοντα, για να σχηματίσει απαρέμφατο μέλλοντα, στη θέση του απαρεμφάτου ενεργητικού και παθητικού μέλλοντα έχουμε fore (ή futurum esse) ut + υποτακτ. ενεστ. ή παρατατ. (ανάλογα με την αρκτ. ή ιστορική εξάρτηση). Η πρόταση ut + υποτ. ενεστ. ή παρατ. είναι συμπερασματική.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΥΡΙΑΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΕΠΙΘΥΜΙΑΣ ΣΕ ΠΛΑΓΙΟ ΛΟΓΟ

1. Την έγκλιση, η οποία συνήθως είναι προστακτική, την τρέπουμε σε υποτακτική και σχηματίζουμε βουλητική πρόταση, το ρήμα της οποίας θα έχει υποκείμενο αντωνυμία 3ου προσώπου.
2. Προσέχουμε την εξάρτηση. Μεγάλη σημασία έχει το πρόσωπο του ρήματος από το οποίο εξαρτάται

η βουλητική. Φυσικά πλάγιο λόγο έχουμε απ' όλα τα ρήματα που εξαρτώνται βουλητικές προτάσεις π.χ. veni = έλα)   peto ut venias ή petit ut veniat.

Σημείωση:

Μετά από ρήματα που σημαίνουν διαταγή ή απαίτηση μπορεί να έχουμε πλάγιο λόγο επιθυμίας, ο οποίος εκφέρεται με τελικό απαρέμφ. του πλάγιου λόγου επιθυμίας.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΠΛΑΓΙΟΥ ΛΟΓΟΥ ΚΡΙΣΗΣ ΣΕ ΕΥΘΥ

Τρέπουμε το υποκείμενο του απαρεμφάτου σε ονομαστική χωρίς να πειράξουμε τον αριθμό του.

Τρέπουμε το απαρέμφατο σε οριστική που θα έχει υποκείμενο την ονομαστική.

Σημείωση:

1. α) Το απαρμφ. ενεστώτα τρέπεται σε ενεστώτα μετά από αρκτικό χρόνο, σε ενεστώτα ή παρατατικό μετά από ιστορικό χρόνο.
   β) Το απρμφ. παρακειμένου τρέπεται σε παρακείμενο μετά από αρκτικού χρόνου εξάρτηση, σε παρακείμενο ή υπερσυντέλικο μετά από ιστορικού χρόνου εξάρτηση.
   γ) Το απρμφ. μέλλοντα τρέπεται σε μέλλοντα απλό μετά από αρκτικού ή ιστορικού χρόνου εξάρτηση.

2. Τη μετατροπή του απρμφ. του πλαγίου λόγου κρίσης σε ευθύ ακολουθούν κι άλλες μετατροπές. Έτσι:
   α) Οι αντωνυμίες του γ προσώπου (se, suus) γίνονται αντωνυμίες α προσώπου (ego, meus).
   β) Η αντωνυμία ille ή η is γίνεται προσωπική του β προσώπου (δηλ. tu).
   γ) Η γενική illius ή eius γίνεται κτητική β προσώπου (tuus).
   δ) Η αντωνυμία ille ή is γίνεται hic ή iste ή ille ή is.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΠΛΑΓΙΟΥ ΛΟΓΟΥ ΕΠΙΘΥΜΙΑΣ ΣΕ ΕΥΘΥ

Οι βουλητικές προτάσεις τρέπονται πάντα σε προστακτική ενεστώτα β ενικού ή πληθυντικού προσώπου σύμφωνα με το υποκείμενό τους.

Αν το ρήμα της βουλητικής βρίσκεται σε παθητική φωνή, προτιμάται η μετατροπή με προτρεπτική υποτακτική. Επίσης, αν είναι αρνητική, αποδίδεται με noli ή nolite και απαρέμφατο ενεστώτα. Το τελικό απρμφ. του πλάγιου λόγου επιθυμίας επίσης τρέπεται σε προστακτική ενεστώτα, ανάλογα με το υποκείμενό του. Αν είναι παθητικό το απρμφ., αποδίδεται με προτρεπτική υποτακτική.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ ΣΕ ΠΛΑΓΙΑ

1. Αν το ρήμα της ευθείας είναι σε ενεστώτα οριστικής, μετά από αρκτική εξάρτηση γίνεται ενεστώτας υποτακτικής και μετά από ιστορική εξάρτηση γίνεται παρατατικός υποτακτικής.
2. Αν το ρήμα της ευθείας είναι σε παρακείμενο οριστικής, μετά από αρκτική εξάρτηση γίνεται παρακείμενος υποτακτικής και μετά από ιστορική εξάρτηση γίνεται υπερσυντέλικος υποτακτικής.
3. Αν το ρήμα της ευθείας είναι σε μέλλοντα οριστικής, μετά από αρκτική εξάρτηση γίνεται ενεστώτας υποτακτικής της ενεργητικής περιφραστικής συζυγίας και μετά από ιστορική εξάρτηση γίνεται παρατατικός υποτακτικής της ενεργητικής περιφραστικής συζυγίας.
4. Στις πλάγιες ερωτήσεις το num και το -ne χρησιμοποιούνται χωρίς διαφορά στη σημασία (= αν).
5. Το nonne (= αν δεν) χρησιμοποιείται συνήθως μόνο μετά το ρήμα quaero.
6. Στις διμελείς πλάγιες ερωτήσεις το «ή όχι» εκφράζεται με το necne (στις ευθείες με το an non).
7. Πλάγιες ερωτήσεις εισάγονται και με το si μετά από ρήματα που σημαίνουν αναμονή (expecto) ή απόπειρα (conor, tempto). Επίσης εισάγονται με το an (an non) μετά τα: haud scio, nescio (αγνοώ), dubito (αμφιβάλλω), incertum est (είναι αβέβαιο).

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΛΑΓΙΑΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

1. Ο ενεστώτας ή παρατατικός της πλάγιας ερώτησης γίνεται ενεστώτας οριστικής στην ευθεία ερώτηση.
2. Ο παρακείμενος ή υπερσυντέλικος υποτακτικής της πλάγιας γίνεται παρακείμενος οριστικής στην ευθεία.
3. Ο ενεστώτας ή παρατατικός της ενεργητικής περιφραστικής συζυγίας της πλάγιας γίνεται απλός μέλλοντας οριστικής στην ευθεία.

ΟΙ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΕΥΘΥ ΛΟΓΟΥ ΣΤΟΝ ΠΛΑΓΙΟ ΛΟΓΟ

1. Η **οριστική** μιας δευτερεύουσας στον ευθύ λόγο πρότασης, οποιουδήποτε χρόνου, στον πλάγιο λόγο γίνεται υποτακτική, αρκτικού χρόνου, αν το ρήμα εξάρτησης είναι σε αρκτικό χρόνο, η υποτακτική ιστορικού χρόνου, αν το ρήμα εξάρτησης είναι ιστορικού χρόνου.

   α) Η **οριστική ενεστώτα** γίνεται υποτακτική ενεστώτα εξαρτώμενη από αρκτικό χρόνο ή υποτ. παρατατικού από ιστορικό.

   Η υποτακτική αυτή στη δευτερεύουσα πρόταση δηλώνει πράξη σύγχρονη με την πράξη του ρήματος εξάρτησης.

   β) Η **οριστική παρατατικού** γίνεται:

   I. Υποτακτική παρατατικού, όταν η πράξη της δευτερεύουσας είναι σύγχρονη με την πράξη του ρήματος εξάρτησης.

   II. Υποτακτική παρακειμένου ή υπερσυντέλικου ανάλογα με την εξάρτηση από αρκτικό χρόνο ή ιστορικό, όταν η πράξη της δευτερεύσας είναι προτερόχρονη της πράξης του ρήματος εξάρτησης.

   γ) Η **οριστική παρακειμένου** (κυρίως ή ιστορικού) και η **οριστική υπερσυντελίκου** γίνονται υποτακτική παρακειμένου ή υπερσυντελίκου ανάλογα με την εξάρτηση από αρκτικό ή ιστορικό χρόνο.

   Η υποτακτική αυτή δηλώνει πάντα το προτερόχρονο σε σχέση με την πρόταση απ' την οποία εξαρτάται.

   δ) Η **οριστική του συντελεσμένου μέλλοντα** γίνεται υποτακτική παρακειμένου ή υπερσυντελίκου ανάλογα με την εξάρτηση από αρκτικό ή ιστορικό χρόνο.

   Δηλώνει πάντα το προτερόχρονο σε σχέση με την πρόταση εξάρτησης.

   ε) Η **οριστική του μέλλοντα** του ευθέος λόγου στον πλάγιο γίνεται:

   I. Υποτακτική σε -urus sim (ενεστ. υποτ. ενεργ. περιφρ. συζυγ.)

   -urus essem (παρατ. υποτ. ενεργ. περιφρ. συζυγ.) σύμφωνα με την ακολουθία των χρόνων.

   II. Υποτακτική ενεστώτα ή παρατατικού σύμφωνα με την ακολουθία των χρόνων (δηλ. ανάλογα με την εξάρτηση από αρκτ. ή ιστορ. χρόνο)

2. Η **υποτακτική** δευτερεύουσας πρότασης του ευθύ λόγου παραμένει και στον πλάγιο διατηρώντας ή μεταβάλλοντας το χρόνο της.

   α) Η **υποτακτική αρκτικού χρόνου** δευτερεύουσας πρότασης του ευθέος λόγου στον πλάγιο παραμένει αμετάβλητη, αν το ρήμα εξάρτησης είναι αρκτικού χρόνου. Μεταβάλλεται, όμως, στον αντίστοιχο κατά την ακολουθία ιστορικό χρόνο της υποτακτικής, αν το ρήμα εξάρτησης είναι ιστορικού χρόνου.

   β) Η **υποτακτική ιστορικού χρόνου** (παρατατικού - υπερσυντελίκου) δευτερεύουσας πρότασης του ευθέος λόγου στον πλάγιο λόγο παραμένει αμετάβλητη, όποιος κι αν είναι ο χρόνος του ρήματος εξάρτησης.

Σημειώσεις:

1. Η οριστική διατηρείται στον πλάγιο λόγο, όταν θεωρείται ότι η πρόταση λειτουργεί ανεξάρτητα από τον πλάγιο λόγο. Η διατήρηση της οριστικής σε δευτερεύουσες προτάσεις στον πλάγιο λόγο δεν οφείλεται στη μη αυστηρή τήρηση του κανόνα, αλλά στην προσπάθεια του συγγραφέα να δηλώσει με την οριστική το πραγματικό και αναμφισβήτητο, κάτι δηλαδή που το παραδέχεται και ο ίδιος.
2. Η οριστική στις αναφορικές προτάσεις παραμένει στον πλάγιο λόγο, όταν η αναφορική πρόταση αποτελεί περίφραση για κάτι που μπορούσε να εκφραστεί από ένα ουσιαστικό.
3. Οι αναφορικές προτάσεις που στον πλάγιο λόγο χρησιμοποιούνται σαν επεξηγήσεις του συγγραφέα, δεν αποτελούν μέρος της πλάγιας αναφοράς και εκφέρονται με οριστική.

ΟΙ ΑΝΤΩΝΥΜΙΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΠΙΡΡΗΜΑΤΑ (ΧΡΟΝΙΚΑ - ΤΟΠΙΚΑ) ΣΤΟΝ ΠΛΑΓΙΟ ΛΟΓΟ

Για τις αντωνυμίες είπαμε παραπάνω πώς μετατρέπονται.

Τα επιρρήματα στον πλάγιο λόγο μετατρέπονται ως εξής:

nunc tunc ή tum

hodie (σήμερα) illo die

cras (αύριο) postero die

hic (εδώ) ibi (εκεί)

hoc loco illo loco.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥ

Του **Δ. Κ. Φαρμάκη**, Φιλολόγου

Γενικά

Επειδή η μετάβαση από τη μια θεματική ενότητα στην άλλη ενέχει τον κίνδυνο της αποσπασματικότητας και της προβληματικής συνοχής του κειμένου, καταφεύγουμε στη χρήση μεταβατικών παραγράφων, που συνιστούν ευδιάκριτες οπτικά συνδετικές μορφές λόγου.

Ο ρόλος της

Η μεταβατική παράγραφος δεν έχει αναπτυξιακό χαρακτήρα, αλλά αποκλειστικά συνδετικό. Ειδικότερα χρησιμοποιείται για τη σύνδεση **θεματικών ενοτήτων** (π.χ. Αιτίες + Αποτελέσματα) **και όχι για την αλληλουχία των παραγράφων**. Από άποψη περιεχομένου συγκροτείται από δύο μέρη: Το πρώτο **(ανακεφαλαιωτικό - συμπερασματικό)** αναφέρεται στα προλεγόμενα και συνοψίζει επιγραμματικά την προηγούμενη θεματική ενότητα. Το δεύτερο **(προεξαγγελτικό)** «προανακρούει» με συντομία την επόμενη θεματική ενότητα και προετοιμάζει τον αναγνώστη για όσα θα ακολουθήσουν.

Η θέση της

Συνάγεται εύκολα από τα παραπάνω ότι η μεταβατική παράγραφος τοποθετείται ανάμεσα στις θεματικές ενότητες, συντελώντας στη λογική και αβίαστη ροή των διανοημάτων μας και στη συνοχή του κειμένου.

Χρήσιμες επισημάνσεις:

1) Η έκταση μιας μεταβατικής παραγράφου ορίζεται στους 4-8 στίχους.
2) Τα μέρη (ανακεφαλαιωτικό και προεξαγγελτικό), που απαρτίζουν μια μεταβατική παράγραφο, δεν είναι κατ’ ανάγκη **ισόποσα**.
3) Το περιεχόμενο της μεταβατικής παραγράφου καθορίζεται - εξαρτάται από το νοηματικό περιεχόμενο των θεματικών ενοτήτων που αυτή συνδέει.
4) Η χρήση της μεταβατικής παραγράφου είναι προαιρετική.
5) Η κατάχρηση της μεταβατικής παραγράφου προκαλεί ακαμψία και μονοτονία ύφους στο ανάπτυγμα του λόγου μας.
6) Ένας άλλος τρόπος μετάβασης από τη μια νοηματική ενότητα στην άλλη είναι η ενσωμάτωση του προεξαγγελτικού μόνο μέρους της μεταβατικής παραγράφου στο τέλος της προηγούμενης ενότητας.

Παραδείγματα - Εφαρμογές:

Α Θεματική ενότητα

Επιπτώσεις πολέμου

Β Θεματική ενότητα

Ληπτέα μέτρα αποτροπής του

Ανακεφαλαιωτικό μέρος

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι ολέθριες είναι οι συνέπειες του πολέμου σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο και δυσοίωνες οι προοπτικές για την εδραίωση της ειρήνης.

Προεξαγγελτικό μέρος

Ωστόσο, χρέος αμετάθετο έχουμε να αναλάβουμε αποφασιστικές πρωτοβουλίες σε παγκόσμιο επίπεδο για την επίτευξη του πανανθρώπινου αυτού στόχου.

Α Θεματική ενότητα

Αίτια βίας

Β Θεματική ενότητα

Επιπτώσεις βίας

Ανακεφαλαιωτικό μέρος

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι τα αίτια που υποκινούν τις αντικοινωνικές εκδηλώσεις και τροφοδοτούν τα φαινόμενα (βίας) είναι πολλά και σύνθετα.

Προεξαγγελτικό μέρος

Πολλές, όμως, και σοβαρές είναι και οι επιπτώσεις της κοινωνικής αυτής μάστιγας, οι οποίες ανάγονται σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης ζωής και δραστηριότητας.

Α Θεματική ενότητα

Θετική λειτουργία της διαφήμισης

Β Θεματική ενότητα

Αρνητική πλευρά της της διαφήμισης

Ανακεφαλαιωτικό μέρος

Γίνεται, λοιπόν, φανερό ότι η διαφήμιση συμβάλλει θετικά στην προαγωγή του πολιτισμού σε όλες του τις εκφάνσεις.

Προεξαγγελτικό μέρος

Ωστόσο, δεν είναι λίγοι εκείνοι που υπογραμμίζουν την αρνητική διάσταση του ρόλου της, που αποτελεί πηγή πλήθους δεινών για τον άνθρωπο.

Ιδιαίτερη παρατήρηση: Πολλές φορές η μεταβατική παράγραφος αναφέρεται σε ενδιάμεση –λογικά– ενότητα που δε μας ζητείται ρητά να την ερευνήσουμε. Για παράδειγμα, όταν σε προτεινόμενο θέμα μας υποδεικνύεται η διερεύνηση: **αιτίων** και **τρόπων αντιμετώπισης ενός αρνητικού παράγοντα (π.χ. φανατισμός)**, τότε η μεταβατική παράγραφος μπορεί επιγραμματικά να περιγράφει - αξιολογεί τις επιπτώσεις,

με αποτέλεσμα να καθίσταται επιτακτική η ανάγκη της αναφοράς στις λύσεις.

Παράδειγμα - Εφαρμογή:

Α Θεματική ενότητα

Αιτίες φανατισμού

Β Θεματική ενότητα

Τρόποι θεραπείας του

Α μέρος μεταβατικής παραγράφου

Συνοπτική παράθεση επιπτώσεων *Οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι η ανεξέλεγκτη κλιμάκωση του φανατισμού οδηγεί στην πνευματική και ηθική ανελευθερία τον άνθρωπο. Ταυτόχρονα, παρακωλύει τη συνεργασία, με αποτέλεσμα να καθίσταται δυσχερής η συμμετοχή σε συλλογικές διαδικασίες. Γενικά, ο φανατισμός αποτελεί τροχοπέδη για την πολιτιστική ανέλιξη του ανθρώπου.*

Β μέρος μεταβατικής παραγράφου

Συνοπτική αναφορά στα ληπτέα μέτρα Γι' αυτό απαιτείται ανάληψη αποφασιστικών πρωτοβουλιών σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο για την πάταξη του νοσηρού αυτού φαινομένου.