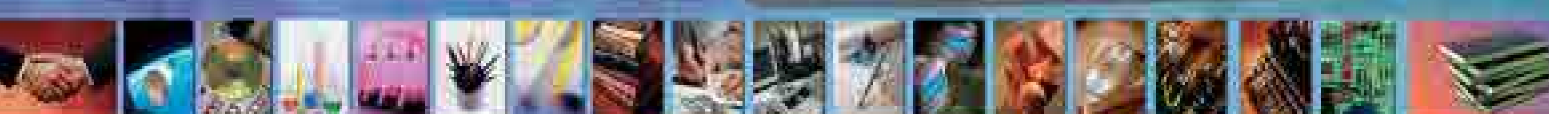
# Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί

Περιοδική έκδοση

No 6 • ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999

*Συμβολή στην προσπάθεια*
*του μαχόμενου εκπαιδευτικού*
*για αποτελεσματική διδακτική προσφορά*



40 χρόνια παράδοση στο εκπαιδευτικό βιβλίο

1959-1999

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ


*Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί*
*Νο 6 - Ιανουάριος 1999*

*ΕΚΔΟΤΗΣ*
***ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ***

ΕΚΔΟΣΕΙΣ • ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ
**ΖΗΤΗ**
Π. ΖΗΤΗ & Σια Ο.Ε.

**ΓΡΑΦΕΙΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ:**
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 17057, 542 10 Θεσσαλονίκη
Τηλ. - Fax: 0392/72.222 (3 γραμμές)
e-mail: ziti@hyper.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Θεσσαλονίκης:**
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
Τηλ.: 031/203.720 • Fax: 031/211.305
Θεσσαλονίκη 546 35

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Αθηνών:**
«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5)
Αθήνα 105 64
Τηλ.-Fax: 01/32 11 097



*Τα πρώτα τεύχη διανέμονται ΔΩΡΕΑΝ στους Εκπαιδευτικούς*

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISSN 1106-9252



ΕΤΗΣΙΑ ΣΥΝΔΡΟΜΗ (3 τεύχη)
Εκπαιδευτικοί: 3.000 δρχ.
Βιβλιοθήκες: 5.000 δρχ.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ-ΑΠΟΣΤΟΛΕΣ: ΑΝΝΗ ΖΗΤΗ
*Τ.Θ. 17057, 542 10 Θεσσαλονίκη*
*Τηλ. - Fax: 0392/72.222*
*e-mail: ziti@hyper.gr*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Αγαπητοί φίλοι και συνάδελφοι

***Η καθυστέρηση της έκδοσης του 6ου τεύχους του περιοδικού μας «Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί» οφείλεται στο γεγονός ότι ο ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΖΗΤΗ, στην επιθυμία του να συμβάλει στην επιτυχία της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης και της ανανέωσης των σχολικών βιβλίων, συμμετείχε με 2 συγγραφικές ομάδες στην προκήρυξη του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη συγγραφή των διδακτικών βιβλίων και διδακτικών οδηγιών της ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ καθώς και άλλων βιβλίων. Οι προσπάθειες αυτές, ήταν φυσικό να απασχολήσουν σε μεγάλο βαθμό τους τεχνικούς του Εκδοτικού Οίκου και ορισμένα στελέχη του περιοδικού.***

***Με χαρά σας ανακοινώνουμε ότι το βιβλίο των Εκδόσεων ΖΗΤΗ και της συγγραφικής του ομάδας που αφορά την ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ήδη εγκρίθηκε και μάλιστα με υψηλή βαθμολογία έναντι των 6 υπολοίπων πακέτων που υποβλήθηκαν.***

***Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ της "Ομάδας ΖΗΤΗ" θα διδαχθεί από το Σεπτέμβριο του 1999 σ' όλα τα Λύκεια της Ελλάδας.***

***Η εκδότρια*** ***Ο Επόπτης Εκδόσεως***

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. (031) 203.720, Fax: (031) 211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: (01) 32 11 097

***Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 10.000 δρχ. για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.***

## *Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων*

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το «άμεσο περιβάλλον» της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

*Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,*

- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

*Επειδή η σύνταξη του περιοδικού μας κατακλύζεται από προτάσεις με κριτικές του τρόπου παρουσίασης της ύλης στα σχολικά βιβλία, με ασκήσεις ή διαφορετικές λύσεις μιας άσκησης θέλουμε να σας επισημάνουμε ότι μέσα στους στόχους, που έχουν από την αρχή θέσει οι Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, δεν περιλαμβάνεται*

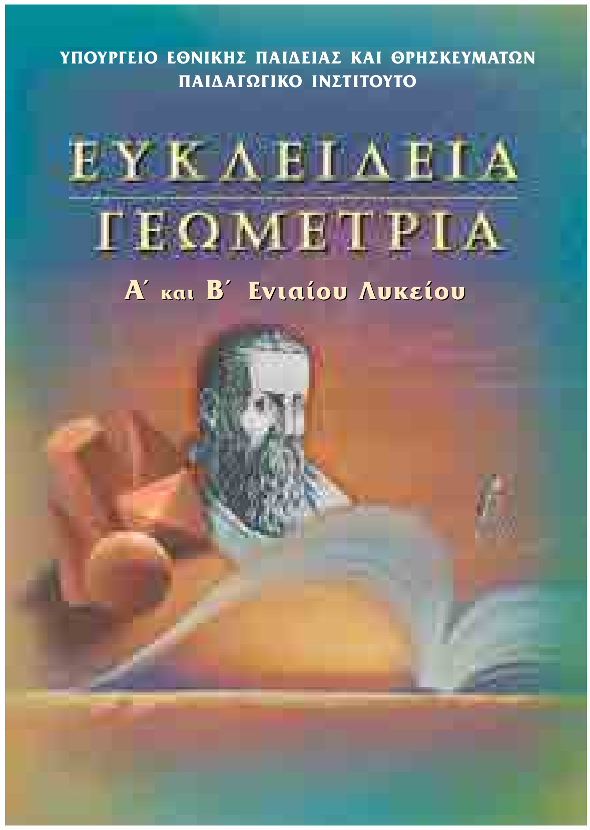
- *η κριτική των εγκεκριμένων σχολικών βιβλίων και των μεθόδων διδασκαλίας (εκτός και αν υπάρχει κάποιο λάθος), γιατί θα προκαλέσουμε σύγχυση στον μαχόμενο εκπαιδευτικό, ούτε και*
- *η παράθεση ασκήσεων ή όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων κάποιων ασκήσεων αφού αυτό καλύπτεται από το μεγάλο αριθμό βοηθημάτων που κυκλοφορούν.*

*Στόχος μας είναι ο σχολιασμός και η επιστημονική (στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) ανάλυση θεμάτων, προτάσεων και φαινομένων που εξυπηρετούν καθαρά διδακτικούς σκοπούς καθώς και ασκήσεων ή λύσεων που υποδεικνύουν μεθόδους και τρόπους αντιμετώπισης προβλημάτων που εμφανίζονται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.*

*Με εκτίμηση*
*Γεώργιος Παντελίδης*

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## Το νέο βιβλίο διδασκαλίας του Ενιαίου Λυκείου




**Οι ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ έχουν 40 χρόνια παρουσία στις πανεπιστημιακές εκδόσεις και σε εκδόσεις για το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Τώρα συνεχίζουν με επιτυχία και στη συγγραφή των νέων σχολικών βιβλίων συμμετέχοντας στις προκηρύξεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.**

Το Παιδαγωγικό Ινστούτο γνωρίζοντας τις παρενέργειες που είχε στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης των νέων μας η απουσία από το Πρόγραμμα Σπουδών του ελληνικού Λυκείου η «κλασική» (κατεξοχήν ελληνική) Ευκλείδεια Γεωμετρία επανεισάγει τη διδασκαλία της στο Λύκειο με ένα σύγχρονο, ολοκληρωμένο και λεπτομερές Πρόγραμμα Σπουδών. Γιατί όπως αναφέρεται στην εισαγωγή του Προγράμματος Σπουδών:

*Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ιστορικά αποτέλεσε το πρότυπο θεμελίωσης και ανάπτυξης για τις επιστημονικές θεωρίες. Ο ρόλος της στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι θεμελιακός και αναντικατάστατος, αφού έχει το πλεονέκτημα, τα αποτελέσματα να είναι άμεσα ορατά και υλοποιήσιμα στο χώρο της εποπτείας μας.*

*Η ανάπτυξη της θεωρίας γίνεται παραγωγικά και έτσι δίνεται μια μοναδική ευκαιρία στον μαθητή να κατανοήσει την αποδεικτική διαδικασία και να ασκηθεί σε αυτή. Η φύση των προβλημάτων που διαπραγματεύεται απαντά στις σύγχρονες διδακτικές προκλήσεις, που απαιτούν δραστήριο ρόλο του μαθητή στην ανάπτυξη και κατάκτηση της γνώσης. Ειδικότερα, τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών (με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη), βοηθούν στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, όπως κριτικής διερευνητικής σκέψης, διατύπωσης εικασιών στην αναζήτηση της λύσης, διαδικασίες που μετατρέπουν τον μαθητή σε ερευνητή.*

*Η Ευκλείδεια Γεωμετρία, μέσα από το κλασικό μοντέλο Άλγεβρα-Γεωμετρία λειτούργησε με επιτυχία μέχρι τη δεκαετία του 1970, όταν και νέοι κλάδοι των Μαθηματικών, αρχίζουν να γίνονται αντικείμενο διδασκαλίας στο Λύκειο. Εξαιτίας αυτού ο ρόλος της συρρικνώθηκε και έπαψε να αποτελεί κύρια συνιστώσα της εκπαίδευσης με διεθνώς αναγνωρισμένες επιπτώσεις, στην κατάρτιση των αποφοίτων. Λαμβάνοντας υπόψη τις προκλήσεις των καιρών, τον ιστορικό ρόλο της στην πολιτιστική μας κληρονομιά και τις νέες διδακτικές απαιτήσεις, έχει ωριμάσει η ιδέα για έναν επαναπροσδιορισμό της θέσης και του ρόλου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και ιδιαίτερα στο Λύκειο.*

*Η συστηματοποίηση και η αρχική ανάπτυξη της Γεωμετρίας ως μια αξιωματικά δομημένης θεωρίας έγινε από τον Ευκλείδη, (3ος π.Χ. αιώνας, «Στοιχεία»). Η θεμελίωση αυτή με τις αναγκαίες τροποποιήσεις και συμπληρώσεις εξακολουθεί να ισχύει.*

*Το ερώτημα που προβάλλει κατά την σύνταξη των Π.Σ. είναι: Πρέπει να διδάσκεται στα σχολεία η πλήρης και αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;*

*Η ηλικία και τα ενδιαφέροντα των μαθητών του Λυκείου, καθώς και οι στόχοι της μαθηματικής παιδείας στο Λύκειο, δεν συνηγορούν σε μια καταφατική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Μια τέτοια διδακτική προσέγγιση της Γεωμετρίας θα ενέπλεκε τον μαθητή σε μια μακρόχρονη και επίπονη διαδικασία με αμφίβολα εκπαιδευτικά αποτελέσματα.*

Στα πλαίσια του θεσμού καθιέρωσης του πολλαπλού βιβλίου (του ΕΠΕΑΕΚ[1]) τον Ιούνιο του 1998 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο προκήρυξε τη συγγραφή του βιβλίου «***ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ***» (βιβλίου του μαθητή, διδακτικές οδηγίες, λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου) για το Λύκειο.

Ο ***Εκδοτικός Οίκος ΖΗΤΗ***, όπως ήταν αναμενόμενο, ενέταξε και την «πρόκληση» αυτή στις προσπάθειές του να συμβάλει στην επιτυχία της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσα στο Γυμνάσιο και το Λύκειο και συγκρότησε συγγραφική ομάδα από τους κ.κ. (κατά αλφαβητική σειρά):

- **Γιάννη Θωμαΐδη**, Δρ. Μαθηματικών, Καθηγητή του 1ου Λυκείου Ηλιούπολης Θεσσαλονίκης.
- **Θανάση Ξένο**, Καθηγητή Μαθηματικών 2ου Λυκείου Συκεών Θεσσαλονίκης.
- **Γεώργιο Παντελίδη**, Καθητηγή Μαθηματικών του Εθν. Μετσόβειου Πολυτεχνείου.
- **Ανδρέα Πούλο**, Καθηγητή Μαθηματικών Πειραματικού Σχολείου Θεσσαλονίκης και
- **Γεώργιο Στάμου**, Καθηγητή Μαθηματικών του Αριστ. Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Το Μάρτιο[2] ανακοινώθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο ότι το βιβλίο ***ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*** των Εκδόσεων ΖΗΤΗ κρίθηκε με πολύ υψηλή βαθμολογία από την Επιτροπή Κρίσεως ως το μοναδικό (μεταξύ 7 πακέτων), το οποίο πληρούσε τις προδιαγραφές της προκήρυξης, γιατί «*Είναι γραμμένο σύμφωνα με το Π.Σ., με περιγραφές άνετες και κατανοητές... Είναι τυπογραφικά άψογο και η σωστή γλώσσα, οι τυπογραφικές και χρωματικές διαφοροποιήσεις του κειμένου, τα σχήματα κ.τ.λ. κάνουν το περιεχόμενο φιλικό προς τον αναγνώστη-μαθητή... Οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι λιτές και χωρίς περιττούς συμβολισμούς. Οι παρατηρήσεις, τα σχόλια και τα ένθετα σημειώματα συμπληρώνουν ή διευκρινίζουν ουσιώδη σημεία της θεωρίας...*».

**Το βιβλίο *ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ* θα εκτυπωθεί από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων και θα διδαχτεί στο Λύκειο από το επόμενο σχολικό έτος 1999-2000.**

---

1. ΕΠΕΑΕΚ: Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτησης.
2. Ο μεγάλος γερμανός μαθηματικός D. Hilbert δημοσίευσε το 1899 το βιβλίο του «Τα Θεμέλια της Γεωμετρίας». Η τελική επεξεργασία αυτού έγινε στο χρονικό διάστημα μεταξύ της άνοιξης του 1898 και του Ιουνίου του 1899. Πριν ακριβώς από 100 χρόνια.

*Προτείνεται, λοιπόν, η στήριξη του όλου διδακτικού οικοδομήματος πάνω σε όσο το δυνατόν λιγότερες αρχικές γεωμετρικές αλήθειες, που προκύπτουν φυσιολογικά από την εμπειρία μας και τις οποίες, για το λόγο αυτό, αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη.*

*Ιδιαίτερη, όμως, αναφορά πρέπει να γίνει στο 5ο αίτημα (στην ισοδύναμή του διατύπωση για την απαίτηση ύπαρξης μοναδικής παράλληλης). Ας σημειωθεί ότι η κριτική σ' αυτό οδήγησε τον περασμένο αιώνα στην ανάπτυξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.*

*Η έκταση της θεωρίας που θα διδάσκεται, πρέπει να υπακούει στην αρχή της οικονομίας του χρόνου, μέσα στα πλαίσια των σύγχρονων προγραμμάτων. Πρέπει να γίνεται η παράθεση και η απόδειξη των πλέον απαραίτητων προτάσεων και θεωρημάτων, χωρίς αυτό να αποβαίνει σε βάρος της πληρότητας της διδακτέας ύλης. Απαραίτητη κρίνεται η διασύνδεση των θεωρημάτων και προτάσεων, καθώς και η ανάδειξη της λογικής αλληλουχίας τους.*

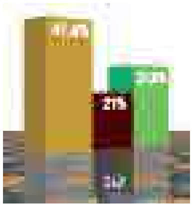
*Από την παράθεση της ύλης πρέπει να γίνεται φανερό ότι το όλο οικοδόμημα χτίζεται κυρίως πάνω στις έννοιες της **ισότητας**, της **παραλληλίας**, της **ομοιότητας** και του **εμβαδού**. Η ισότητα ορίζεται ενιαία για όλα τα σχήματα με τη διαδικασία της επίθεσης και εναπόθεσης, χωρίς να κρίνεται απαραίτητο να θεμελιωθεί αξιωματικά η διαδικασία αυτή. Με τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων αποκτά αποδεικτική ισχύ και εμβέλεια. Τονίζεται ότι η ομοιότητα αφορά τη μελέτη σχημάτων που διαφέρουν μόνο ως προς το μέγεθος, ενώ έχουν την ίδια μορφή. Όσον αφορά το εμβαδόν τα σχήματα πλέον συγκρίνονται ως προς την «έκταση» που αυτά περικλείουν.*

*Η ανάπτυξη της Επίπεδης Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει προετοιμάσει το έδαφος για να αναπτυχθεί σύντομα και να κατανοηθεί η Γεωμετρία του χώρου, που συνδέεται αμεσότερα με την εποπτεία και με εφαρμογές. Ο καθορισμός των στοιχείων του χώρου γίνεται μέσω παραδοχών σε πλήρη αντιστοιχία με την Επίπεδη Γεωμετρία. Η μελέτη των πολυέδρων και των στερεών από την περιστροφή ολοκληρώνεται με την εύρεση τύπων για το εμβαδόν και τον όγκο των κυριοτέρων απ' αυτά.*

*Στην προσπάθεια επαναπροσδιορισμού του ρόλου της Γεωμετρίας, θα πρέπει η διδασκαλία να εμπλουτιστεί με δραστηριότητες και να υποστηριχτεί με τη χρήση των νέων τεχνολογιών, όπως ο υπολογιστής και τα οπτικοακουστικά μέσα.*

*Η αξιολόγηση των μαθητών με ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου, ειδικότερα για τα Μαθηματικά, έχει διεθνώς αμφισβητηθεί έντονα τα τελευταία χρόνια. Το ελληνικό Σχολείο (Γυμνάσιο, Λύκειο ΤΕΙ, και Πανεπιστήμιο) παίζει ένα διαφορετικό ρόλο στη δομή της κοινωνίας μας από ό,τι το αντίστοιχο Σχολείο στις άλλες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης και των ΗΠΑ. Στις χώρες αυτές εκτός από το τυπικό Απολυτήριο ή Πτυχίο, ακόμη και στο Δημόσιο, λαμβάνεται καθοριστικά υπόψη και η βαθύτερη γνώση, η καλλιέργεια της σκέψης και της έκφρασης. Στοιχεία που δεν εγγυάται η αξιολόγηση αυτή. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στη βαρύτητα που δίνουμε στην αξιολόγηση αυτού του τύπου. Στόχος αυτών των ερωτημάτων νομίζουμε ότι πρέπει να είναι η «αυτόματη» αναγνώριση του ορθού ή του λάθους χωρίς να είναι απαραίτητη οποιαδήποτε γραπτή πράξη. Οι* ***Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί*** *παραθέτουν σήμερα δύο άρθρα συνεργατών του και διαπρεπών εκπαιδευτικών με σχετικούς προβληματισμούς που πιστεύουμε ότι θα συμβάλουν στη ορθολογιστικότερη διαμόρφωση ερωτημάτων αυτού του τύπου.*

Ο επόπτης εκδόσεως



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Του **Δ. Παπακωνσταντίνου**, Σχ. Σύμβουλου Μαθηματικών

Οι ασκήσεις μαθηματικών *κλειστού* ή όπως διαφορετικά λέγονται και *αντικειμενικού* τύπου είναι συνήθως ερωτήσεις που συνοδεύονται από ένα πλήθος προτεινομένων απαντήσεων από τις οποίες ο μαθητής καλείται να επιλέξει την ορθή.

Οι κυριότερες μορφές είναι οι ασκήσεις «*σωστό-λάθος*», «*πολλαπλής επιλογής*», «*σύζευξης*», «*διάταξης*» και «*συμπλήρωσης κενού*».

Είναι γνωστά τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα αυτών των μορφών καθώς και οι κανόνες κατασκευής τους από τις σχετικές δημοσιεύσεις και ενημερώσεις που έχουν γίνει στον εκπαιδευτικό χώρο.

Εδώ θα αναλύσουμε ένα βασικό σφάλμα κατασκευής που συνήθως γίνεται στις ασκήσεις αυτής της μορφής. Νομίζουμε ότι η άσκηση που κατασκευάσαμε ή επιλέξαμε για το διαγώνισμα είναι και άψογη σε διατύπωση και πλούσια σε μαθηματικό περιεχόμενο και επιπλέον ότι ο μαθητής πρέπει να ξέρει μαθηματικά για να απαντήσει.

**Παράδειγμα 1**

Δίνεται το παραμετρικό σύστημα 2 2:

$$\begin{cases} (2\lambda-1)x + (\lambda+1)y = 0 \\ \lambda x + 2y = 0 \end{cases}$$

Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις;

Α: $\lambda = 3$, Β: $\lambda = -1$, Γ: $\lambda = 4$, Δ: $\lambda = 1$.

Ο μαθηματικός που κατασκεύασε ή επέλεξε αυτή την άσκηση νομίζει ότι ο μαθητής για να τη λύσει πρέπει να ξέρει τη θεωρία των ομογενών συστημάτων, την ανάπτυξη ορίζουσας και τη λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Τίποτε από όλα αυτά. Ο μαθητής θα πάρει την πιο βολική τιμή $\lambda = 1$, θα αντικαταστήσει και θα έχει το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

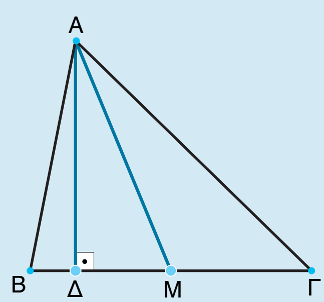
δηλαδή μια εξίσωση $x+2y = 0$, όπου ο $x$ είναι συνάρτηση του $y$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις για $\lambda = 1$ και έτσι σημειώνει την απάντηση Δ.

**Παράδειγμα 2**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

ΑΒ = 5 cm, ΑΓ = 7 cm και ΒΓ = 6 cm.

Η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος.




Το ΔΜ έχει μήκος:

Α. 1,

Β. 2,

Γ. 2,5,

Δ. 3

Νομίζουμε ότι ο μαθητής για να απαντήσει στην παραπάνω άσκηση πρέπει να ξέρει το δεύτερο θεώρημα της διαμέσου για να προσδιορίσει το μήκος του ΔΜ.

Τίποτε από όλα αυτά δεν χρειάζεται να ξέρει ο μαθητής παρά μόνο την κατασκευή του τριγώνου με πλευρές 5, 7 και 6 cm. Μετρά το μήκος ΔΜ με τον αριθμημένο χάρακα και βρίσκει τη σωστή απάντηση Β, 2 cm. ◆

### Παράδειγμα 3

Το κλάσμα $\dfrac{συνα+συν2α}{ημα+ημ2α}$ ισούται με:

Α. $σφ\dfrac{α}{2}$ Β. $εφ\dfrac{α}{2}$ Γ. $σφ\dfrac{3α}{2}$

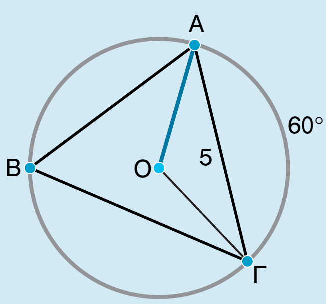
Δ. εφ3α Ε. σφ3α Ζ. εφα

Νομίζουμε ότι ο μαθητής για να απαντήσει θα πρέπει να ξέρει τους τύπους μετασχηματισμών αθροισμάτων τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενα και να κάνει τις σχετικές απλοποιήσεις.

Δεν χρειάζεται αυτή η γνώση. Θέτει όπου $α = 30^\circ$ και βρίσκει τιμή του κλάσματος 1. Την ίδια τιμή έχει και η απάντηση Γ. $σφ\dfrac{90^\circ}{2} = σφ\,45^\circ = 1$. ◆

### Παράδειγμα 4

Στο παρακάτω σχήμα είναι τόξο $ΑΓ = 60^\circ$ και $ΑΓ = 5cm$. Η ακτίνα ΟΓ είναι:




Α. $\sqrt{5}$

Β. 5

Γ. $2\sqrt{5}$

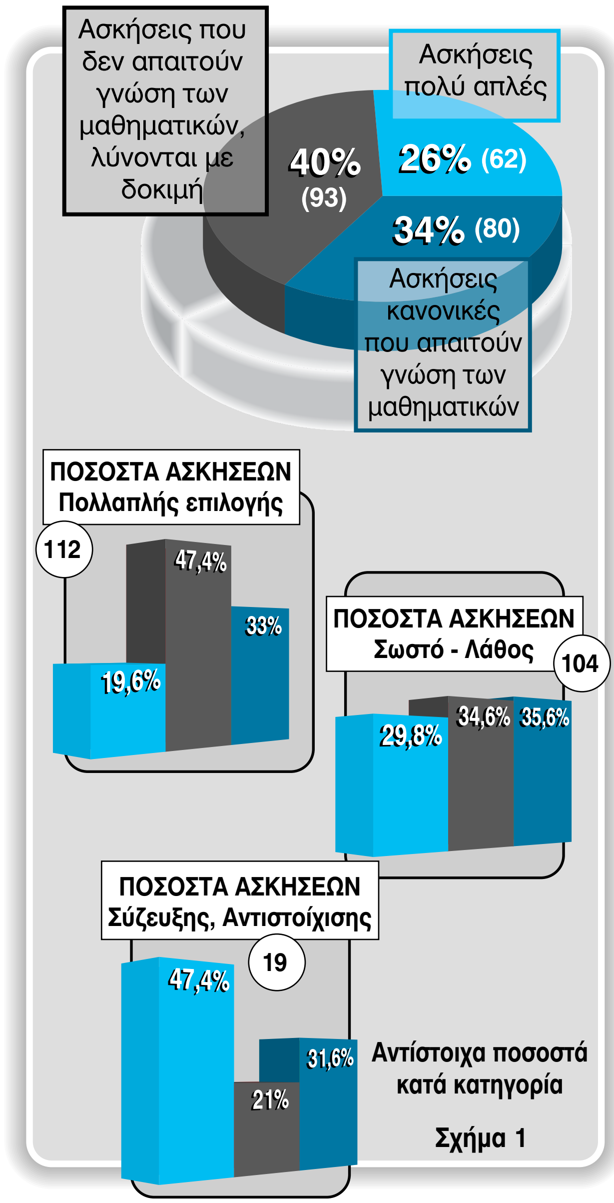
Δ. 2,5

Ε. $2\sqrt{3}$

Εδώ η κατασκευή του σχήματος είναι δύσκολη και απαιτεί χρόνο οπότε δεν συμφέρει η μέτρηση με τον αριθμημένο χάρακα. Αν και η άσκηση είναι της Β Λυκείου (νόμος των ημιτόνων στο τρίγωνο) λύνεται με τα γνωστά γυμνασιακά μαθηματικά. Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΓ. Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία ΑΟΓ είναι $60^\circ$ θα είναι ισόπλευρο, οπότε είναι και $ΟΓ = 5$. Σημειώνουμε το Β. ◆

Από τα προηγούμενα παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι ενδέχεται με απλές δοκιμές να δοθεί σε σύντομο χρόνο το σωστό αποτέλεσμα αν και η άσκηση φαίνεται ότι είναι σύνθετη ή ότι απαιτείται για τη λύση της απαραίτητα η γνώση της αντίστοιχης θεωρίας.

Από μία απλή στατιστική μέτρηση που έγινε στις 235 ασκήσεις κλειστού τύπου του βιβλίου «Αξιολόγηση των μαθητών της Α Λυκείου στα Μαθηματικά» (έχει δοθεί ως βοήθημα για τον καθηγητή) διαπιστώθηκαν τα εξής (σχ.1):




Σχήμα 1

Διαπιστώνουμε τελικά ότι ένα «αθέατο» μειονέκτημα των ασκήσεων κλειστού τύπου, αν δεν προσεχθεί η κατασκευή τους, είναι η λύση αυτών με δοκιμές χωρίς εφαρμογή της θεωρίας. ◆

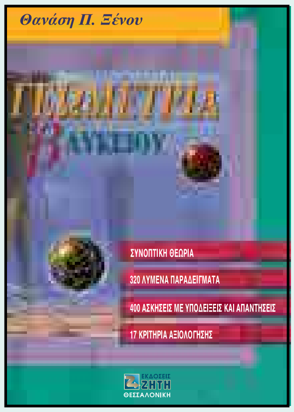
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ


ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Γενικής Παιδείας

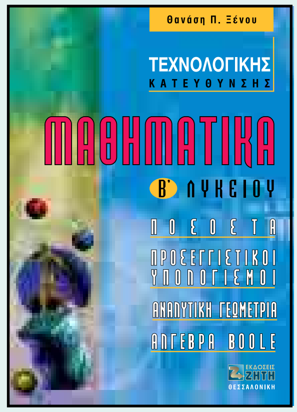

ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Γενικής Παιδείας


ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Θετικής Κατεύθυνσης

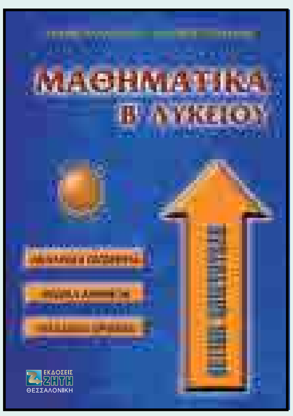

ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ
**ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Γενικής Παιδείας




ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ
**ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Γενικής Παιδείας

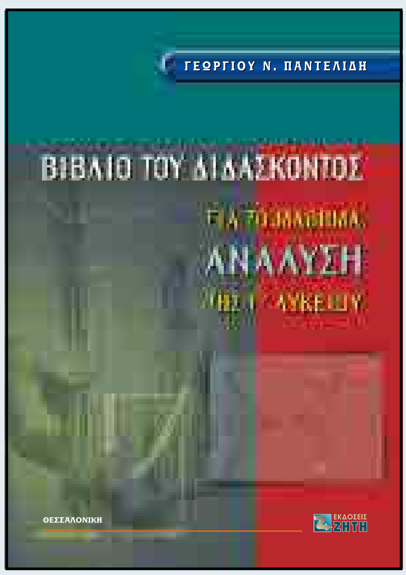



ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

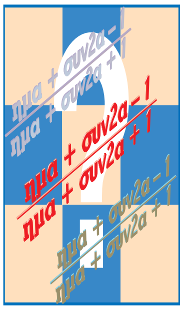



Γ. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΥ
Α. ΣΠΥΡΙΔΑΚΗ
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Θετικής Κατεύθυνσης

ΓΙΩΡΓΟΥ ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
**ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΟΣ**
**ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΝΑΛΥΣΗ»**
**ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**




*ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΥΤΟ ΑΠΕΥΘΥΝΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ*




# ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ με ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Του **Γιάννη Χ. Θωμαΐδη**, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, 1ο Λύκειο Ηλιούπολης

Μια από τις καινοτομίες που έχει εισάγει η πρόσφατη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση είναι η χρησιμοποίηση των λεγόμενων «κλειστών» ή «αντικειμενικού τύπου» ερωτήσεων για την αξιολόγηση των μαθητών του Λυκείου. Στα τεύχη για την αξιολόγηση που έχει εκδόσει το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.) αναφέρονται διεξοδικά τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των ερωτήσεων αυτού του είδους καθώς και πάρα πολλά παραδείγματα για κάθε ενότητα της σχολικής ύλης[1].

Στο άρθρο αυτό θα διατυπώσουμε κάποιες απόψεις και σχόλια σχετικά με τη χρησιμοποίηση των ερωτήσεων αντικειμενικού τύπου (Ε.Α.Τ.) στα Μαθηματικά και ιδιαίτερα των ερωτήσεων «πολλαπλής επιλογής». Θεωρούμε όμως σκόπιμο να επισημάνουμε προκαταρκτικά δύο καίρια σημεία.

Οι τάσεις για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών που επικρατούν τα τελευταία χρόνια διεθνώς, τόσο σε επίπεδο έρευνας όσο και πρακτικής εφαρμογής, δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην επίλυση προβλήματος και τη μοντελοποίηση, τη συλλογική δραστηριότητα στην τάξη, την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και έκφρασης, δηλαδή ζητήματα που βρίσκονται ακριβώς στον αντίποδα του μηχανιστικού τρόπου απάντησης που χαρακτηρίζει τις Ε.Α.Τ. Είναι ενδεικτική η έντονη κριτική κατά της αξιολόγησης των μαθητών με ερωτήσεις αυτού του τύπου που έχει αρχίσει στις Η.Π.Α., τη χώρα που καθιερώθηκαν πριν πολλές δεκαετίες και γνώρισαν τεράστια ανάπτυξη και διάδοση. Με πρωτοβουλία του Εθνικού Συμβουλίου Δασκάλων των Μαθηματικών (N.C.T.M.) έχει αναπτυχθεί μια γόνιμη συζήτηση για την καθιέρωση νέων μεθόδων αξιολόγησης που είναι περισσότερο συμβατές με τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών[2]. Αρνητικές, επίσης, για το ρόλο των Ε.Α.Τ. μέσα στο πλαίσιο των νεώτερων αντιλήψεων για τη διδασκαλία και μάθηση είναι οι θέσεις για την αξιολόγηση που έχουν διατυπω-

---

1. Βλ. σχετικά τις εκδόσεις του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας (1998):
   α) Η αξιολόγηση των μαθητών στο Λύκειο. Γενικές οδηγίες και στοιχεία μεθοδολογίας.
   β) *Η αξιολόγηση των μαθητών της Α Λυκείου στα Μαθηματικά.*
   γ) *Η αξιολόγηση των μαθητών της Β Λυκείου στα Μαθηματικά.* Τεύχος Α .
2. Αναφέρουμε ενδεικτικά τα εξής βιβλία που εκδόθηκαν πρόσφατα από το NCTM.:
   α) *Assessment Standards for School Mathematics.* (1995)
   β) Webb, N. & Coxford, A. [eds.] *Assessment in the Mathematics Classroom.* (1993 Yearbook)
   Μερικοί τίτλοι εργασιών που περιλαμβάνονται στο βιβλίο αυτό είναι ενδεικτικοί της αμφισβήτησης των Ε.Α.Τ. και της αναζήτησης νέων μεθόδων αξιολόγησης:
   - Gay, S. & Thomas, M. Just Because They Got It Right, Does It Mean They Know It? (Επειδή το απάντησαν σωστά, σημαίνει ότι το γνωρίζουν;)
   - Thompson, D. & Senk, S. Assessing Reasoning and Proof in High School. (Αξιολόγηση του συλλογισμού και της απόδειξης στο Λύκειο)
   - Lange, J. de. Assessment in Problem-oriented Curricula. (Η αξιολόγηση σε αναλυτικά προγράμματα προσανατολισμένα στην επίλυση προβλήματος)

   γ) Stenmark, J.K. [ed.] *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions* . (1991).
   Μερικοί από τους «μύθους» που καταγράφονται στο τελευταίο βιβλίο είναι χαρακτηριστικοί:
   ***Μύθος:*** *Τα αντικειμενικά, πολλαπλής επιλογής κριτήρια είναι οι μόνοι έγκυροι και αξιόπιστοι δείκτες ποιοτικής μαθηματικής επίδοσης.*
   ***Μύθος:*** *Ο σκοπός της αξιολόγησης είναι να προσδιορίσει ποιοι μαθητές «κατέχουν την ύλη» και ποιοί όχι και στη συνέχεια να μοιράσει ανάλογα βαθμούς και θέσεις.*
   ***Μύθος:*** *Τα αντικειμενικά πολλαπλής επιλογής κριτήρια είναι ο καλύτερος τρόπος να μετρήσουμε τις πιο σημαντικές ιδέες στα Μαθηματικά.*
   (Σημειώνουμε ότι οι «μύθοι» αυτοί αποτελούσαν για πολλές δεκαετίες ακρογωνιαίους λίθους της αμερικανικής μαθηματικής εκπαίδευσης).

θεί στα τελευταία Διεθνή Συνέδρια Μαθηματικής Εκπαίδευσης[3].

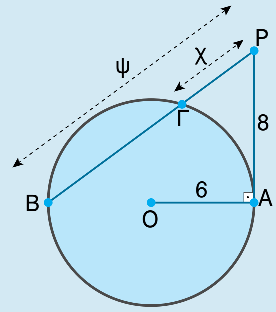
Το ερώτημα, λοιπόν, που προβάλλει από τα παραπάνω είναι αναπόφευκτο: Μήπως, για άλλη μια φορά, εισάγουμε στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση παρωχημένες ιδέες και μεθόδους, τη στιγμή που γενικεύεται διεθνώς η αμφισβήτησή τους;

Το άλλο σημείο που θέλουμε να επισημάνουμε αφορά την έλλειψη σχετικής εμπειρίας στη χώρα μας, γεγονός που επιβάλλει ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή των Ε.Α.Τ. που ενδέχεται να χρησιμοποιηθούν, όσο και στον τρόπο ενημέρωσης των μαθητών για την αντιμετώπισή τους. Υπάρχουν πολλές ενδείξεις (κυρίως από την ανταλλαγή πληροφοριών με καθηγητές Μαθηματικών στα Π.Ε.Κ. και στα ταχύρρυθμα επιμορφωτικά σεμινάρια) ότι οι μαθητές της Α' Λυκείου αντιμετώπισαν μεγάλες δυσκολίες προσαρμογής στις Ε.Α.Τ κατά την περσινή, δοκιμαστική περίοδο εφαρμογής και τα ποσοστά αποτυχίας ήταν παντού πολύ μεγάλα. Επίσης, η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, σε πρόσφατη ανακοίνωσή της για τα νέα μέτρα εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, επισημαίνει ότι «*η διαδικασία αξιολόγησης των μαθητών με θέματα πολλαπλής επιλογής θα πρέπει να είναι περιορισμένης έκτασης και οι μαθητές να αιτιολογούν απαραίτητα την απάντησή τους*[4]». Αυτή όμως η τελευταία θέση για την αιτιολόγηση των απαντήσεων ακυρώνει αυτόματα τα περισσότερα «πλεονεκτήματα» που διαφοροποιούν τις Ε.Α.Τ. από τις παραδοσιακές ερωτήσεις ελεύθερης ανάπτυξης (εξέταση μεγάλου αριθμού ατόμων σε σύντομο χρονικό διάστημα και σε μεγάλης έκτασης ύλη, εξασφάλιση αντικειμενικότητας και επίτευξη συμφωνίας μεταξύ των βαθμολογητών).

Έχοντας υπόψη τις προηγούμενες επισημάνσεις, θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να εντοπίσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά των Ε.Α.Τ. που παρουσιάζουν, κατά την άποψή μας, ενδιαφέρον ως δείκτες ουσιαστικής κατανόησης μαθηματικών εννοιών και μεθόδων. Από τα διάφορα είδη Ε.Α.Τ., εκείνες που φαίνεται να αξιολογούν όχι μόνο την απομνημόνευση, αλλά και κάποιες ανώτερες μορφές μαθηματικής σκέψης και δραστηριότητας είναι ορισμένα είδη ερωτήσεων «πολλαπλής επιλογής» (Ε.Π.Ε.). Για να δείξουμε τι ακριβώς εννοούμε θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα και δύο αντιπαραδείγματα από το βιβλίο «*Αξιολόγηση των μαθητών της Β Λυκείου στα Μαθηματικά*», τεύχος Α (Κ. Ε. Ε., 1998).

**(σ. 111)**

Δίνεται κύκλος ακτίνας ΟΑ = 6 cm, εφαπτόμενο τμήμα του ΡΑ = 8 cm και μεταβλητή τέμνουσα ΡΓΒ. Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη δεν ταιριάζει:




Α. $x = 6$ και $y = \frac{32}{3}$

Β. $x = 2$ και $y = 32$

Γ. $x = 4$ και $y = 16$

Δ. $x = 5$ και $y = 12{,}8$

Ε. $x = 7$ και $y = \frac{64}{7}$

Στο παράδειγμα αυτό ζητείται ο **αποκλεισμός** μιας απάντησης. Ένα άμεσο κριτήριο ελέγχου φαίνεται να είναι η μετρική ιδιότητα τέμνουσας και εφαπτομένης ενός κύκλου, σύμφωνα με την οποία θα πρέπει $x \cdot y = 8^2 = 64$. Άρα αρκεί να βρούμε ένα ζεύγος τέτοιο ώστε $x \cdot y$ π 64. Όπως γίνεται όμως αμέσως φανερό, η ισότητα αυτή ισχύει για όλα τα συγκεκριμένα ζεύγη. Επομένως χρειαζόμαστε ένα διαφορετικό κριτήριο ελέγχου. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση (Β) είναι $y – x = 30$, δηλαδή η χορδή ΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο του κύκλου και άρα η περίπτωση αυτή αποκλείεται.

Αν εξαιρέσουμε την πιθανότητα αριθμητικού λάθους κατά τον πολλαπλασιασμό των $x$ και $y$, γεγονός που θα οδηγήσει σε λαθεμένη επιλογή για ατυχείς λόγους, η συγκεκριμένη ερώτηση απαιτεί μια συλλογιστική διαδικασία που υποδηλώνει την ικανότητα ελέγχου και εφαρμογής βασικών γεωμετρικών γνώσεων.

**(σ. 128)**

Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

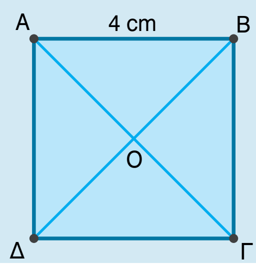
Α. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma B} = 0$

Β. $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$

Γ. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 16$

Δ. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} = -16$

Ε. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$




Στο παράδειγμα αυτό οι ισότητες (Α) και (Δ) επαληθεύονται άμεσα (ειδικές περιπτώσεις εσωτερικού γινομένου κάθετων και αντίρροπων διανυσμάτων αντί-

3. Βλ. π.χ. *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education*, σ.146. Les Presses de l' Université Laval. Sainte-Foy (Québec), 1994.
4. Βλ. *Ευκλείδης Β* τ.29 (Ιούλιος, Αύγουστος, Σεπτέμβριος 1998), σ. 4. Είναι γνωστό ότι η Ε.Μ.Ε. είχε καθιερώσει το 1991 τις ερωτήσεις «πολλαπλής επιλογής» στον Πανελλήνιο Μαθηματικό Διαγωνισμό, αλλά το 1995 τις εγκατέλειψε. Θα είχε ενδιαφέρον να γίνουν γνωστοί οι λόγοι αυτής της εγκατάλειψης.

στοιχα). Άρα οι απαντήσεις (Α) και (Δ) αποκλείονται. Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε τα εσωτερικά γινόμενα (Β) (Γ) και (Ε), μια διαδικασία αρκετά χρονοβόρα την οποία μπορούμε να αποφύγουμε με τον εξής συλλογισμό: Το διάνυσμα $\vec{ΑΓ}$ είναι ομόρροπο και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{ΑΟ}$, άρα το εσωτερικό γινόμενο $\vec{ΑΒ}\cdot\vec{ΑΓ}$ θα είναι διπλάσιο από το $\vec{ΑΟ}\cdot\vec{ΑΒ}$. Επομένως είναι και τα δύο σωστά, επειδή αλλιώς θα είχαμε δύο λανθασμένες ισότητες. Αποκλείονται λοιπόν και οι απαντήσεις (Β) και (Γ), οπότε κατ' ανάγκην η λανθασμένη ισότητα είναι η (Ε).

Στην ερώτηση αυτή διαπιστώνουμε μια μελετημένη επιλογή των εναλλακτικών απαντήσεων η οποία μπορεί να οδηγήσει στη σωστή απάντηση χωρίς, ουσιαστικά, την παραμικρή υπολογιστική επεξεργασία.

**(σ. 65)**

Η παράσταση $\frac{ημ2α}{1+συν2α}$ είναι ίση με:

Α. σφα Β. $\frac{συνα}{1+ημα}$ Γ. εφα Δ. 2εφα Ε. –σφα

Στο (αντι)παράδειγμα αυτό μια κλασική άσκηση (απόδειξη της τριγωνομετρικής **ταυτότητας** $\frac{ημ2α}{1+συν2α}=εφα$) έχει μεταμφιεστεί σε Ε.Π.Ε., με την προσθήκη τεσσάρων ασυνάρτητων εναλλακτικών απαντήσεων. Αναρωτιέται λοιπόν κανείς, αρχικά, σε τι διαφοροποιείται αυτή η Ε.Π.Ε. από την κλασική άσκηση (η οποία απαιτεί από τους μαθητές κάτι πολύ ουσιαστικό, δηλ. να **γράψουν** μιαν απόδειξη):

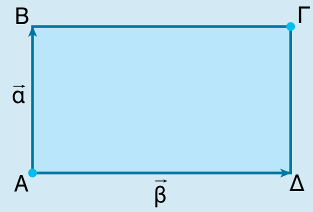
α) Να κάνουν οι μαθητές από μνήμης τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς;

β) Να δοθεί η ευκαιρία σε μερικούς να δοκιμάσουν την τύχη τους; (η πιθανότητα να κερδίσουν είναι 20% ...).

Επιπλέον, η παράλειψη των όρων «*ταυτότητα*» ή «*για κάθε α*» δημιουργεί ένα κλίμα ασάφειας και σύγχισης που μπορεί να οδηγήσει μερικούς μαθητές σε λαθεμένες επιλογές μέσω μιας διαφορετικής κατανόησης της ερώτησης. Στην πραγματικότητα, για ειδικές τιμές του α, η παράσταση $\frac{ημ2α}{1+συν2α}$ μπορεί να είναι ίση με οποιαδήποτε από τις προσφερόμενες απαντήσεις: αν, π.χ., $α=\frac{π}{4}$, τότε μπορεί να είναι ίση με σφα· αν $α=\frac{π}{6}$ τότε μπορεί να είναι ίση με $\frac{συνα}{1+ημα}$ κ.ο.κ. Στον μαθηματικό, που αντιλαμβάνεται τα «υπονοούμενα», η επιλογή μιας τέτοιας διαδικασίας από το μαθητή φαίνεται ίσως ακατανόητη, αλλά η διδακτική εμπειρία επιβεβαιώνει ακριβώς το αντίθετο (αν μάλιστα λάβουμε υπόψη ότι η ισότητα των παραστάσεων είναι ουσιαστικά μια «υπονοούμενη» έννοια στο σχολείο, μέχρι τη διδασκαλία της ισότητας των συναρτήσεων στη Γ Λυκείου).

**(σ. 122)**

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\vec{ΑΒ}=\vec{α}$, $\vec{ΑΔ}=\vec{β}$.




α) Το διάνυσμα ΑΓ ισούται με:

Α. $\vec{α}-\vec{β}$ Β. $\vec{β}-\vec{α}$ Γ. $\frac{\vec{α}+\vec{β}}{2}$ Δ. $\vec{α}+\vec{β}$ Ε. $\frac{\vec{α}-\vec{β}}{2)}$

β) Το διάνυσμα $\vec{ΒΔ}$ ισούται με:

Α. $\vec{α}+\vec{β}$ Β. $\frac{\vec{α}+\vec{β}}{2}$ Γ. $\frac{\vec{α}-\vec{β}}{2}$ Δ. $\frac{\vec{β}-\vec{α}}{2}$ Ε. $\vec{β}-\vec{α}$

Στο (αντι)παράδειγμα αυτό ελέγχεται μόνο η απομνημόνευση του ορισμού της πρόσθεσης και της αφαίρεσης διανυσμάτων. Η κατασκευή μιας τέτοιας Ε.Π.Ε. δεν μπορεί λοιπόν να χαρακτηριστεί παρά μόνο ως σπατάλη χρόνου και χώρου. Αν θέλουμε να εξετάσουμε τη γνώση αυτών των ορισμών μπορούμε να το ζητήσουμε με άμεσο τρόπο· αν πάλι θέλουμε να «διευκολύνουμε» κάποιους μαθητές (της θετικής κατεύθυνσης ...) που αδυνατούν να διατυπώσουν ένα μαθηματικό ορισμό, τότε η κοινή διδακτική πρακτική μπορεί να υποδείξει πιο αποτελεσματικούς τρόπους από το να υποβάλουμε όλους τους μαθητές σε μια διαδικασία «πολλαπλής επιλογής» αυτού του είδους.

Τα προηγούμενα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα δείχνουν αυτό που συνιστά, κατά την άποψή μας, το βασικό κριτήριο για τη χρησιμοποίηση μιας Ε.Π.Ε. στην αξιολόγηση της κατανόησης μαθηματικών εννοιών και μεθόδων:

*Η δυνατότητα προσδιορισμού της ορθής απάντησης χωρίς να είναι αναγκαία η πλήρης επεξεργασία της ερώτησης (γιατί, τότε, η Ε.Π.Ε. δεν θα διαφέρει από μια κλασική άσκηση «ελεύθερης ανάπτυξης»), αλλά με τρόπο που να δραστηριοποιεί γνωστικές λειτουργίες ανώτερες της απομνημόνευσης.*

Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.

- Αν x πραγματικός αριθμός, τότε η εξίσωση Ωx–1Ω+Ωx–4Ω = 3 έχει:

  Α. Καμμία λύση Β. Μία λύση Γ. Δύο λύσεις
  Δ. Τρείς λύσεις Ε. Άπειρες λύσεις

Στην ερώτηση αυτή μπορεί βέβαια κανείς να επιχειρήσει μια πλήρη επεξεργασία, μέσω της τυποποιημένης και χρονοβόρας διαδικασίας «απομάκρυνσης των απολύτων τιμών». Το πραγματικό νόημα όμως της απόλυτης τιμής δε βρίσκεται στο σύνθημα «διώξτε τα

απόλυτα», αλλά στη σχέση αυτής της έννοιας με την έννοια της απόστασης[5]. Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ακριβώς το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 1 και 4 πάνω στην αριθμητική ευθεία και, επομένως, το νόημα της ερώτησης είναι: «*πόσοι αριθμοί έχουν άθροισμα αποστάσεων ίσο με 3 από τους αριθμούς 1 και 4;*». Επειδή η απόσταση των 1 και 4 είναι 3, συμπεραίνουμε ότι κάθε x ανάμεσα στο 1 και το 4 επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση. Άρα η ορθή απάντηση είναι η (Ε).

- Οι επόμενες παραστάσεις, εκτός από μία, ταυτίζονται όλες με την εφα. Να βρείτε ποια είναι αυτή που δεν ταυτίζεται.

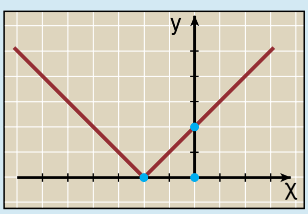
Α. $\dfrac{ημα + ημ2α}{1 + συνα + συν2α}$ Β. $\dfrac{1–συν2α}{ημ2α}$

Γ. $\dfrac{ημ2α–συν2α + 1}{ημ2α + συν2α + 1}$ Δ. $\dfrac{ημα+συν2α–1}{ημα + συν2α+1}$

Ε. $\dfrac{ημ2α}{1+συν2α}$

Στο παράδειγμα αυτό, η πλήρης επεξεργασία θα απαιτούσε να μετασχηματιστούν οι δεδομένες τριγωνομετρικές παραστάσεις για να εντοπιστούν αυτές που είναι ίσες με εφα (δηλαδή να λυθούν τέσσερις κλασικές ασκήσεις). Μια γρήγορη απάντηση όμως μπορεί να δοθεί με τη σημαντικότατη **μέθοδο του αντιπαραδείγματος.** Προσπαθούμε να εντοπίσουμε μια τιμή του α για την οποία κάποια από τις πέντε παραστάσεις δεν ισούται με την εφα. Η πρώτη τιμή που σκεφτόμαστε, δηλαδή $α = 0^\circ$, δεν είναι αποτελεσματική επειδή όλες οι παραστάσεις γίνονται ίσες με $0 = εφ0^\circ$. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε την τιμή $α = 45^\circ$, τότε βρίσκουμε ότι μόνο η παράσταση (Δ) είναι διάφορη από το $1 = εφ\,45^\circ$.

- Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος αντιστοιχεί στη συνάρτηση f με τύπο




Α. f(x) = ΩxΩ–2

Β. $f(x) = \begin{cases} -x-2 & αν\ x < 0 \\ x+2 & αν\ x \geq 0 \end{cases}$

Γ. f(x) = Ωx+2Ω Δ. f(x) = Ωx–2Ω Ε. f(x) = ΩxΩ+2

Στις Ε.Π.Ε. που αφορούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων μια αποτελεσματική μέθοδος είναι ο προσδιορισμός **χαρακτηριστικών σημείων ή ιδιοτήτων** της συνάρτησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι $f(-2) = 0$ και $f(0) = 2$. Ο εντοπισμός και ο έλεγχος των δύο αυτών σημείων αποκλείει αμέσως τις απαντήσεις (Α), (Δ), (Ε) και περιορίζει την επιλογή ανάμεσα στις (Β) και (Γ). Χρησιμοποιώντας κάποιο άλλο χαρακτηριστικό σημείο (π.χ. από το γράφημα έχουμε $f(-1) > 0$, ενώ στην (Β) είναι $f(-1) = -1$) ή ιδιότητες της συνάρτησης (π.χ., από το γράφημα προκύπτει ότι η f είναι συνεχής, ενώ η (Β) είναι ασυνεχής στο 0), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ορθή απάντηση είναι η (Γ).

Το τελευταίο παράδειγμα προέρχεται από μια έρευνα που έγινε σε 973 φοιτητές που παρακολουθούσαν μαθήματα Ανάλυσης στις Η.Π.Α.[6] και είναι ενδεικτικό του γεγονότος ότι μια Ε.Π.Ε., στην οποία οι εναλλακτικές απαντήσεις δεν είναι «σπορά της τύχης», αλλά έχουν επιλεγεί με ιδιαίτερη προσοχή μπορεί να δώσει ενδιαφέρουσες πληροφορίες για τον τρόπο σκέψης των εξεταζομένων.

- Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-3}^{3} Ωx+2Ωdx$ είναι

Α. 0 Β. 9 Γ. 12 Δ. 13 Ε. 14

Η ορθή απάντηση 13 δόθηκε μόνο από το 5,4% των φοιτητών. Το 24% έδωσε ως απάντηση το 0, το 22% έδωσε το 9, το 48% έδωσε το 12 και μόνο το 0,6% έδωσε το 14. Οι επιλογές αυτές δείχνουν ότι οι απαντήσεις των φοιτητών δεν έγιναν με τυχαίο τρόπο, αλλά υπήρξαν προϊόν συγκεκριμένων λαθών και παρανοήσεων.

Η επιλογή της απάντησης (Α) υποδηλώνει μηχανιστική εφαρμογή της ισότητας

$$\int_{-α}^{α} f(x)dx = 0,$$

η οποία ισχύει γενικά όταν η f είναι περιττή συνάρτηση, κάτι που δεν συμβαίνει στη συγκεκριμένη περίπτωση.

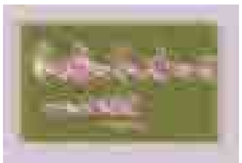
Η επιλογή της απάντησης (Β) υποδηλώνει λαθεμένη χρήση του ορισμού της απόλυτης τιμής, που οδηγεί στην ισότητα

$$\int_{-3}^{0} (-x-2)dx + \int_{0}^{3} (x+2)dx = \frac{9}{2} - 6 + \frac{9}{2} + 6 = 9.$$

Τέλος, η επιλογή της απάντησης (Γ) υποδηλώνει ότι οι μισοί περίπου φοιτητές απλά καταργούν την «ενοχλητική» απόλυτη τιμή και υπολογίζουν το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{3} (x+2)dx = 12$.

Θα μπορούσαν να γίνουν πολλά σχόλια για το είδος της μαθηματικής εκπαίδευσης που οδηγεί σε τέτοια αποτελέσματα, αλλά ελπίζουμε να ασχοληθούμε με το ζήτημα αυτό σε ένα από τα επόμενα τεύχη των «Εκπαιδευτικών Προβληματισμών».

5. Βλ. σχετικά το άρθρο μας «Μια διαφορετική προσέγγιση της διδασκαλίας της απόλυτης τιμής στην Α΄Λυκείου». *Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί*, τ. 4 (Δεκέμβριος 1997), σσ.9-12. (καθώς και τις διορθώσεις στο τ. 5, σ.41).
6. Βλ. σχετικά: Eisenberg, T. & Dreyfus, T. On the Reluctance to Visualize in Mathematics, στο βιβλίο *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, σσ.25-37. Mathematical Association of America. 1991.



# ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Του **Θ. Ξένου,** Μαθηματικού

Για την πληρέστερη ενημέρωση των συναδέλφων (αλλά και των μαθητών) δίνουμε την απόδειξη της πρότασης «ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων ακέραιων αριθμών γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ακεραίων αυτών».

Επίσης, θα δώσουμε μιαν επιπλέον μέθοδο εύρεσης ειδικής λύσης μιας γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης.

## 1. Ο Μ.Κ.Δ. ως γραμμικός συνδυασμός

**Πρόταση 1**

Ο Μ.Κ.Δ. (α, β) δύο ακέραιων αριθμών α και β γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ακέραιων αυτών με ακέραιους συντελεστές.

***Απόδειξη:*** Επειδή (α, β) = (ΩαΩ, ΩβΩ), χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε ότι οι α, β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Αν ο ένας από τους α, β είναι 0, π.χ. α = 0, τότε ισχύει

$$(\alpha, \beta) = (0, \beta) = \beta = 0\cdot\alpha + 1\cdot\beta$$

και η πρόταση αληθεύει.

Επίσης, αν $\alpha = \beta > 0$, η πρόταση αληθεύει, επειδή ισχύει $(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha) = \alpha = 1\cdot\alpha + 0\cdot\beta$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha > \beta > 0$.

Η ευκλείδεια διαίρεση του α με τον β δίνει

$$\alpha = \beta\cdot\pi_1 + \upsilon_1$$

Αν $\upsilon_1 = 0$, τότε $(\alpha, \beta) = \beta = 1\cdot\beta + 0\cdot\alpha$.

Αν $\upsilon_1$ π 0, οπότε $0 < \upsilon_1 < \beta$, η ευκλείδεια διαίρεση του β με τον $\upsilon_1$ δίνει

$$\beta = \upsilon_1\cdot\pi_2 + \upsilon_2.$$

Συνεχίζουμε τη διαδικασία των διαιρέσεων αυτών (Ευκλείδειος αλγόριθμος), μέχρι να βρούμε υπόλοιπο μηδέν.

Έστω ότι ισχύει $\upsilon_\nu > 0$ και $\upsilon_{\nu+1} = 0$. Έτσι, έχουμε τις ισότητες

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta\pi_1 + \upsilon_1 \\ \beta &= \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 \\ \upsilon_1 &= \upsilon_2\pi_3 + \upsilon_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_{\nu-2} &= \upsilon_{\nu-1}\pi_\nu + \upsilon_\nu \\ \upsilon_{\nu-1} &= \upsilon_\nu\pi_{\nu+1} + 0 \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $(\alpha, \beta) = \upsilon_\nu$.

Η πρώτη απ' αυτές δίνει

$$\upsilon_1 = \alpha - \pi_1\cdot\beta = 1\cdot\alpha + (-\pi_1)\cdot\beta,$$

δηλαδή το $\upsilon_1$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των α και β.

Επίσης, η δεύτερη από τις παραπάνω ισότητες δίνει

$$\upsilon_2 = \beta - \upsilon_1\pi_2 = \beta - (\alpha - \pi_1\beta)\pi_2 = (-\alpha)\pi_2 + (1+\pi_1\pi_2)\beta,‘$$

δηλαδή και το $\upsilon_2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των α και β. Αυτό συμβαίνει για καθένα από τα υπόλοιπα των παραπάνω διαιρέσεων, άρα και για το $\upsilon_\nu = (\alpha, \beta)$.

**2η Απόδειξη:** Θεωρούμε το σύνολο Α των θετικών ακέραιων, που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των α και β. Το σύνολο Α περιέχει προφανώς τα α και β, αφού $\alpha = 1\cdot\alpha + 0\cdot\beta$ και $\beta = 0\cdot\alpha + 1\cdot\beta$. Αν μ είναι το ελάχιστο στοιχείο του Α, θα ισχύει $\mu \le \alpha$ και $\mu \le \beta$. Υπάρχουν ακέραιοι ν και ρ με $\mu = \nu\alpha + \rho\beta$. Η ευκλείδεια διαίρεση του α με τον μ δίνει

(1) $$\alpha = \mu\pi + \upsilon, \quad 0 \le \upsilon < \mu$$

Ισχύει

$$\upsilon = \alpha - \mu\pi = \alpha - (\nu\alpha+\rho\beta)\pi = (1-\nu\pi)\alpha + (-\rho\pi)\beta$$

Αν είναι $\upsilon > 0$, τότε το υ, ως γραμμικός συνδυασμός των α και β, ανήκει στο Α. Αυτό είναι άτοπο, επειδή ισχύει $\upsilon < \mu$ και μ είναι το ελάχιστο στοιχείο του Α. Επομένως, $\upsilon = 0$ και η (1) τώρα δίνει μΩα. Ομοίως, προκύπτει ότι μΩβ, δηλαδή ο μ είναι κοινός διαιρέτης των α και β.

Αν μ είναι ένας οποιοσδήποτε κοινός διαιρέτης των α και β, τότε ισχύουν

μ Ωνα,   μ Ωρβ   και   μ Ωνα + ρβ,

δηλαδή μ Ωμ, που σημαίνει ότι $\mu \le \mu$.

Άρα, ο μ είναι ο Μ.Κ.Δ. των α και β, ο οποίος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των ακέραιων αυτών. Μάλιστα, ο Μ.Κ.Δ. των α και β είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των α και β.

**Γενίκευση της πρότασης 1:**

*Ο Μ.Κ.Δ. ν ακέραιων αριθμών ($\nu \ge 2$) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ακέραιων αυτών.*

**Απόδειξη:** Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Για $\nu = 2$ η πρόταση αποδείχτηκε παραπάνω.

Υποθέτουμε ότι για $\nu$ ακέραιους $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ υπάρχουν ακέραιοι $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_\nu$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu) = \kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2 + ... + \kappa_\nu\alpha_\nu$$

Για τους $\nu + 1$ ακέραιους $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$ ισχύει

$$(2) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}) = \big((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu), \alpha_{\nu+1}\big) = (\delta, \alpha_{\nu+1})$$

Για τους ακέραιους $\delta = \kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2 + ... + \kappa_\nu\alpha_\nu$ και $\alpha_{\nu+1}$ υπάρχουν ακέραιοι $\kappa$ και $\kappa_{\nu+1}$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$(\delta, \alpha_{\nu+1}) = \kappa\delta + \kappa_{\nu+1}\cdot\alpha_{\nu+1}$$

Έτσι, η (2) γράφεται

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}) &= \\ &= \kappa(\kappa_1\alpha_2+\kappa_2\alpha_2+...+\kappa_\nu\alpha_\nu) + \kappa_{\nu+1}\cdot\alpha_{\nu+1} \\ &= (\kappa\kappa_1)\alpha_1 + (\kappa\kappa_2)\alpha_2 + ... + (\kappa\kappa_\nu)\alpha_\nu + \kappa_{\nu+1}\cdot\alpha_{\nu+1}\end{aligned}$$

και έτσι αποδείχτηκε η αλήθεια της πρότασης.

## 2. Εύρεση ειδικής λύσης διοφαντικής εξίσωσης

Γνωρίζουμε ότι η γραμμική διοφαντική εξίσωση

$$\kappa x + \lambda y = \mu \quad (\kappa, \lambda, \mu \text{ ακέραιοι})$$

έχει λύση, αν και μόνον αν Μ.Κ.Δ. $\delta$ των $\kappa$ και $\lambda$ διαιρεί τον $\mu$. Έτσι, διαιρώντας τα μέλη της εξίσωσης με τον $\delta$, αυτή γράφεται με τη μορφή

$$(3) \qquad \alpha x + \beta y = \gamma, \quad \text{όπου } (\alpha, \beta) = 1$$

- Η εύρεση μιας ειδικής λύσης της (3), όπως αναφέρεται και στο σχολικό βιβλίο, μπορεί να πραγματοποιηθεί γράφοντας τον $(\alpha, \beta) = 1$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\alpha$ και $\beta$ και πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ισότητας αυτής με $\gamma$.

  Έτσι, αν $(\alpha, \beta) = \alpha\kappa + \beta\lambda = 1$, τότε $\alpha(\kappa\gamma) + \beta(\lambda\gamma) = \gamma$ και μια ειδική λύση της (3) είναι η $(x_0, y_0) = (\kappa\gamma, \lambda\gamma)$.
- Μια άλλη μέθοδος εύρεσης ειδικής λύσης της (3) στηρίζεται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2**

*Η εξίσωση*

$$\alpha x + \beta y = \gamma \ \text{ με } \ \alpha > 0^{(*)}$$

*έχει μόνον μια ακέραιη λύση, όταν το $y$ παίρνει τιμές από το σύνολο $\{0, 1, 2, ..., \alpha-1\}$.*

**Απόδειξη:** Η εξίσωση γράφεται $x = \dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha}$ και δίνοντας στο $y$ τις τιμές $0, 1, 2, ..., \alpha-1$, τότε για το $x$ προκύπτουν οι τιμές

$$\frac{\gamma}{\alpha}, \ \frac{\gamma-\beta}{\alpha}, \ \frac{\gamma-2\beta}{\alpha}, ..., \frac{\gamma-(\alpha-1)\beta}{\alpha}$$

Θα αποδείξουμε ότι μόνον μία απ' αυτές είναι ακέραιη. Θεωρούμε τις ευκλείδειες διαιρέσεις

$$\gamma:\alpha, \ (\gamma-\beta):\alpha, \ (\gamma-2\beta):\alpha, ..., [\gamma-\beta(\alpha-1)]:\alpha$$

οι οποίες δίνουν πηλίκα $\pi_0, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_{\alpha-1}$ και υπόλοιπα $\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_{\alpha-1}$ αντίστοιχα. Τα υπόλοιπα αυτά παίρνουν τιμές από $0$ έως $\alpha-1$.

Αν τα υπόλοιπα είναι διαφορετικά ανά δύο, επειδή έχουν πλήθος $\alpha$, μόνο τό ένα απ' αυτά είναι $0$. Αν π.χ. $\upsilon_\kappa = 0$, τότε

$$x_\kappa = \frac{\gamma-\kappa\beta}{\alpha} \quad \mathbb{Z},$$

ενώ οι υπόλοιπες τιμές του $x$ δεν είναι ακέραιες.

Αν δύο τουλάχιστον από τα υπόλοιπα είναι ίσα, π.χ. $\upsilon_\lambda = \upsilon_\mu$, $0 \le \lambda < \mu \le \alpha-1$, τότε από τις ισότητες

$$\gamma - \lambda\beta = \alpha\cdot\pi_\lambda + \upsilon_\lambda \quad \text{και} \quad \gamma-\mu\beta = \alpha\cdot\pi_\mu + \upsilon_\mu,$$

με αφαίρεση κατά μέλη, παίρνουμε την ισότητα

$$\beta(\mu-\lambda) = \alpha\cdot(\pi_\lambda - \pi_\mu)$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο $\alpha$ διαιρεί τον $\beta(\mu-\lambda)$ και επειδή $(\alpha, \beta) = 1$, έχουμε $\alpha\Omega\mu-\lambda$, που είναι άτοπο, αφού $\mu-\lambda < \alpha$.

***Παράδειγμα***

Θεωρούμε την εξίσωση $3x + 4y = 5$, η οποία γράφεται $x = \dfrac{5-4y}{3}$.

Δίνοντας στο $y$ τις τιμές $0, 1, 2$, παίρνουμε για το $x$ τις τιμές $\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}, -1$ αντίστοιχα. Έτσι, μια ακέραιη λύση είναι η $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, ενώ όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι

$$x = x_0 + \beta t = 1 + 4t,$$

$$y = y_0 - \alpha t = 2-3t \qquad \text{με } t \ \mathbb{Z}.$$

Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται συνήθως στην περίπτωση που οι συντελεστές $\alpha$, $\beta$ είναι σχετικά μικροί αριθμοί.

◆

* Αν ισχύει $\alpha < 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $(-\alpha)x + (-\beta)y = -\gamma$ με $-\alpha > 0$ και η πρόταση αληθεύει για τον $-\alpha$.

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

# ΜΕΛΕΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ με τη ΒΟΗΘΕΙΑ του ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Της **Ανδρέου Μαρίας**, Φοιτήτριας

Από τα πιο δύσκολα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι εκείνα που αναφέρονται στους γεωμετρικούς τόπους «*Ένα γεωμετρικό σχήμα (σύνολο σημείων) του επιπέδου (ή χώρου) που τα στοιχεία του και μόνον αυτά έχουν μια κοινή ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος** της ιδιότητας αυτής*»*. Στη γενική περίπτωση, τα στοιχεία που έχουν μια κοινή ιδιότητα μπορεί να είναι σημεία, ευθείες και επίπεδα, δηλαδή πρωταρχικές έννοιες.

Για τη λύση τέτοιων προβλημάτων, στο πνεύμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ακολουθούμε συνήθως την αναλυτική μέθοδο, η οποία είναι μια δύσκολη διαδικασία. Οργανώνει όμως και ταξινομεί τις γνώσεις μας και καλλιεργεί την κριτική σκέψη περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη διαδικασία. Ο Διανυσματικός Λογισμός μετατρέπει το γεωμετρικό πρόβλημα σε αλγεβρικό, που η αντιμετώπισή του είναι ευκολότερη. Θα προσπαθήσουμε στο άρθρο αυτό να προσεγγίσουμε τη λύση προβλημάτων γεωμετρικών τόπων με τη βοήθεια του Διανυσματικού Λογισμού. Προτού προχωρήσουμε θα παραθέσουμε μια σύντομη παρουσίαση των βασικών ορισμών και ιδιοτήτων του Διανυσματικού Λογισμού:

## Ορισμοί και ιδιότητες των διανυσμάτων

Επειδή οι ορισμοί και οι ιδιότητες, όπως θα παρουσιαστούν εδώ, ισχύουν τόσο για την περίπτωση των διανυσμάτων του επιπέδου όσο και του χώρου για το λόγο αυτό θα παρουσιαστούν χωρίς αναφορά στη διάστασή τους.

**Ορισμός:** Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$ τον πραγματικό αριθμό:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\begin{cases}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta}), & \text{αν } \vec{\alpha}\neq\vec{0}\ \&\ \vec{\beta}\neq\vec{0}\\ 0, & \text{αν } \vec{\alpha}=\vec{0}\ \text{ή}\ \vec{\beta}=\vec{0}\end{cases}$$

Το εσωτερικό γινόμενο, όπως ορίστηκε, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική),

2) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$, λ ℝ,

3) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (επιμεριστική),

4) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2$,

5) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\begin{cases}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|, & \text{όταν } \vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta}\\ -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|, & \text{όταν } \vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}\end{cases}$

όπου $\vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta}$ (αντ. $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$) σημαίνει παράλληλα και ομόρροπα (αντ. αντίρροπα) και

6) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$, όταν $\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}$,

7) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

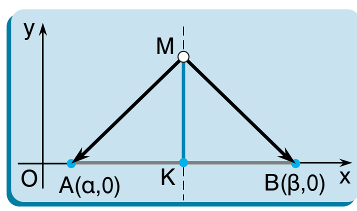
Προφανώς δεν έχει νόημα να γράψουμε $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$, αφού η παρένθεση είναι αριθμός και δε μπορεί να έχει εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής: Για $\vec{\gamma}\neq\vec{0}$ δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\quad \vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

## Οι θεμελιώδεις γεωμετρικοί τόποι σε διανυσματική μορφή

Στη μελέτη που ακολουθεί θεωρούμε ότι το επίπεδο (αντ. ο χώρος), όπου λαμβάνει χώρα το γεωμετρικό πρόβλημα, είναι εφοδιασμένος με ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy (αντ. Oxyz).

**1.** Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που απέχουν εξίσου από τα άκρα Α και Β ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ. Τα σημεία Μ(x, y) του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση




$$|\vec{MA}|=|\vec{MB}|$$

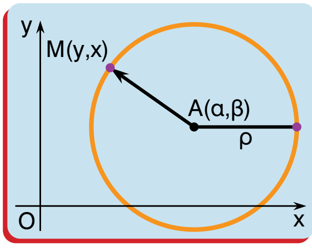
Αν θεωρήσουμε, χάριν απλότητος, ότι τα σημεία Α, Β βρίσκονται πάνω στον άξονα Ox, οι συντεταγμένες τους είναι της μορφής Α(α, 0) και Β(β, 0), με $\alpha\neq\beta$, οπότε η διανυσματική εξίσωση μας οδηγεί στην αλγεβρική εξίσωση

$$(x-\alpha)^2=y^2=(x-\beta)^2+y^2\qquad=\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{ και }\ y\ \ \mathbb{R},$$

* Ευκλείδεια Γεωμετρία, η οποία θα κυκλοφορήσει με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα.

που σημαίνει ότι τα σημεία Μ ανήκουν στην ευθεία $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, η οποία είναι κάθετη στον άξονα Οx και στο μέσο Κ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

**2.** Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) που απέχουν από το σημείο Α(α, β) σταθερή απόσταση ρ>0 είναι ο κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα ρ. Στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα $|\vec{MA}|$ ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση




$$|\vec{MA}| = \rho \qquad (x-\alpha)^2+(x-\beta)^2 = \rho^2,$$

δηλαδή είναι τα σημεία (x, y) του κύκλου με κέντρο το Α(α, β) και ακτίνα ρ>0.

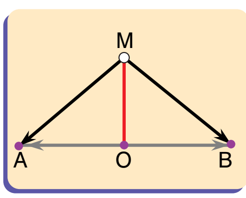
## Γενικές μορφές γεωμετρικών τόπων

Στη μελέτη που ακολουθεί θεωρούμε ότι τα σημεία Α, Β είναι σταθερά και κ σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Πρόβλημα 1ο:** Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = \kappa$$

**Μελέτη:** Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (βλ. σχήμα), τότε




$\vec{MA}=\vec{MO}+\vec{OA}$ και $\vec{MB}=\vec{MO}+\vec{OB}$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$(\vec{MO}+\vec{OA})\cdot(\vec{MO}+\vec{OB}) = \kappa$$

$$(\vec{MO}+\vec{OA})\cdot(\vec{MO}-\vec{OA}) = \kappa$$

$$\vec{MO}^2-\vec{OA}^2 = \kappa \qquad |\vec{MO}|^2 = |\vec{OA}|^2 + \kappa. \ (*)$$

Ανάλογα με τις τιμές του κ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το λ: $= |\vec{OA}|^2 + \kappa$:

α) Αν $|\vec{MO}|^2 = \lambda>0$, τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι κύκλος με κέντρο το μέσον Ο του ΑΒ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda}$.

β) Αν λ=0, τότε το μοναδικό σημείο που ικανοποιεί την (*) είναι το μέσον Ο του ΑΒ και ο γεωμετρικός τόπος είναι το μονοσύνολο {Ο}.

γ) Αν λ<0, τότε δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου που ικανοποιεί την (*) και ο γεωμετρικός τόπος είναι το κενό σύνολο.

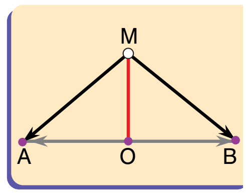
**Πρόβλημα 2ο:** Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{MA}^2-\vec{MB}^2 = \kappa \text{ (προφανώς } \geq 0)$$

**Μελέτη:** Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (βλ. σχήμα), τότε

$$\vec{MA}=\vec{MO}+\vec{OA} \quad \text{και} \quad \vec{MB}=\vec{MO}+\vec{OB},$$

οπότε η εξίσωση γράφεται:




$$(\vec{MO}+\vec{OA})^2+(\vec{MO}+\vec{OB})^2 = \kappa$$

$$(\vec{MO}+\vec{OA})^2+(\vec{MO}-\vec{OA}) = \kappa$$

$$2\vec{MO}^2-2\vec{OA}^2 = \kappa$$

$$\vec{MO}^2 = \frac{1}{4}(2\kappa-\vec{AB}^2).$$

Ανάλογα με τις τιμές του λ: $\frac{1}{4}(2\kappa-\vec{AB}^2)$, το οποίο είναι σταθερός αριθμός, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Αν λ>0, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda}$.

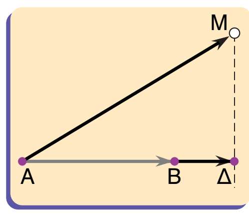
β) Αν λ=0, τότε ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται μόνο από το μέσον Ο του ΑΒ.

γ) Αν λ<0, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι το κενό σύνολο.

**Πρόβλημα 3ο:** Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{AM}\cdot\vec{AB} = \kappa.$$

**Μελέτη:** Αν Δ είναι η προβολή του σημείου Μ πάνω στον φορέα του διανύσματος $\vec{AB}$ (βλ. σχήμα), τότε




$$\vec{AM}\cdot\vec{AB} = \kappa$$

$$\vec{A\Delta}\cdot\vec{AB} = \kappa$$

$$|\vec{A\Delta}|\,|\vec{AB}| = |\kappa|$$

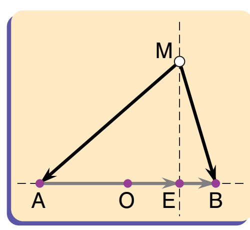
$$|\vec{A\Delta}| = \frac{|\kappa|}{|\vec{AB}|}.$$

Επομένως το σημείο Δ είναι η προβολή των σημείων Μ του γεωμετρικού τόπου στο φορέα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δηλαδή η κάθετη στο ΑΒ και στο σημείο Δ που ορίζεται από την τελευταία ισότητα.

**Πρόβλημα 4ο:** Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{MA}^2-\vec{MB}^2 = \kappa.$$

**Μελέτη:** Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ και Ε η προβολή του σημείου Μ πάνω στο φορέα του διανύσματος $\vec{AB}$ (βλ. σχήμα), τότε επειδή




$$\vec{MA}^2-\vec{MB}^2 =$$

$$= (\vec{MA}-\vec{MB})\cdot(\vec{MA}+\vec{MB}) =$$

$$= 2\vec{BA}\cdot\vec{MO} = 2\vec{AB}\cdot\vec{OE}$$

έχουμε

$$\vec{MA}^2-\vec{MB}^2 = \kappa \qquad 2\vec{AB}\cdot\vec{OE} = \kappa$$

$$|2\vec{AB}|\,|\vec{OE}| = |\kappa| \qquad |\vec{OE}| = \frac{|\kappa|}{|2\vec{AB}|}$$

που σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος είναι η κάθετη ευθεία στο ΑΒ και στο σημείο Ε που προσδιορίζεται από την τελευταία ισότητα. ◆

Διδάσκοντας ... με στυλ

# ΑΝΗΚΩ στον ΣΥΓΚΛΙΝΟΝΤΑ, στον ΑΦΟΜΟΙΩΤΙΚΟ ή στον ΑΠΟΚΛΙΝΟΝΤΑ ΤΥΠΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ;

Της **Δ. Μακρή**, Φυσικού
Υποψήφιος Διδάκτορας τμήματος ηλ/γων και μηχανικών Η/Υ, Δημοκρίτειο Παν. Θράκης.

*Το άρθρο αυτό απευθύνεται στον εκπαιδευτικό ανεξαρτήτως ειδικότητας. Αποτελεί πρόταση σε δύο επίπεδα :*

*1) Το σχεδιασμό δραστηριοτήτων εντός της σχολικής αίθουσας με επίκεντρο όχι μόνο το διδακτικό αντικείμενο και τις δυσκολίες του, αλλά και το μαθητή και τις ιδιαιτερότητές του.*

*2) Τη συμβουλευτική –επικουρική προσέγγισή στο διδασκόμενο που επιχειρεί την αυτογνωσία και αυτοβελτίωσή του.*

Έχουμε άραγε συνειδητοποιήσει ποια διαδικασία ακολουθούμε όταν έχουμε να μάθουμε κάτι καινούργιο; Μήπως ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία κάθε φορά; Μήπως δηλαδή έχουμε διαμορφώσει συγκεκριμένο σχήμα συμπεριφοράς κατά τη διαδικασία της μάθησης; Ίσως δεν ενεργούμε με εντελώς όμοιο τρόπο κάθε φορά , αλλά είναι γεγονός ότι κάθε ένας από εμάς έχει ένα συγκεκριμένο σύνολο ενεργειών με τις οποίες αισθάνεται ότι διευκολύνεται στην εκμάθηση ενός νέου αντικειμένου.

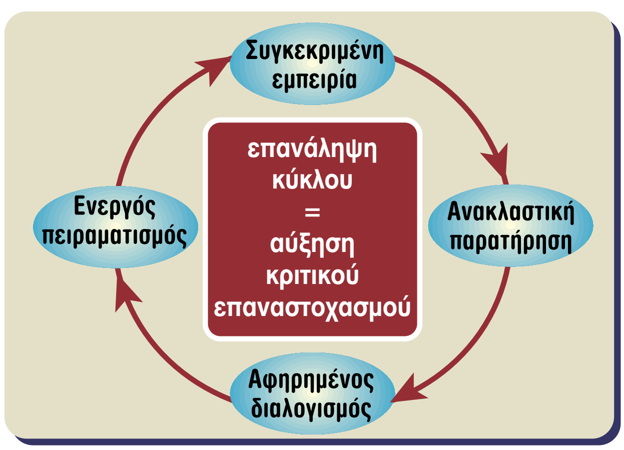
Το σχήμα συμπεριφοράς που ενεργοποιείται κατά την εκμάθηση ενός νέου αντικειμένου είναι αυτό που αποκαλούμε μαθησιακό στυλ.

Έχει ειπωθεί ότι η μάθηση είναι μια κυκλική διαδικασία που ξεκινά από την εμπειρία συνεχίζει με στοχασμό –νοητική επεξεργασία όπου γίνεται η συσχέτιση με προηγούμενες εμπειρίες και τα εξαγόμενα συμπεράσματα με βάση αυτές (από προηγούμενη νοητική επεξεργασία), προχωρά σε πράξη η οποία με τη σειρά της ανατροφοδοτεί την εμπειρία.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στη κατά Kolb[1] θεωρία μάθησης, καθώς αποτελεί μια από τις σημαντικές θεωρίες μάθησης του αιώνα μας. Δεν είναι η μοναδική και έχει υποστεί κριτικές και συμπληρώσεις . Αποτελεί όμως εναρκτήριο σημείο προβληματισμού –σκέψης σχετικά με το σχεδιασμό της εκπαιδευτικής πράξης. Σχεδιασμό με σημείο αναφοράς όχι μόνο το διδακτικό αντικείμενο και τις ενδογενείς δυσκολίες του, αλλά και το μαθητή με τις ιδιαιτερότητες και τις προτιμήσεις του.

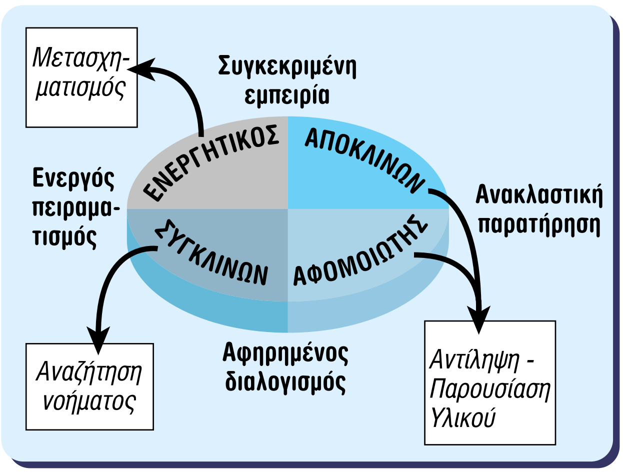
Κατά Kolb, αναφέρονται τέσσερα στάδια του μαθησιακού κύκλου:

- Συγκεκριμένη Εμπειρία –(Σ.Ε.) (*Concrete expe-riece*): Μαθαίνοντας από συγκεκριμένες εμπειρίες, δίδοντας έμφαση στην προσωπική ανάμειξη και βάση περισσότερο στις αισθήσεις, στην αλληλεπίδραση με άλλους ανθρώπους παρά στη συστηματική προσέγγιση της επίλυσης του προβλήματος.
- Ανακλαστική Παρατήρηση –(Α.Π.) (*Reflective ovseravtion* - RO): Μάθηση με χρήση αντικειμενικότητας, κριτική διαμόρφωση απόψεων, χωρίς όμως απαραίτητα ενεργό ανάμειξη.
- Αφηρημένος διαλογισμός – Α.Δ. (*Abstract conceptualization* - AC): Μαθαίνοντας από τη λογική ανάλυση των ιδεών, δίνοντας βάση στο συστηματικό σχεδιασμό και στη διαμόρφωση θεωριών.
- Ενεργός Πειραματισμός – (Ε.Π.) (*Active Experimentation* - AE): Μαθαίνοντας στην πράξη, προσπαθώντας να επηρεάσουμε και να τροποποιήσουμε τις συνθήκες.



Θα μπορούσαμε να πούμε ότι από τα πιο πάνω στάδια του μαθησιακού κύκλου, η συγκεκριμένη εμπειρία και ο αφηρημένος διαλογισμός είναι μια διπολική διάσταση που έχει να κάνει με την αντίληψη, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η συλλογή των πληροφοριών, ενώ η ανακλαστική παρατήρηση και ο ενεργός πειραματισμός είναι μια άλλη διπολική επίσης διάσταση που έχει να κάνει με τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η επεξεργασία των πληροφοριών.

Γενικά κατά τη διαδικασία της γνώσης, διαβαίνουμε και τα τέσσερα στάδια του γνωστικού κύκλου. Κάθε ένας από εμάς όμως έχει κάποιο που προτιμά. Έτσι διαμορφώνονται τα κατά Kolb Στυλ μάθησης με τους αντίστοιχους τύπους ανθρώπων:




### Ο ενεργητικός (Σ.Ε. + Ε.Π.):

- Μαθαίνει πρωταρχικά από τις εμπειρίες τις οποίες βιώνει, από τις δοκιμές και τα λάθη του.
- Έχει συνήθως την ικανότητα να πραγματοποιεί σχέδια, να αναλαμβάνει ηγετικό ρόλο και να ρισκάρει.
- Προτιμά να στηρίζεται στην ανάλυση άλλων παρά στη δική του. Προτιμά τα γεγονότα παρά τη θεωρία. Προσαρμόζεται εύκολα στις αλλαγές.
- Συνήθης ερώτησή του: «Σε τι χρησιμεύει;».
- Ψάχνει για κρυμμένες δυνατότητες.
- Κίνητρο για αυτόν αποτελεί το τελειωμένο έργο.
- Του αρέσει η σχέση με άτομα, αλλά ένα προς ένα.
- Ως διδάσκων ενθαρρύνει τους μαθητές του να ενεργούν, αναλύει, μοιράζεται, προπονεί.
- Αδυναμία του: δεν έχει υπομονή.

### Ο Συγκλίνων (Ε.Π. + Α.Δ.):

- Μαθαίνει καλύτερα βρίσκοντας πρακτικές χρήσεις των ιδεών και των θεωριών των οποίων την ευστάθεια έχει την ικανότητα να ελέγξει. Αρέσκεται στην επίλυση προβλημάτων, στην εύρεση μάλιστα πρακτικών λύσεων. Προτιμά την ενασχόληση με τεχνικές δραστηριότητες.
- Προτιμά τα αντικείμενα από τους ανθρώπους.
- Δεν ανέχεται τις ασαφείς ιδέες.
- Συνήθης ερώτησή του: «Πώς δουλεύει αυτό;».
- Σκοπός του η εύρεση πρακτικής εφαρμογής.
- Κίνητρό του: τα προβλήματα.
- Προωθεί προς τα έξω την εικόνα του αποδοτικού ατόμου.
- Αποζητά την ασφάλεια.
- Του αρέσει ο διασκεδαστικός και πρακτικός δάσκαλος, ενώ ο ίδιος στο ρόλο του δασκάλου, θέτει ερωτήσεις και φροντίζει να διευκολύνει την απάντησή τους.

### Ο Αφομοιωτής (Α.Π. + Α.Δ.):

- Έχει την ικανότητα να ορίζει το υπό εξέταση πρόβλημα, να δημιουργεί μοντέλα, να αναπτύσσει σχέδια καθώς και θεωρίες. Χρησιμοποιεί αφηρημένες ιδέες και έννοιες και έχει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται και να καταλαβαίνει ευρύ πεδίο πληροφοριών, συνοψίζοντας και οργανώνοντάς τις λογικά. Η πρακτικότητα για αυτόν είναι λιγότερο σημαντική από τη λογική εξήγηση.
- Κριτικάρει την κάθε πληροφορία που μαθαίνει.
- Του αρέσει να χαρακτηρίζεται ως «ο λογικός».
- Ερώτησή του: «Ποια στοιχεία διαθέτουμε;».
- Ψάχνει για τα γεγονότα και τις γνώμες των ειδικών.
- Σκοπός του να βρει αναγνώριση ως διανοητικά καλλιεργημένος.
- Κίνητρό του: η απόκτηση της τέλειας - πλήρους γνώσης, της επιδεξιότητας.
- Του αρέσει ο δάσκαλος που φαίνεται να είναι ειδικός επί του θέματος που διδάσκει.
- Καμιά φορά όμως ξεχνά την πρακτική εφαρμογή ή υπερβάλλει κριτικάροντας.

### Ο Αποκλίνων (Α.Π. + Σ.Ε.):

- Μαθαίνει κυρίως θεωρώντας διαφορετικές καταστάσεις από διαφορετικές απόψεις.
- Προτιμά να παρατηρεί παρά να συμμετέχει στη δράση. Χρησιμοποιεί τη φαντασία του στην επίλυση προβλημάτων.
- Του αρέσουν οι «φαεινές ιδέες» και η προσωπική ανάμειξη.
- Κατανοεί τους ανθρώπους και τα προβλήματά τους.
- Αναζητά το νόημα.
- Συνήθης ερώτησή του «Γιατί ή γιατί όχι;».

– Σκοπός του είναι να συμμετέχει σε κρίσιμα - σημαντικά ζητήματα, συζητήσεις ή αποφάσεις.
– Κίνητρό του η περιέργεια και ο ενθουσιασμός.
– Του αρέσει ο καθηγητής που συμμετέχει με όλο του το «είναι» στη διδασκαλία.
– Ως καθηγητής ο ίδιος προτρέπει τους μαθητές του να βρουν ο καθένας το δικό του λόγο για να προσπαθεί.
– Αδυναμία του: Το ότι μπορεί να βρίσκει πολλές εναλλακτικές απόψεις και ιδέες. Δε σημαίνει ότι εύκολα μπορεί να τις ξεδιαλέξει.

Αν τα διάφορα τμήματα της εκπαιδευτικής πράξης (διδασκαλία σε αίθουσα ή multimedia παρουσίαση) είναι σχεδιασμένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξυπηρετούν και τα τέσσερα στάδια του προαναφερθέντος μαθησιακού κύκλου, προφανώς, το παρουσιαζόμενο θέμα έχει μεγαλύτερο βαθμό αφομοίωσης.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται δραστηριότητες στο πλαίσιο της διδασκαλίας «εντός αιθούσης», οι οποίες υποστηρίζουν τα τέσσερα διαφορετικά στάδια του μαθησιακού κύκλου[2].

| ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ | ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ |
|---|---|
| • Συλλογή στοιχείων για μελέτη<br>• Παροχή κειμένων προς μελέτη<br>• Αναφορά παραδειγμάτων<br>• Εργαστήρια<br>• Προβολή φιλμ με σωστά μελετημένο στοιχείο εντυπωσιασμού<br>• Προβολή από simulations και animations | • Συζητήσεις ανταλλαγής ιδεών<br>• Διάλογος<br>• Ρητορικές ερωτήσεις<br>• Μελέτη περιοδικών<br>• Δρομολόγηση επιδείξεων |
| **ΑΦΗΡΗΜΕΝΟΣ ΔΙΑΛΟΓΙΣΜΟΣ** | **ΕΝΕΡΓΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΣ** |
| • Διαλέξεις<br>• Μελέτη άρθρων<br>• Προβολή διαφανειών<br>• Εξέταση αναλογιών<br>• Ανάπτυξη μοντέλων<br>• Σχεδιαγράμματα λογικής συσχέτισης | • Ανάθεση έργων (projects)<br>• Συλλογή στοιχείων για μελέτη<br>• Ανάθεση εργασίας στο σπίτι<br>• Εργαστήρια<br>• Έκθεση ανάλυσης ιστορικού της προς μελέτη περίπτωσης<br>• simulations |

Όσο αφορά την multimedia παρουσίαση μιας θεματικής ενότητας, αναφέρονται στη συνέχεια κάποια σημεία που τα συναντάμε σε αυτήν ή τουλάχιστον πρέπει να συνυπάρχουν εντός αυτής. Αρχίζουμε με την αναφορά των λεγομένων «hot-words» και κάποιων animation, υποστηρίζεται το στάδιο του ενεργού πειραματισμού. Αν στο κομμάτι της παρουσίασης υπάρχει κάποιο διάγραμμα δομής και συσχέτισης των παρουσιαζόμενων εννοιών τότε έχουμε υποστήριξη του σταδίου του αφηρημένου διαλογισμού. Αν μετά την παρουσίαση ακολουθούν παραδείγματα με επεξηγήσεις βήμα-βήμα, έχουμε υποστήριξη του σταδίου της συμπαγούς εμπειρίας και του ενεργού πειραματισμού. Στο κομμάτι της εφαρμογής όπου ο χρήσης καλείται να απαντήσει σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, σε κάθε προσπάθεια επιλογής του χρήση θα πρέπει να δίδεται η εξήγησή του γιατί η δεδομένη επιλογή είναι σωστή ή λάθος. Με τον τρόπο αυτό έχουμε υποστήριξη του σταδίου της ανακλαστικής παρατήρησης.

Ερευνητική δραστηριότητα υπάρχει όσο αφορά τον εντοπισμό της σχέσης μεταξύ του κυρίαρχου στο χρήστη μαθησιακού σταδίου, και του τρόπου που αυτός χρησιμοποιεί μια multimedia εκπαιδευτική εφαρμογή. Κάποια αποτελέσματα έχουν ξεκαθαρίσει ενώ κάποια άλλα είναι ακόμη ασαφή. Για παράδειγμα αν το κυρίαρχο στάδιο είναι η ανακλαστική παρατήρηση τότε ο χρήσης φαίνεται να χρειάζεται μεγαλύτερο αριθμό προσβάσεων και περισσότερο χρόνο σε ένα δεδομένο link, ενώ προτιμά την καθοδήγηση με οδηγίες, παρά την καθοδήγηση με χρήση παραδειγμάτων που προτιμά ο χρήστης που έχει ως κυρίαρχο στάδιο του μαθησιακού του κύκλου τη συγκεκριμένη εμπειρία[3].

Η ταυτοποίηση του στυλ μάθησης των σπουδαστών και η γνωστοποίηση του αποτελέσματος σε αυτούς τους ωφελεί κατά δύο τρόπους:

- Τους βοηθά να έχουν επίγνωση των δυνάμεών τους και να κατευθύνουν τις προσπάθειές τους σύμφωνα με τις δυνατότητες και της επιδιώξεις τους, ενισχύοντας κάποιους τομείς και απαλύνοντας τις αδυναμίες τους σε άλλους.
- Μαθαίνουν να λειτουργούν σε μεταγνωστικό επίπεδο (metacognition), επεμβαίνοντας οι ίδιοι στον τρόπο που μαθαίνουν και συνειδητοποιώντας τα τυχόν λάθη τους κατά τη διαδικασία της μάθησης κατά τη στιγμή που αυτά συμβαίνουν.
- Κατανοώντας περισσότερο τον εαυτό τους διευκολύνονται και στην επιλογή των επαγγελματικών δραστηριοτήτων ανά μαθησιακό τύπο, με βάση βέβαια τις έρευνες που εκθέτονται σε αντίστοιχη βιβλιογραφία:

| Ενεργητικός | Αποκλίνων |
|---|---|
| • Γιατρός<br>• Πρακτική ιατρική<br>• Κοινωνικός λειτουργός<br>• Επιχειρήσεις<br>• Αρχιτέκτονας | • Κοινωνικός λειτουργός<br>• Καλές τέχνες<br>• Φιλοσοφία / ιστορία<br>• Ανθρωπιστικές σπουδές<br>• Ξένες γλώσσες |
| **Συγκλίνων** | **Αφομοιωτής** |
| • εργασιοθεραπευτής<br>• πειραματική χημεία<br>• μηχανικός<br>• επιχειρήσεις<br>• μαθηματικά<br>• βιολογία<br>• φυσικές επιστήμες<br>• ακαδημαϊκή ενασχόληση με κοινωνικές επιστήμες | • χημεία<br>• μαθηματικά<br>• οικονομικές επιστήμες<br>• κοινωνιολογία<br>• κοινωνικές επιστήμες |

Και οι ίδιοι οι διδάσκοντες ωφελούνται από την προσπάθεια διερεύνησης των μαθησιακών στυλ των σπουδαστών τους. Κάποιοι από μας ως διδάσκοντες, συμβουλεύουμε τους μαθητές μας να ακολουθούν ένα συγκεκριμένο σύνολο ενεργειών που θα τους διευκολύνει να μαθαίνουν. Το σύνολο αυτό ενεργειών είναι τις περισσότερες φορές ταυτόσημο με αυτό που εμείς ακολουθούμε. Μήπως παρατηρούμε ότι οι συμβουλές μας δεν φαίνονται υλοποιήσιμες στην κάθε περίπτωση.

## Αναφορές


1. Kold, D.A. (1984): *Experiental learning: Experience as a source of learning and development*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
2. Anderson & Adams (1992): *«Acknowledge the learning styles of diverse student populations; Implications for instructional design»*. In L.L.B. Shism. Teaching for diversity, new directions in teaching and learning, no 42, San Francisco, CA: Jossey Bass.
3. Ainslie E. Ellis (1997): *Learning styles and hypermedia courseware usage: is there a connection»*, International Conference of Educational Multimedia and Hypermedia.
4. Knizich et al (1986): *Assesment of student and faculty learning styles: Research and application.* Journal of social work education, 22, 22-30.

   Newland et al (1987): *Understanding architectural designers selective information handling*, Disign studies, 8, 2-26.
5. Reading-Brown et al: *Learning styles, liberal arts and technical training*, Psychological reports, 64, 507-518.
6. Reading-Brown et al (1989): *Learning styles, liberal arts and technical training: What is the difference*, Psychological reports, 64, 794-796.

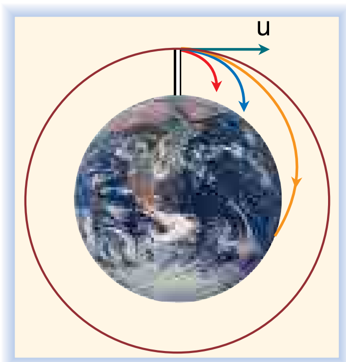
# ΔΟΡΥΦΟΡΟΙ

Του **Γ. Ατρείδη**, Φυσικού

**• Για τη Β Λυκείου (Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης) • Για την 1η και 2η δέσμη**

Ερωτήματα για την κίνηση των φυσικών δορυφόρων γύρω από τους πλανήτες και για την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο έχουν τεθεί από παλιά.

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε με απλά λόγια πώς ένα σώμα μπορεί να κινείται κυκλικά γύρω από τη γη στην ίδια πάντοτε τροχιά και πώς αφού ασκούνται ελκτικές δυνάμεις μεταξύ του σώματος και της γης δεν έχουμε σύγκρουση.




Έστω ότι βρίσκεστε πάνω σε ένα ψηλό πύργο και με ένα κατάλληλο μηχανισμό ρίχνετε οριζόντια ένα πορτοκάλι με κάποια ταχύτητα. Το πορτοκάλι εκτελεί μια παραβολική τροχιά και πέφτει σε κάποιο σημείο στην επιφάνεια της γης. Επαναλαμβάνετε το ίδιο πείραμα δίνοντας στο πορτοκάλι μεγαλύτερη ταχύτητα. Τότε αυτό θα πέσει σε κάποιο σημείο πιο μακριά από το προηγούμενο.

Αν συνεχίσουμε το πείραμα δίνοντας στο πορτοκάλι συνεχώς μεγαλύτερη ταχύτητα τότε για κάποια τιμή της ταχύτητας αυτό δεν θα πέφτει πάνω στη γη αλλά θα ακολουθεί την καμπυλότητά της.

Στην περίπτωση αυτή η ελκτική δύναμη που ασκεί η γη στο πορτοκάλι παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης και συντηρεί την κυκλική κίνηση.

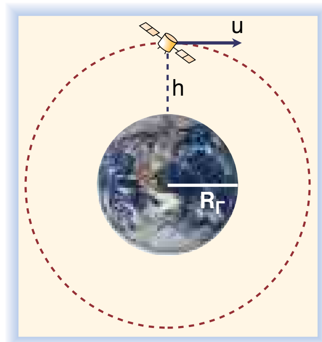
Παραπάνω κάναμε μια σχετικά απλή προσέγγιση στην κίνηση των σωμάτων γύρω από τη γη. Η πραγματικότητα είναι περισσότερο πολύπλοκη. Πρέπει να πάρουμε δηλαδή υπόψιν μας αντιστάσεις, τριβές και έλξεις από άλλους πλανήτες.

## • Σχέση που δίνει την ταχύτητα της κυκλικής κίνησης του δορυφόρου γύρω από τη γη

Έστω ότι ένας δορυφόρος κινείται κυκλικά γύρω από τη γη σε ύψος h από την επιφάνειά της.

➥ Η ταχύτητα της κυκλικής του κίνησης θα υπολογίζεται πάντα από τη συνθήκη:

$$B = F_\kappa \qquad (1)$$




Δηλαδή η βαρυτική έλξη της γης είναι η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη για την κυκλική κίνηση του δορυφόρου.

Ξέρουμε όμως ότι:

$$B = G\,\frac{M_\Gamma \cdot m}{(R_\Gamma + h)^2} \qquad (2)$$

$$F_\kappa = \frac{mu^2}{R_\Gamma + h} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$G\,\frac{M_\Gamma \cdot m}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{mu^2}{R_\Gamma + h} \qquad u = \sqrt{G \cdot \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \qquad (4)$$

**Από τη σχέση (4) βλέπουμε ότι η ταχύτητα της κυκλικής κίνησης του δορυφόρου εξαρτάται μόνο από το ύψος του. Όσο ψηλότερα κινείται ο δορυφόρος τόσο μικραίνει η ταχύτητά του.**

**Προσοχή:** Δεν μπορούμε να δώσουμε ότι ταχύτητα θέλουμε σε δορυφόρο ο οποίος κινείται σε συγκεκριμένο ύψος. Αν μεταβάλουμε την ταχύτητά του και εξακολουθεί να κινείται κυκλικά, τότε υποχρεωτικά θα μεταβληθεί και το ύψος στο οποίο κινείται.

### ➥ Για την περίοδο της κυκλικής κίνησης του δορυφόρου έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} u &= \omega(R_\Gamma + h) \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \qquad u = \frac{2\pi(R_\Gamma + h)}{T} \qquad T = \frac{2\pi(R_\Gamma + h)}{u} \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) παίρνουμε:

$$T = \frac{2\pi(R_\Gamma + h)}{\sqrt{G\,\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}}} \qquad T = \frac{2\pi\sqrt{(R_\Gamma + h)^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}} \qquad (6)$$

**➥ Η ολική μηχανική ενέργεια ενός δορυφόρου ο οποίος κινείται κυκλικά γύρω από τη γη θα είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας.**

$$E_\kappa = \frac{1}{2} m u^2 \quad \overset{(4)}{} \quad E_\kappa = \frac{1}{2} m G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$$

$$E_\kappa = \frac{G M_\Gamma \cdot m}{2(R_\Gamma + h)} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} E_\Delta &= mV \\ V &= -G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} \end{aligned}\right\} \quad E_\Delta = -\frac{G M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h} \qquad (8)$$

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\Delta \overset{(7),(8)}{} \quad E_{o\lambda} = \frac{G M_\Gamma \cdot m}{2(R_\Gamma + h)} - \frac{G M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h}$$

$$E_{o\lambda} = -G \frac{M_\Gamma \cdot m}{2(R_\Gamma + h)} \qquad (9)$$

Η συνολική ενέργεια του δορυφόρου είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι για να τον απομακρύνουμε από την κυκλική του τροχιά πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια.

**Προσοχή:** Υπάρχει περίπτωση ο δορυφόρος να χάσει κινητική ενέργεια σε μια θέση και όμως στη συνέχεια να αυξηθεί η ταχύτητά του. Αυτό συμβαίνει όταν πέφτει σε κυκλική τροχιά μικρότερου ύψους. Τότε έχουμε μετατροπή της δυναμικής ενέργειας του δορυφόρου σε κινητική η οποία υπερκαλύπτει την κινητική ενέργεια που έχασε ο δορυφόρος και έχουμε αύξηση της ταχύτητάς του.

Η ολική όμως ενέργεια του δορυφόρου θα έχει μειωθεί κατά το ποσοστό που έχασε.

**Παρατηρήσεις**

- Ένα σώμα δεν μπορεί να γίνει δορυφόρος της γης μόνο με την εκτόξευσή του από την επιφάνειά της. Πρέπει όταν έρθει στο σωστό ύψος με διορθωτικές ωθήσεις να αποκτήσει κυκλική τροχιά.
- Η ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για την εγκατάσταση ενός δορυφόρου σε κυκλική τροχιά, είναι ίση με το άθροισμα του έργου που πρέπει να δαπανήσουμε για την ανύψωση του δορυφόρου και της κινητικής ενέργειας που πρέπει να του δώσουμε για την περιστροφή του.
- Σύγχρονος ονομάζεται ένας δορυφόρος ο οποίος κινείται πάνω από τον ισημερινό της γης, με περίοδο ίση με την περίοδο περιστροφής της γης (Τ=24h). Ο δορυφόρος αυτός παραμένει συνέχεια πάνω από το ίδιο σημείο του ισημερινού.
- Σε πολλά προβλήματα το γινόμενο $GM_\Gamma$ είναι άγνωστο. Στην περίπτωση αυτή το κάνουμε αντικατάσταση από τη σχέση της έντασης του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της γης.

$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \qquad G M_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2$$

**Ας μελετήσουμε το παρακάτω χαρακτηριστικό παράδειγμα**

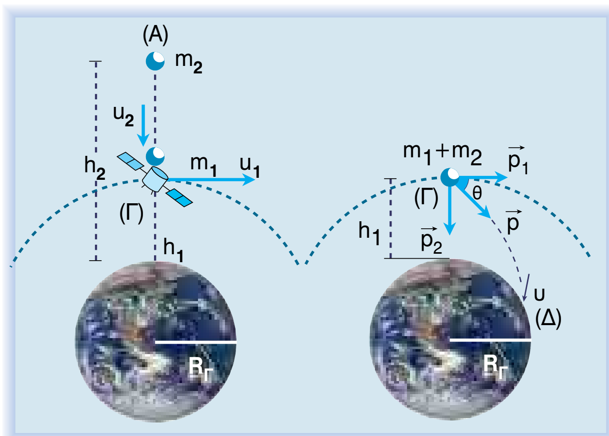
Δορυφόρος μάζας $m_1 = m$ κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη σε ύψος $h_1 = R_\Gamma$ από την επιφάνειά της. Σώμα μάζας $m_2 = \sqrt{3}m$ αφήνεται να πέσει ελεύθερο από ύψος $h_2 = 3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της γης. Το σώμα συγκρούεται πλαστικά με το δορυφόρο και αποκτούν κοινή ταχύτητα. Να βρεθούν:

α) Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει το συσσωμάτωμα στην επιφάνεια της γης.

γ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.

**Λύση**




**α)** Η ταχύτητα της κυκλικής κίνησης του δορυφόρου είναι:

$$F = F_\kappa \qquad G \frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h_1)^2} = \frac{m u_1^2}{R_\Gamma + h_1}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{G M_\Gamma}{R_\Gamma + h_1}} \qquad u_1 = \sqrt{\frac{G M_\Gamma}{2R_\Gamma}} \qquad (1)$$

όμως $\quad g_0 = \dfrac{G M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \qquad G M_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2 \qquad (2)$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$u_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{2 R_\Gamma}} \qquad u_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}} \qquad (3)$$

Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σώμα και υπολογίζουμε την ταχύτητά του λίγο πριν

συγκρουστεί με το δορυφόρο.

$$E_{(A)} = E_{(\Gamma)} \qquad E_{\kappa(A)}+E_{\Delta(A)} = E_{\kappa(\Gamma)}+E_{\Delta(\Gamma)}$$

$$0+m_2V = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+m_2V$$

$$-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma} = \frac{1}{2}\upsilon_2^2 - G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} \quad (2)$$

$$-\frac{g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} = \frac{\upsilon_2^2}{2} - \frac{g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}$$

$$-\frac{g_0R_\Gamma}{4} + \frac{g_0R_\Gamma}{2} = \frac{\upsilon_2^2}{2}$$

$$\frac{\upsilon_2^2}{2} = \frac{g_0R_\Gamma}{4} \qquad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{2}} \qquad (4)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την κρούση παίρνουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \qquad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο παίρνουμε:

$$p = \sqrt{p_1^2+p_2^2} \qquad (m_1+m_2)\upsilon = \sqrt{(m_1\upsilon_1)^2+(m_2\upsilon_2)^2}$$

$$(m+\sqrt{3}m)\upsilon = \sqrt{m^2\frac{g_0R_\Gamma}{2} + 3m^2\frac{g_0R_\Gamma}{2}}$$

$$(m+\sqrt{3}m)\upsilon = \sqrt{4m^2\frac{g_0R_\Gamma}{2}}$$

$$m(1+\sqrt{3})\upsilon = m\sqrt{2g_0R_\Gamma} \qquad \upsilon = \frac{\sqrt{2g_0R_\Gamma}}{1+\sqrt{3}} \qquad (5)$$

και

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2\upsilon_2}{m_1\upsilon_1} = \frac{\sqrt{3}m\sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{2}}}{m\sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{2}}} = \sqrt{3} \qquad \theta = 60^\circ$$

**β)** Έστω ότι το συσσωμάτωμα θα φτάσει στην επιφάνεια της γης με ταχύτητα μέτρου $\upsilon'$. Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ενέργειας στα σημεία (Γ) και (Δ).

$$E_{K(\Gamma)} + E_{\Delta(\Gamma)} = E_{K(\Delta)} + E_{\Delta(\Delta)}$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2+(m_1+m_2)V =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon'^2+(m_1+m_2)V$$

$$\frac{\upsilon^2}{2} - G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} = \frac{\upsilon'^2}{2} - G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$$

$$\upsilon^2 - G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} = \upsilon'^2 - 2G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} \quad (2)$$

$$\upsilon^2 - \frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = \upsilon'^2 - 2\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma}$$

$$\upsilon^2 - g_0R_\Gamma = \upsilon'^2 - 2g_0R_\Gamma$$

$$\upsilon'^2 = g_0R_\Gamma + \upsilon^2 \quad (5)$$

$$\upsilon'^2 = g_0R_\Gamma + \frac{2g_0R_\Gamma}{(1+\sqrt{3})^2}$$

$$\upsilon'^2 = g_0R_\Gamma\left[1 + \frac{2}{(1+\sqrt{3})^2}\right]$$

$$\upsilon' = \sqrt{g_0R_\Gamma\left[1 + \frac{2}{(1+\sqrt{3})^2}\right]} \qquad (6)$$

**γ)** Το ποσοστό της ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά την κρούση είναι:

$$\alpha = \frac{E_\theta}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\Delta E_\kappa}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{E_{\kappa,\tau\varepsilon\lambda}-E_{\kappa,\alpha\rho\chi}}{E_{\kappa,\sigma\rho\chi}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2} =$$

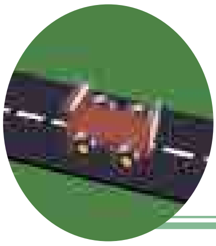
$$= \frac{(m+\sqrt{3}m)\frac{2g_0R_\Gamma}{(1+\sqrt{3})^2} - m\frac{g_0R_\Gamma}{2} - \sqrt{3}m\frac{g_0R_\Gamma}{2}}{m\frac{g_0R_\Gamma}{2} + \sqrt{3}m\frac{g_0R_\Gamma}{2}} =$$

$$= \frac{m(1+\sqrt{3})\frac{2g_0R_\Gamma}{(1+\sqrt{3})^3} - m\frac{g_0R_\Gamma}{2}(1+\sqrt{3})}{m\frac{g_0R_\Gamma}{2}(1+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\frac{2g_0R_\Gamma}{1+\sqrt{3}} + \frac{g_0R_\Gamma}{2}(1+\sqrt{3})}{\frac{g_0R_\Gamma}{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{\frac{2}{1+\sqrt{3}} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{1+\sqrt{3}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} - 1 = \frac{4}{(1+\sqrt{3})^2} - 1 = -0{,}464 \qquad 46{,}4\%$$

Δηλαδή το 46,4% της αρχικής ενέργειας του συστήματος έγινε θερμότητα κατά την κρούση.



# ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΥΠΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

Του **Θ. Βαγενά,** Φυσικού

Ο δρόμος της φυσικής γίνεται δύσκολος μέσα από μια έφεση για μαθηματικοποίηση των ασκήσεων, αφήνοντας έτσι ανερέθιστους και ασυγκίνητους τους περισσότερους μαθητές. Ειδικότερα για το γυμνάσιο θα επισημάνουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές του βρίσκονται στο στάδιο των συγκεκριμένων συλλογισμών κατά Piaget και είναι επομένως πιο εύκολο να κατανοήσουμε συγκεκριμένες και χειροπιαστές έννοιες και γνώσεις. Η προσπάθειά μας, για τη δημιουργία νοητικών κατασκευών των μαθητών, είτε αυτές λέγονται παραστάσεις, είτε αντιλήψεις, είτε νοητικά σχήματα, θέτει νέους όρους στο ζήτημα της μάθησης επίλυσης τύπων της φυσικής.

Όταν αντί αριθμών έχουμε γράμματα και προσπαθούμε να λύσουμε εξισώσεις, για τους μαθητές των τάξεων του γυμνασίου το πράγμα παρουσιάζει μια ιδιαίτερη δυσκολία.

Είναι δύσκολο, πέρα από την πορεία που θα ακολουθήσει κάποιος για την επίλυση μιας εξίσωσης, που αποτελεί μια έκφραση φυσικού νόμου, να αντιληφθεί την πράξη $\alpha \cdot \theta$, το γινόμενο της μεταβλητής $\alpha$ επί την μεταβλητή $\theta$, το γινόμενο $R_0(1+\alpha\theta)$, τι είναι, τι μπορεί να εκφράζει και γιατί επινοείται. Παρακάτω θα κάνουμε μια προσπάθεια μεθοδευμένη στο επίπεδο των μαθητών του γυμνασίου, για την κατανόηση ενός τόσου σημαντικού θέματος.

## Α. Η έννοια της μεταβλητής

Η καθημερινή μας εμπειρία σχετίζεται με τη χρήση των αριθμών, ας πούμε, στις οικονομικές μας συναλλαγές και μας είναι πιο προσιτή και πιο οικεία όσον αφορά τη χρησιμοποίησή της. Σαν πρώτο παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την τηλεκάρτα, το σημερινό «χόμπι» των μαθητών. Αν αγοράσουμε μια κάρτα των 1000 δρχ. και διαθέτει 100 μονάδες, εύκολα μπορεί να υπολογίσει κανείς την τιμή της μονάδας, εφόσον διαθέτει τις γνώσεις της Α Γυμνασίου, διαιρώντας το 1000 διά του 100, ότι δηλαδή είναι δεκάρικο στη μονάδα. Αν τώρα σας έλεγα με παρόμοιο τρόπο ότι την τηλεκάρτα μας την έχουνε χαρίσει και περιέχει 100 μονάδες, θα μου πείτε, σε πρώτη απάντηση, ότι δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της μονάδος. Αν επιμείνω ανάλογα με τα προηγούμενα θα πείτε, έστω ότι η κάρτα κοστίζει $\chi$ δρχ. Διαιρώντας με το εκατό θα βρούμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, το οποίο το ονομάζουμε ψ, επειδή δεν προσδιορίζεται από τη διαίρεση $\chi:100$. Έχουμε λοιπόν την ισότητα $\chi:100=\psi$, όπου $\chi$, $\psi$ αποτελούν τους υποτιθέμενους αριθμούς. Όταν τα δεδομένα ενός προβλήματος μας είναι γνωστά μπορούμε, για να συντάξουμε τις σκέψεις μας, να αντικαταστήσουμε τα δεδομένα με γράμματα και να κάνουμε τις ίδιες μαθηματικές πράξεις σαν να είχαμε αριθμούς. Οι θετικές επιστήμες με τις αναζητήσεις τους δημιούργησαν τους τύπους, δηλαδή ισότητες, που αποτελούνται από γράμματα και αριθμούς. Απλούστερα δημιούργησαν εξισώσεις, με περισσότερες από μία μεταβλητές και ο μαθητής αντιμετωπίζει σχετικές δυσκολίες για την επίλυσή τους.

## Β. Αριθμητικό μοντέλο για την επίλυση τύπου

Το αριθμητικό μοντέλο, λόγω της μεγαλύτερης επαφής με τους αριθμούς, θα αφυπνίσει τους μαθητές από την αμηχανία, λόγω των πολλών γραμμάτων μεταβλητών σε μια ισότητα. Η μεθόδευση που θα ακολουθήσουμε περιγράφεται όπως παρακάτω.

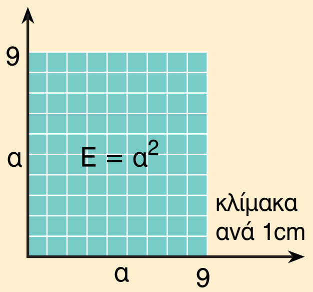
### Βήμα 1ο

**Πώς προκύπτουν ισότητες με γράμματα:**

Πρέπει να δίνεται η δυνατότητα να ανακαλυφθεί ο τύπος από το μαθητή.

Οι **γεωμετρικές κατασκευές**, αποτελούν μια καθημερινή εμπειρία, όσον αφορά στη χρήση τύπων με γράμματα για τον υπολογισμό του εμβαδού τους.

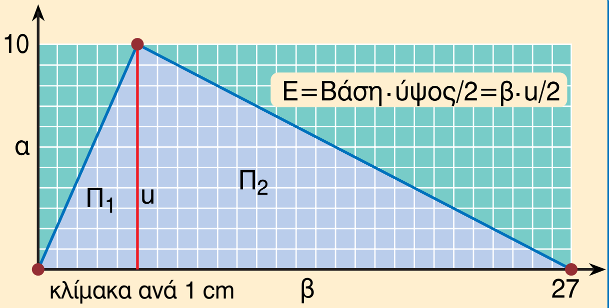
Το τετράγωνο αφού το σχεδιάσουμε γνωρίζοντας ότι το εμβαδό αποτελείται από μικρά τετράγωνα 1 $cm^2$ το καθένα, μπορούμε να βρούμε την πλευρά του τετραγώνου $\alpha$. Το ίδιο κάνουμε και για το τρίγωνο, το εμβαδό του οποίου είναι το μισό του παραλληλογράμμου $\Pi_1$ και $\Pi_2$, καταλήγοντας στους τύπους που αναγράφονται στα σχήματα




$\alpha \cdot \alpha = 81 \text{ cm}^2$

$\alpha^2 = 81 \text{ cm}^2$

$\alpha = 9 \text{ cm}$




$$\Pi_1 = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}^2 \text{ και } \Pi_2 = \frac{220}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

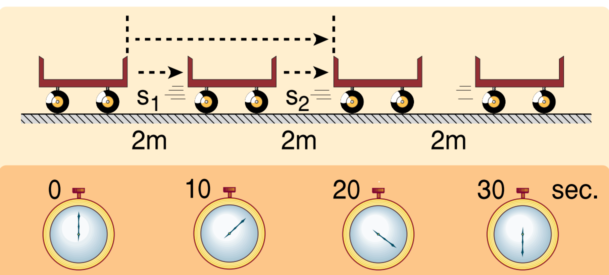
$$\Pi_1 + \Pi_2 = 135 \text{ cm}^2$$

$$E = 27 \cdot \frac{10}{2} = 135 \text{ cm}^2$$

$$E = B \cdot \frac{u}{2}$$

**Το πείραμα** δημιουργεί ισότητες με γράμματα και ο μαθητής με την ερευνητική του διάθεση μπορεί να ανακαλύψει κάποια σχέση μεταξύ μεγεθών για κάποια συγκεκριμένα είδη κίνησης. Το παρακάτω παράδειγμα αναφέρεται στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Σε συγκεκριμένες θέσεις τοποθετούνται χρονόμετρα, σημειώνονται οι ενδείξεις και κάνουμε τις παρακάτω σκέψεις:

### 1. Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση




Αφού κάνουμε το παραπάνω πείραμα και διαιρέσουμε το διάστημα με το χρόνο βλέπουμε ότι είναι σταθερό.

$$\frac{S}{t} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30} = 0{,}2 \text{ m/sec}$$

Γενικότερα:

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(S_2 - S_1)}{(t_2 - t_1)} = \text{σταθερό.}$$

Προκύπτει έτσι ο νόμος της ταχύτητας

$$U = \frac{S}{t}$$

### Βήμα 2ο

Αφού γράψουμε την ισότητα του προβλήματός μας, γράφουμε, παράλληλα, το αντίστοιχο αριθμητικό ανάλογο αφού εντοπίσουμε με κύκλο τον άγνωστο του προβλήματος. Βέβαια τις τιμές τις παίρνουμε από το πείραμα και μας είναι γνωστά τα αποτελέσματα.

**$u = \frac{s}{t}$ (επίλυση ως προς t)**

| Αριθμητικό ανάλογο | Τύπος |
|---|---|
| $0{,}2 = \frac{6}{\chi}$ | $u = \frac{s}{t}$ |
| $\chi \cdot 0{,}2 = \frac{6}{\chi} \cdot \chi$ | $u \cdot t = \frac{s}{t} \cdot t$ |
| $\chi \cdot 0{,}2 = 6$ | $u \cdot t = s$ |
| $\chi = \frac{6}{0{,}2}$ | $t = \frac{s}{u}$ |
| $\chi = 30$ | |

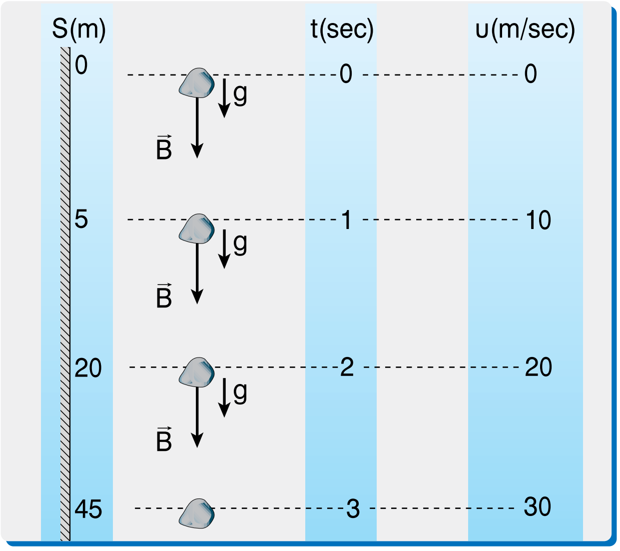
**$u = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t}$ (επίλυση ως προς $s_2$)**

| Αριθμητικό ανάλογο | Τύπος |
|---|---|
| $0{,}2 = \frac{X-4}{10}$ | $u = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t}$ |
| $0{,}2 \cdot 10 = \frac{X-4}{10} \cdot 10$ | $u \cdot \Delta t = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} \cdot \Delta t$ |
| $2 = X-4$ | $u \cdot \Delta t = s_2 - s_1$ |
| $2+4 = X$ | $s_2 = s_1 + u \cdot \Delta t$ |
| $X = 6$ | |

## 2. Ελεύθερη πτώση

Δίνουμε τη δυνατότητα, στηριζόμενοι στη διαίσθηση του μαθητή, να ανακαλύψει τη σχέση μεταξύ των μεγεθών από τις πειραματικές τιμές που δίνονται στο εικονικό πείραμα. Γνωρίζοντας από το προηγούμενο παράδειγμα ότι για τον υπολογισμό του διαστήματος, λαμβάνεται υπόψη η ταχύτητα και ο χρόνος, μας αρκεί να υπολογίσουμε τους αριθμητικούς συντελεστές. Αυτό μπορεί να γίνει μετά από αριθμητικούς υπολογι-

σμούς, εντοπίζοντας έτσι το συντελεστή $\frac{1}{2}$ και τη δύναμη του t στο τετράγωνο.




Δίνεται:

g = επιτάχυνση = 10 m/sec$^2$.

h α u·t

h α g·t·t

h α ; g t$^2$

Βρίσκουμε το συντελεστή με αριθμητικούς υπολογισμούς.

| $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ **(επίλυση ως προς t)** | |
|---|---|
| Αριθμητικό ανάλογο | Τύπος |
| $45 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$ | $h = \frac{1}{2} \cdot gt^2$ |
| $2 \cdot 45 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$ | $2 \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ |
| $t^2 = 2 \cdot \frac{45}{10}$ | $t^2 = \frac{2\ h}{g}$ |
| $t = 3$ | $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ |

Το ίδιο μπορεί να επαναληφθεί με όλες τις πειραματικές τιμές και να βρούμε σύμφωνα αποτελέσματα.

## Γ. Ανακεφαλαιωτικά συμπεράσματα

### Πράξεις

Η διδασκαλία γίνεται πρώτα με τους αριθμούς και στη συνέχεια με τα γράμματα.

Παραθέτουμε τα παρακάτω αριθμητικά παραδείγματα: 2+6 = 8, 6+2 = 8, και στη συνέχεια μπορούμε να γενικεύσουμε α+β, **μας δίνει αποτέλεσμα το ίδιο το σύμβολο**. Δηλαδή α+β = β+α το οποίο το ονομάζουμε γ. Έτσι α+β = γ.

Στο αριθμητικό ανάλογο παρατηρούμε ότι έχουμε αποτέλεσμα αριθμό ενώ στη δεύτερη περίπτωση το αποτέλεσμα εκφράζεται με γράμματα. Ομοίως συμβαίνει με όλες τις πράξεις μεταξύ των αριθμών όσο και μεταξύ των γραμμάτων. Εδώ βέβαια μπορούμε να επισημάνουμε κάποια σχόλια για την τέλεση των πράξεων.

### Σχόλια

1. (δ+β·α)\α δεν γίνεται διαγραφή του α του αριθμητή με το α του παρονομαστή.
2. α·(β+γ) = α·β+α·γ
3. Τα γράμματα α, β, γ, δ και τα τελευταία της αλφαβήτου χ, ψ, ω, ζ μπορούν να αποτελέσουν τους αγνώστους μιας εξίσωσης.
4. Να τονιστεί ιδιαίτερα η εύρεση Ε.Κ.Π. εξισώσεων με γράμματα στους παρονομαστές.
$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
5. Η δύναμη ενός αριθμού είναι $α^ν = α \cdot α \cdot α \cdot ... ν$ παράγοντες νΕΝ.
6. Οι δείκτες στα γράμματα μπαίνουν για να τα διακρίνουν μεταξύ τους $R_0$, $R_1$, $R_2$.
7. Η εύρεση των ριζών της εξίσωσης $χ^2 = α$.

Όλα τα παραπάνω πρέπει να συνοδεύονται από τον διδάσκοντα με τα αντίστοιχα **αριθμητικά παραδείγματα** για να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές.

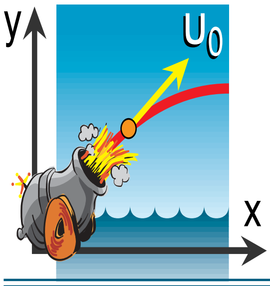
Εάν πρόκειται για κλασματικούς αριθμούς έχουμε:

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{6} = 2 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{6+3 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{12}{24} + \frac{12}{24} =$$

$$= \frac{12+12}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

$$\frac{2}{α} + \frac{3}{β} = 2 \cdot \frac{β}{2} \cdot \frac{β+3 \cdot α}{β \cdot α} = \frac{2 \cdot β+3 \cdot α}{α \cdot β}$$

Στη συνέχεια αφού δημιουργηθούν οι ισότητες με γνωστά-άγνωστα θέλουμε να επιχειρήσουμε και τη λύση τους. Με δεδομένη την ισοδυναμία των γραμμάτων και των αριθμών, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απλούστευση των ισοτήτων, και θεωρώντας, κάποια μεταβλητή, σαν άγνωστο να βρούμε τη γενική λύση, που θα αποτελείται από γράμματα.



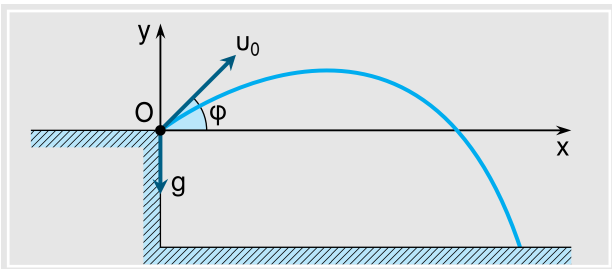

# ΧΡΗΣΕΙΣ της ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

**Για τη Β Λυκείου (Κατεύθυνσης) και τη Γ Λυκείου (1η, 2η δέσμη)**

Του **Δ. Λιακόπουλου**, Φυσικού

Η πιο αδικημένη ίσως εξίσωση κατά την επίλυση ασκήσεων βολών είναι η εξίσωση τροχιάς (Ε.Τ.). Ας δούμε στη γενική της μορφή ποια είναι και σε τι χρησιμεύει αφού συνήθως δίνει λύση σε ερωτήματα δύσκολα όπου οι «χρονικές» εξισώσεις στην απλή τους μορφή αδυνατούν να ανταποκριθούν.

## Α. Ποια είναι η εξίσωση τροχιάς




$$x \left\| \begin{array}{l} x = \upsilon_0 συνφt \ (1) \\ \upsilon_x = \upsilon_0 συνφ = σταθ. \end{array} \right. \qquad y \left\| \begin{array}{l} y = \upsilon_0 ημφt - \frac{1}{2} gt^2 \ (2) \\ \upsilon_y = \upsilon_0 ημφ - gt \end{array} \right.$$

Με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{1}{συν^2φ} = 1 + εφ^2φ$ έχουμε:

$$y = x\, εφφ - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}(1+εφ^2φ)$$

Αυτή είναι η εξίσωση τροχιάς (Ε.Τ.) για τη συγκεκριμένη (αλλά και πιο συνηθισμένη) βολή του σχήματος.

Κάθε βολή έχει τη δική της εξίσωση τροχιάς που προκύπτει όμως πάντα με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των εξισώσεων της απομάκρυνσης κατά $x$ και κατά $y$ από την αρχή $O$ των αξόνων.

## Β. Χρήσεις της εξίσωσης τροχιάς

### 1η χρήση

Υπολογίζουμε κάποιον από τους όρους που περιέχονται σ' αυτήν όταν γνωρίζουμε τους υπόλοιπους.

### 2η χρήση

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο θέσεων από τις οποίες περνάει το κινητό τότε παίρνουμε δύο φορές την εξίσωση τροχιάς και σχηματίζουμε το σύστημα δύο εξισώσεων από όπου βέβαια μπορούμε να υπολογίσουμε δύο αγνώστους, π.χ. το $\upsilon_0$ και την $εφφ$.

### 3η χρήση

Υπολογισμός του $x_{max}$.

Μπορούμε να «στήσουμε» την εξίσωση ως προς τις δυνάμεις της $εφφ$ και έτσι να έχουμε μία εξίσωση β βαθμού ως προς την $εφφ$. Τότε, για δεδομένο $y$:

$$y = x\, εφφ - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}(1+εφ^2φ)$$

$$2\upsilon_0^2 y = x\, εφφ \cdot 2\upsilon_0^2 - gx^2(1+εφ^2φ)$$

$$2\upsilon_0^2 y = 2\upsilon_0^2 x\, εφφ - gx^2 - gx^2 εφ^2φ$$

$$(gx^2)εφ^2φ - (2\upsilon_0^2 x)εφφ + (2\upsilon_0^2 y + gx^2) = 0 \qquad (2)$$

Για πραγματικές ρίζες η διακρίνουσα πρέπει να είναι $Δ \geq 0$:

$$4\upsilon_0^4 x^2 - 4gx^2(2\upsilon_0^2 y + gx^2) \geq 0$$

$$\upsilon_0^4 - g \cdot 2\upsilon_0^2 y - g^2x^2 \geq 0$$

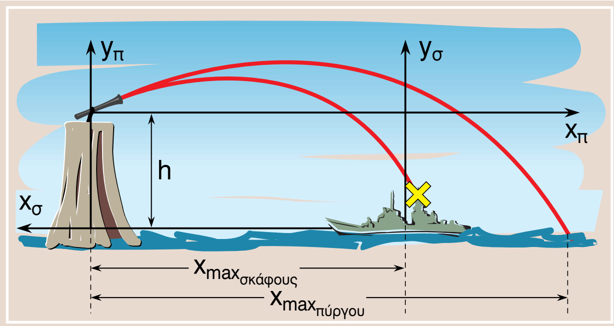
$$x \leq \sqrt{\frac{\upsilon_0^4 - 2\upsilon_0^2 g \cdot y}{g^2}} \qquad x \leq \frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}$$

άρα $x_{max} = \frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}$

Έτσι βρήκαμε το $x_{max}$ για δεδομένη τιμή του $y$.
Η (2) τότε μας δίνει την τιμή της $εφφ$ για την οποία θα πετύχουμε το $x_{max}$.
Για $y=0$ (βεληνεκές), προκύπτει $φ=45°$.

**Παράδειγμα**

Κάπου στο νότιο Ινδικό ωκεανό βρίσκεται ένας οχυρός πύργος ύψους $h$ με μόνο ευάλωτο σημείο την κορυφή του όπου βρίσκεται ένα οπλικό σύστημα που μπορεί να βάλει βλήματα προς κάθε κατεύθυνση με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$. Ένα ταχύπλοο εχθρικό σκάφος τον πλησιάζει από άγνωστη κατεύθυνση φέρνοντας πανομοιότυπο οπλικό σύστημα. Βρείτε τη θαλάσσια περιοχή στην οποία ο διοικητής του πύργου πρέπει να κατατρέψει το σκάφος για να μη κινδυνεύσει από αυτό.




Θα βρούμε το $x_{max}$ του πύργου για τη δεδομένη ταχύτητα βολής $υ_0$ και έπειτα το $x_{max}$ του σκάφους. Για την κάθε βολή δεδομένο είναι το y. Για τον πύργο $y=-h$ και για το σκάφος $y=+h$.

Αφού αποδείξουμε τη σχέση $x_{max} = \frac{υ_0}{g}\sqrt{υ_0^2-2gy}$ της μεθοδολογίας, έχουμε:

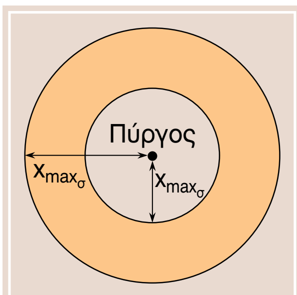
$$x_{max\,\pi} = \frac{υ_0}{g}\sqrt{υ_0^2-2g(-h)} = \frac{υ_0}{g}\sqrt{υ_0^2+2gh}$$

και

$$x_{max\,\sigma} = \frac{υ_0}{g}\sqrt{υ_0^2-2g(+h)} = \frac{υ_0}{g}\sqrt{υ_0^2-2gh}$$

άρα $x_{max\,\pi} > x_{max\,\sigma}$.

Έτσι ο πύργος μπορεί και πρέπει να χτυπήσει το σκάφος σε ένα δακτύλιο που έχει κέντρο τον πύργο και ορίζεται από δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες $x_{max\,\pi}$ και $x_{max\,\sigma}$.




## 4η χρήση

**Έξοδος από τον πυκνωτή ή πρόσκρουση στους οπλισμούς;**

Το θέμα αυτό βασάνισε (και βασανίζει) πολλούς.

Ας δούμε δύο συνηθισμένα **λάθη** που γίνονται κατά τη μελέτη της εξόδου ή μη ενός φορτίου από ένα πυκνωτή.

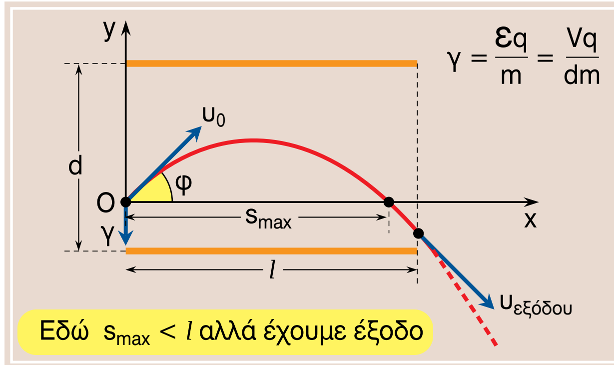
### 1ο λάθος

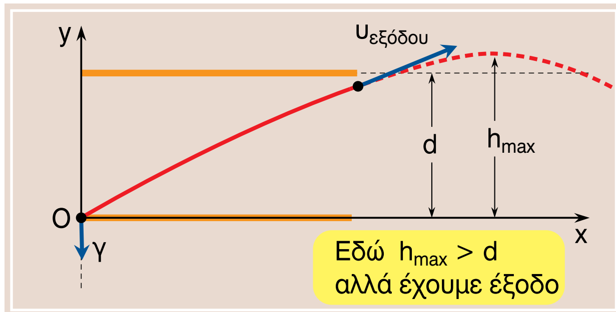
Προσπάθεια προσέγγισης του προβλήματος με τη βοήθεια των τύπων του μεγίστου ύψους και του βεληνεκούς.

Έστω ένας πυκνωτής έχει μήκος οπλισμών $l$, απόσταση d και διαφορά δυναμικού V.

Το γενικό σκεπτικό της επισφαλούς αυτής μεθόδου είναι ότι για να έχουμε έξοδο πρέπει:

$$S_{max} = \frac{υ_0^2\,ημ2φ}{γ} \geq l \quad \text{και} \quad h_{max} = \frac{υ_0^2\,ημ^2φ}{2γ} \leq d$$



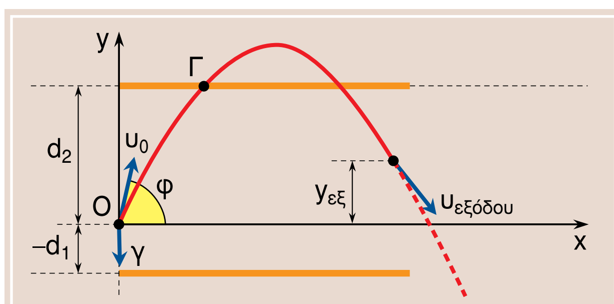

**Προσοχή:** Η παραβολική τροχιά σαν μαθηματική έννοια συνεχίζεται και έξω από τον πυκνωτή, άσχετα αν δεν την ακολουθεί το φορτίο.

### 2ο λάθος

Θέτουμε $x=l$ βρίσκουμε το χρόνο εξόδου (πράγμα σωστό) και με γνωστό το χρόνο εξόδου βρίσκουμε το $y_{εξόδου}$ από την εξίσωση (σε συνήθη μορφή)

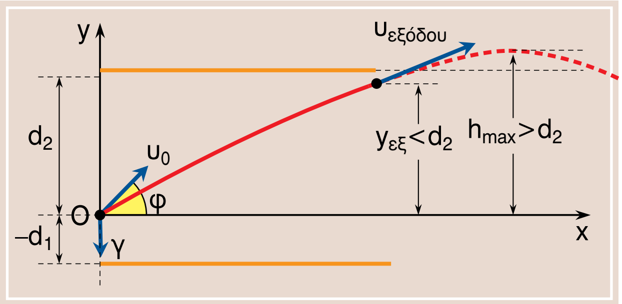
$$y = υ_0 ημφ t - \frac{1}{2}γt^2$$

(πράγμα επίσης σωστό). Έπειτα γίνεται το λάθος συγκρίνοντας το $y_{εξόδου}$ με τις οριακές θέσεις των πλακών στην έξοδο του πυκνωτή όπως στο σχήμα.




Μπορεί να ισχύει $-d_1 \leq y_{εξ} \leq d_2$ και να νομίζουμε ότι φορτίο βγαίνει, αλλά να έχει ήδη χτυπήσει στο Γ.

Θα πει κανείς γιατί να μην ελέγχω ταυτόχρονα και το $h_{max}$ με τον περιορισμό $h_{max} \leq d_2$. Το γιατί φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Ενώ το $h_{max}>d_2$ δεν χτυπάει όπως πριν στο Γ αλλά βγαίνει.

**ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ**

Έχουμε επομένως ανάγκη από μία μέθοδο που θα δίνει ΠΑΝΤΑ λύση χωρίς την ανάγκη διαρκούς εγρήγορσης και αυτενέργειας.

α. Αποδεικνύω την εξίσωση τροχιάς.

$$y = x\,εφφ - \frac{γx^2}{2υ_0^2}(1+εφ^2φ) \qquad (1)$$

β. **Έλεγχος της πάνω πλάκας**. Για βολή έστω υπό γωνία φ προς τα θετικά του άξονα yy , θέτω πρώτα $y=d_2$ και λύνω την (1) ως προς x. Έτσι θα δω για ποια τιμή του x γίνεται το $y=d_2$.

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

i) $Δ>0$. Έχω δύο τιμές $x_{min}$ και $x_{max}$ και ελέγχω την $x_{min}$. Αν:

$x_{min}<l$ χτυπάει πάνω

$x_{min}=l$ βγαίνει οριακά

$x_{min}>l$ βγαίνει άνετα.

ii) $Δ=0$. Για μία τιμή του x γίνεται το $y=d_2$. Αν:

$x<l$ απλά δε χτυπάει πάνω και πρέπει να ελέγξω την κάτω πλάκα

$x=l$ βγαίνει οριακά

$x>l$ βγαίνει άνετα.

iii) $Δ<0$. Για καμιά τιμή του x δε γίνεται $y=d_2$ και απλά δε χτυπάει πάνω και πρέπει να ελέγξω την κάτω πλάκα.

γ. **Έλεγχος της κάτω πλάκας**. Θέτω $y=-d_1$ στην (1) και λύνω ως προς x. Αν:

$x<l$ χτυπάει κάτω

$x=l$ βγαίνει οριακά

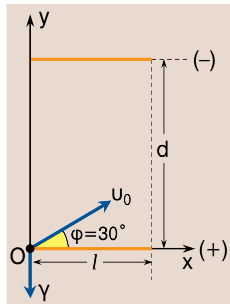
$x>l$ βγαίνει άνετα.

Σε όλες τις περιπτώσεις βρίσκω μέσα από αυτή τη διαδικασία και πού χτυπάει (εφόσον χτυπάει σε κάποια πλάκα).

Στην εφαρμογή της η μέθοδος δίνει συντομότατες λύσεις, αφού από όλες τις υποπεριπτώσεις μόνο μία συναντάμε κάθε φορά.

**Παράδειγμα**

Ηλεκτρόνιο βάλλεται με ταχύτητα $υ_0=2\cdot 10^7$ m/sec από την άκρη θετικής πλάκας πυκνωτή και με γωνία $φ=30^\circ$ ως προς την πλάκα. Η απόσταση των πλακών είναι $d=32$ cm και το μήκος τους $l=20$ cm. Η διαφορά δυναμικού τους είναι $V=1800$ Volts. Βρείτε αν το ηλεκτρόνιο βγαίνει από τον πυκνωτή ή όχι. Δίνονται: $m_e = 9\cdot 10^{-31}$ Kgr και $q_e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Cb.




Η εξίσωση της τροχιάς είναι

$$y = x\,εφ30^\circ - \frac{γ_{ηλ}x^2}{2υ_0^2}(1+εφ^2 30^\circ)$$

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\frac{ε\cdot q}{m}\cdot x^2}{2υ_0^2}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{Vqx^2}{2dmυ_0^2}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1800\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}x^2}{32\cdot 10^{-2}\cdot 9\cdot 10^{-31}\cdot 2\cdot 4\cdot 10^{14}}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2880\cdot 10^{-19}x^2}{2304\cdot 10^{-19}}\cdot\frac{4}{3} \qquad y = x\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{5}{3}\cdot x^2$$

$$3y = x\sqrt{3} - 5x^2 \qquad 5x^2 - x\sqrt{3} + 3y = 0 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι για $y=32\cdot 10^{-2}$ m είναι $Δ<0$, άρα δε χτυπάει πάνω. Βάζουμε τότε $y=0$ για να ελέγξουμε την κάτω πλάκα και

$$5x^2 - x\sqrt{3} = 0 \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0{,}34\text{ m} = 34\text{ cm} > 20\text{ cm}$$

άρα $x>l$, οπότε βγαίνει.

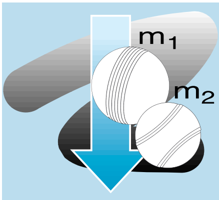
Το σημείο εξόδου θα είναι: για $x=l$ από την

$$(1) \qquad 5\cdot(20\cdot 10^{-2})^2 - 20\cdot 10^{-2}\cdot\sqrt{3} + 3y = 0$$

$$y = \frac{20\cdot 10^{-2}\sqrt{3} - 5\cdot 400\cdot 10^{-4}}{3}$$

$$y = \frac{2000\sqrt{3}\cdot 10^{-4} - 2000\cdot 10^{-4}}{3}$$

$$y = \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot 10^{-1}}{3} \qquad y = 0{,}048\text{ m} = 4{,}8\text{ cm}.$$



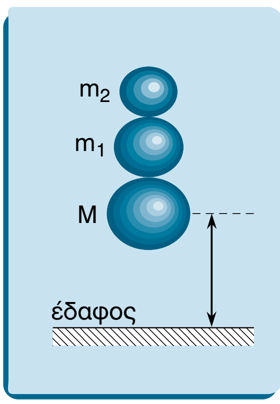

# ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ με ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΜΠΑΛΕΣ

Του **Μ. Λουβερδή,** Φυσικού

Παίρνουμε τρεις μπάλες τελείως ελαστικές. Η μία έχει μάζα $M$, η δεύτερη $m_1$ και η τρίτη $m_2$. Τοποθετούμε τη μία μπάλα επάνω στην άλλη διαδοχικά, έτσι ώστε προς τα κάτω να είναι η $M$, στη μέση η $m_1$, και επάνω η $m_2$. Τις αφήνουμε συγχρόνως να πέσουν από ύψος $h$. Το φαινόμενο που θα παρακολουθήσουμε μετά τις διαδοχικές τους κρούσεις (ύστερα από την κρούση της $M$ με το έδαφος) είναι εκπληκτικό· αρκεί για τη μάζα της κάθε μπάλας να ισχύει

$$M>>m_1>>m_2.$$

Το φαινόμενο δείχνει να μην υπακούει στον νόμο της αρχής διατήρησης της ενέργειας.




Η $M$ φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $\upsilon_1$,

Θ.Μ.Κ.Ε

$$E_{κτελ.}-E_{καρχ.}=\Sigma W_f$$

$$\frac{1}{2}\cancel{M}\upsilon^2=\cancel{M}gh$$

$$\upsilon_1=\sqrt{2gh}.$$

Όμοια, όλες οι μπάλες θα φτάσουν στο σημείο της κρούσης τους με ταχύτητες

$$\upsilon_2=\upsilon_3=\sqrt{2gh}.$$

Η $M$ κάνει τέλεια ελαστική κρούση με το έδαφος άρα ανακλάται με ταχύτητα $\upsilon_1=\sqrt{2gh}$. Έχει δηλαδή φορά προς τα πάνω.

Τη στιγμή εκείνη συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την $m_1$ που έχει ταχύτητα $\upsilon_2=\sqrt{2gh}$.

Από Α.Δ.Ο. ≈≠

$$M\vec{\upsilon}_1+m_1\vec{\upsilon}_2=M\vec{\upsilon}_1+m_1\vec{\upsilon}_2$$

και από Α.Δ.Κ.Ε.

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1{}^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2=\frac{1}{2}M\upsilon_1{}^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon_2{}^2$$

$$\upsilon_1=\frac{(M-m_1)\upsilon_1}{M+m_1}-\frac{2m_1\upsilon_2}{M+m_1}\qquad \upsilon_1\simeq\sqrt{2gh}\ \text{γιατί}\ M>>m_1$$

$$\upsilon_2=\frac{2M\upsilon_1}{M+m_1}+\frac{(M-m_1)\upsilon_2}{M+m_1}\qquad \upsilon_2\simeq 2\upsilon_1+\upsilon_2\simeq 3\sqrt{2gh}$$

Αμέσως μετά την πρώτη σύγκρουσή της με την $M$, η $m_1$ θα συγκρουστεί ελαστικά και με την $m_2$ που έχει ταχύτητα $\upsilon_3=2gh$ προς τα κάτω.

Από Α.Δ.Ο. ≈≠

$$m_1\vec{\upsilon}_2+m_2\vec{\upsilon}_3=m_1\vec{\upsilon}_2+m_2\vec{\upsilon}_3$$

και από Α.Δ.Κ.Ε.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_2{}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_3^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_2{}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_3{}^2$$

$$\upsilon_2=\frac{(m_1-m_1)\upsilon_2}{m_1+m_2}-\frac{2m_1\upsilon_3}{m_1+m_2}\qquad \upsilon_1\simeq\upsilon_2\ \text{γιατί}\ m_1>>m_2$$

$$\upsilon_3=\frac{2m_1\upsilon_2}{m_1+m_2}+\frac{(m_1-m_2)\upsilon_3}{m_1+m_2}\qquad \upsilon_3\simeq 2\upsilon_2+\upsilon_3\simeq 7\sqrt{2gh}$$

Έτσι, μετά από όλες τις διαδοχικές κρούσεις έχουμε όλες τις μπάλες να κινούνται προς τα πάνω και η καθεμιά με ταχύτητα.

Η $M$, $\upsilon_1=\sqrt{2gh}$

η $m_1$ $\upsilon_2=3\sqrt{2gh}$ και

η $m_2$ $\upsilon_3=7\sqrt{2gh}$

Άρα η M θα ανέβει σε ύψος Θ.Μ.Κ.Ε.

$$E_{κτελ.}-E_{καρχ.}=\Sigma W f-\frac{1}{2}\cancel{M}2gh=-\cancel{M}gH_1\qquad H_1\simeq h$$

περίπου το ίδιο με το αρχικό,

η $m_1$

$$-\frac{1}{2}m_1 9\cdot 2gh=-\frac{1}{2}m_1 gH_2\qquad H_2\simeq 9h$$

περίπου εννιαπλάσιο του αρχικού και

η $m_2$

$$-\frac{1}{2}m_2 49\cdot 2gh=-\frac{1}{2}m_2 gH_3\qquad H_3\simeq 49h$$

περίπου 49 φορές του αρχικού.

# ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΟΥ pH

## ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΛΥΜΑΤΩΝ ΑΣΘΕΝΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΛΥΤΩΝ

## *(ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΜΙΣΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ)*

Του **Π. Ιακώβου,** Χημικού

Είναι γνωστό ότι το pH υδατικών διαλυμάτων των ασθενών μονοπρωτικών οξέων (ανάλογα και των ασθενών μονόξινων βάσεων) μπορεί να υπολογιστεί μελετώντας την ιοντική ισορροπία του αντιστοίχου ηλεκτρολύτη.

Στις περιπτώσεις υδατικών διαλυμάτων που περιέχουν:

- Ασθενή μονοπρωτικά οξέα,
- Ασθενείς μονόξινες βάσεις,
- Πολυπρωτικά οξέα,
- Πολυόξινες βάσεις,
- Άλατα των οποίων υδρολύονται ένα από τα δύο ιόντα (μόνο το κατιόν ή μόνο το ανιόν),

μπορούμε να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά το pH ενός υδατικού διαλύματος, με τη βοήθεια του κανόνα της μισής μονάδας, χωρίς να χρειάζεται η μελέτη της ιοντικής ισορροπίας:

### Κανόνας της μισής μονάδας:

*Κάθε μεταβολή του γινομένου της σταθεράς ιονισμού επί την συγκέντρωση του ασθενούς ηλεκτρολύτη ($k \cdot C$) κατά ένα δέκατο ($10^{-1}$), προκαλεί μεταβολή του pH του διαλύματος προσεγγιστικά κατά μισή μονάδα (0,5) τείνοντας προς την τιμή pH=7.*

Έτσι αν είναι $k \cdot C = (10^{-1})^x$, x N, τότε το pH του διαλύματος:

α) Αυξάνεται κατά 0,5x αν στο διάλυμα υπάρχει οξύ και γίνεται $pH \approx 0 + 0{,}5x$.

β) Ελαττώνεται κατά 0,5x αν στο διάλυμα υπάρχει βάση και γίνεται $pH \approx 14 - 0{,}5x$.

Έτσι αν για ένα διάλυμα ασθενούς μονοπρωτικού οξέος είναι

$$k_a \cdot C = 10^{-1}, \text{ είναι } x = 1$$

και το pH του διαλύματος είναι ίσο με

$$pH = 0 + 0{,}5 \approx 0{,}5,$$

ενώ αν σ' ένα διάλυμα ασθενούς μονόξινης βάσης είναι

$$k_b \cdot C = 10^{-1},$$

το pH του διαλύματος είναι ίσο με

$$pH = 14 - 0{,}5 \approx 13{,}5.$$

### Παρατηρήσεις:

1) Η έννοια του «ασθενή ηλεκτρολύτη», στον παραπάνω κανόνα περιλαμβάνει:

   α) Τα ασθενή μονοπρωτικά οξέα όπως, $CH_3COOH$, HCN, $HNO_2$ κ.ά.

   β) Τις ασθενείς μονόξινες βάσεις όπως, $NH_3$, $RNH_2$, κ.ά.

   γ) Πολυπρωτικά οξέα, όπως $H_2S$, $H_2SO_3$, $H_3PO_4$, $H_3PO_3$ κ.ά., τα οποία θα θεωρούμε ως ασθενή μονοπρωτικά λαμβάνοντας υπόψη μόνο το πρώτο στάδιο ιονισμού, ($k = k_1$).

   δ) Άλατα που υδρολύεται μόνο το κατιόν τους, όπως $NH_4Cl$, $NH_4NO_3$ κ.ά., τα οποία θεωρούνται ως ασθενή μονοπρωτικά οξέα κατά Brönsted και Lowry με σταθερά ιονισμού ίση με την σταθερά υδρόλυσης, ($k = k_h$).

   ε) Άλατα που υδρολύεται μόνο το ανιόν τους, όπως $CH_3COONa$, NaCN, $NaNO_2$ κ.ά.., τα οποία θεωρούνται ως ασθενείς μονόξινες βάσεις κατά Brönsted και Lowry με σταθερά ιονισμού ίση με τη σταθερά υδρόλυσης, ($k = k_h$).

   στ) Άλατα που υδρολύονται μόνο τα ανιόντα τους σε περισσότερα στάδια όπως $Na_2S$, $NaPO_4$ κ.ά., τα οποία θα τα θεωρούμε ως πολυόξινες βάσεις κατά Brönsted και Lowry με σταθερά ιονισμού ίση με τη σταθερά υδρόλυσης του πρώτου σταδίου, ($k = k_{h1}$).

2) Αν το γινόμενο $k \cdot C$ δεν είναι ακριβώς ίσο με $(10^{-1})^x$, τότε ή το προσεγγίζουμε προς την πλησιέστερη τιμή ή παίρνουμε υπόψη και μια προσεγγιστική απόκλιση της τάξης του 0,3.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### Παράδειγμα 1ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος $CH_3COOH$ συγκέντρωσης C=0,1 M. Δίνεται η $k_a=10^{-5}$.

*Εκτίμηση:*

Είναι: $k_a \cdot C=10^{-6}=(10^{-1})^6$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(6)=3. Άρα επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι οξύ θα είναι:

$$pH \approx 0+3 \qquad \mathbf{pH \approx 3}.$$

### Παράδειγμα 2ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος $NH_3$ συγκέντρωσης C=0,1 M. Δίνεται η $k_b=10^{-5}$.

*Εκτίμηση:*

Είναι: $k_b \cdot C=10^{-6}=(10^{-1})^6$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(6)=3. Άρα επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι βάση θα είναι:

$$pH \approx 14-3 \qquad \mathbf{pH \approx 11}.$$

### Παράδειγμα 3ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος ασθενούς μονοπρωτικού οξέος συγκέντρωσης $C=10^{-3}$ M. Δίνεται η $k_a=10^{-5}$.

*Εκτίμηση:*

Είναι: $k_a \cdot C=10^{-8}=(10^{-1})^8$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(8)=4. Άρα επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι οξύ θα είναι:

$$pH \approx 0+4 \qquad \mathbf{pH \approx 4}.$$

### Παράδειγμα 4ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος HCN συγκέντρωσης C=0,25 M. Δίνεται η $k_a=4 \cdot 10^{-10}$.

*Εκτίμηση:*

Είναι: $k_a \cdot C=10^{-10}=(10^{-1})^{10}$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(10)=5. Άρα επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι οξύ θα είναι:

$$pH \approx 0+5 \qquad \mathbf{pH \approx 5}.$$

### Παράδειγμα 5ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος ασθενούς μονόξινης βάσης συγκέντρωσης $C=10^{-5}$ M. Δίνεται η $k_b=10^{-3}$.

*Εκτίμηση:*

Είναι: $k_b \cdot C=10^{-8}=(10^{-1})^8$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(8)=4. Άρα επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι βάση θα είναι:

$$pH \approx 14-4 \qquad \mathbf{pH \approx 10}.$$

### Παράδειγμα 6ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος $NH_4Cl$ συγκέντρωσης C=0,1 M. Δίνεται για την αμμωνία η $k_b=10^{-5}$ και $k_w=10^{-14}$.

*Εκτίμηση:*

Το κατιόν $NH_4^+$ είναι οξύ κατά Brönsted και Lowry. Έτσι είναι:

$$k_h = \frac{k_w}{k_b} = 10^{-9}.$$

Άρα έχουμε: $k_h \cdot C=10^{-10}=(10^{-1})^{10}$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(10)=5. Επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι οξύ θα είναι:

$$pH \approx 0+5 \qquad \mathbf{pH \approx 5}.$$

### Παράδειγμα 7ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος $CH_3COONa$ συγκέντρωσης C=0,1 M. Δίνεται για το οξικό οξύ η $k_a=10^{-5}$ και $k_w=10^{-14}$.

*Εκτίμηση:*

Το ανιόν $CH_3COO^-$ είναι βάση κατά Brönsted και Lowry. Έτσι είναι:

$$k_h = \frac{k_w}{k_a} = 10^{-9}.$$

Άρα έχουμε: $k_h \cdot C=10^{-10}=(10^{-1})^{10}$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(10)=5. Επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι βάση θα είναι: $pH \approx 14-5 \qquad \mathbf{pH \approx 9}$.

### Παράδειγμα 8ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος $H_2S$ συγκέντρωσης C=0,1 M. Δίνεται $k_1=10^{-7}$, $k_2=10^{-14}$.

*Εκτίμηση:*

Παίρνουμε υπόψη μόνο το πρώτο στάδιο ιονισμού, (το δεύτερο έχει αμελητέα συνεισφορά σε ιόντα $H^+$). Είναι: $K_1 \cdot C=10^{-8}=(10^{-1})^8$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(8)=4. Άρα επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι οξύ θα είναι:

$$pH \approx 0+4 \qquad \mathbf{pH \approx 4}.$$

### Παράδειγμα 9ο

Εκτιμείστε το pH υδατικού διαλύματος $Na_3PO_4$ συγκέντρωσης C=0,1 M. Δίνεται για το φωσφορικό οξύ η $k_1=5,9 \cdot 10^{-3}$, $k_2=6 \cdot 10^{-8}$, $k_3=5 \cdot 10^{-13}$ και $k_w=10^{-14}$.

*Εκτίμηση:*

Το ανιόν $PO_4^{-3}$ είναι πολυόξινη βάση κατά Brönsted και Lowry. Παίρνουμε υπόψη μόνο το πρώτο στάδιο υδρόλυσης. Έτσι είναι:

$$k_{h1} = \frac{k_w}{k_3} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

Άρα έχουμε: $k_{h1} \cdot C=2 \cdot 10^{-3}=2 \cdot (10^{-1})^3 \approx (10^{-1})^3$. Δηλαδή η μεταβολή του pH είναι 0,5·(3)=1,5. Επειδή ο ηλεκτρολύτης είναι βάση θα είναι:

$$pH \approx 14-1,5 \qquad \mathbf{pH \approx 12,5}.$$

# ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΣΥΝΘΕΣΗ ΥΔΡΟΓΟΝΑΣΝΘΡΑΚΩΝ

Του **Δ. Δερπάνη,** Χημικού

## Α) Ταυτοποίηση υδρογονανθράκων

**Ταυτοποίηση** είναι η εύρεση Σ.Τ. μιας οργανικής ενώσεως και αυτή γίνεται στηριζόμενοι σε κάποια χαρακτηριστική φυσική ή χημική ιδιότητα ή και μαζί.

Οι πιο χαρακτηριστικές φυσικές και χημικές ιδιότητες των υδρ/κων είναι:

**i)** Όταν ένας υδρ/κας εμφανίζει γεωμετρική ισομέρεια, αυτό δείχνει ότι είναι ακόρεστος με ένα ή περισσότερους δ.δ. (φυσική ιδιότητα).

**ii)** Όταν ένας υδρ/κας εμφανίζει οπτική ισομέρεια, αυτό δείχνει ότι ο υδρ/κας περιέχει στο μόριό του τουλάχιστο 1 $\overset{*}{C}$ (φυσική ιδιότητα).

**iii)** Όταν ένας υδρ/κας αποχρωματίζει διάλυμα $Br_2$ σε $CCl_4$ (κόκκινο), αυτό δείχνει ότι είναι ακόρεστος με ένα ή περισσότερους δ.δ. (χημική ιδιότητα).

**Παρατήρηση:** Ανάλογα με την ποσότητα του $Br_2$ ή του $H_2$ που αντιδρά, μπορεί να γίνει και ποσοτικός προσδιορισμός των δ.δ., αρκεί να γνωρίζουμε ότι: για 1 mol ολεφίνης χρειάζεται 1 mol $Br_2$ ή 1 mol $H_2$, ενώ για 1 mol αλκαδιενίου χρειάζονται 2 mol $Br_2$ ή 2 mol $H_2$ και γενικά για 1 mol ακόρεστου υδρ/κα με ω δ.δ χρειάζονται ω mol $Br_2$ ή ω mol $H_2$ ή συνολικά ω mol $Br_2$ και $H_2$. Το ίδιο συμβαίνει και με τον τ.δ., δηλαδή 1 mol αλκινίου αντιδρά πλήρως με 2 mol $H_2$.

**iv)** Όταν ένας αέριος υδρ/κας συγκρατείται από πυκνό διάλυμα $H_2SO_4$, τότε ο υδρ/κας είναι αλκένιο (χημ. ιδ.).

**v)** Όταν ένας υδρ/κας αντιδρά με Na ή K και εκλύεται $H_2$, τότε είναι αλκίνιο που έχει τον τ.δ. στην άκρη, δηλαδή του γ.τ. R–CKCH (χημ. ιδ).

**vi)** Όλα τα αλκίνια, όταν αντιδρούν με $H_2O$ ή HXO, δίνουν τις αντίστοιχες κετόνες εκτός από το ακετυλένιο που δίνει ακεταλδεΰδη ή παράγωγο αυτής (χημ. ιδ).

**vii)** Όταν ένας υδρ/κας *δεν* αντιδρά με Na ή K, ούτε με HCl, τότε είναι αλκάνιο (χημ. ιδ).

**viii)** Όταν ένας υδρ/κας δίνει την 1,4-προσθήκη ή δίνει διενική σύνθεση, τότε είναι *συζυγές αλκαδιένιο* (χημ. ιδ.).

## Β) Μετατροπή των δ.δ σε τ.δ

Γίνεται με την προσθήκη αλογόνου στην ακόρεστη έωνση με 1 δ.δ και στη συνέχεια, επίδραση με NaOH ή KOH, οπότε προκύπτει τ.δ.

## Γ) Μετακίνηση αλογόνου από το ακραίο άτομο C ανθρακικής αλυσίδας σε ενδιάμεσο άτομο C αυτής.

Αυτή γίνεται με την επίδραση NaOH στο αλκυλαλογονίδιο, οπότε προκύπτει ακόρεστη οργανική ένωση και στη συνέχεια προσθέτουμε HX σύμφωνα με τον κανόνα Markonikow π.χ.

$$CH_3-CH_2-CH_2Cl + NaOH \longrightarrow CH_3-CH=CH_2 + NaCl + H_2O$$

$$CH_3-CH=CH_2 + HCl \longrightarrow CH_3-\underset{\substack{| \\ Cl}}{CH}-CH_3$$

## Δ) Μετακίνηση αλογόνου από ενδιάμεσο άτομο C ανθρακικής αλυσίδας σε ακραίο άτομο C αυτής.

Αυτή γίνεται με την επίδραση NaOH στο αλκυλαλογονίδιο, οπότε αποβάλλεται HX και προκύπτει ακόρεστη οργανική ένωση.

**Παρατήρηση:** Το HX που αποβάλλεται είναι συνήθως (περίπου 80%) εκείνο, που προέρχεται από το αλογόνο και το H του **γειτονικού ατόμου C** που είναι **φτωχότερο** σε υδρογόνα.

Στη συνέχεια ακολουθούμε δύο τρόπους:

**1ος τρόπος:** Στην ακόρεστη ένωση (αλκένιο) επιδρούμε με αλογόνο ($ClI_2$) σε υψηλή θερμοκρασία, οπότε το αλογόνο αντικαθιστά υδρογόνο α-θέσεως ως προς το δ.δ

$$CH_3-CH_2-\underset{\substack{| \\ Cl}}{CH}-CH_3 + NaOH \longrightarrow \overset{\alpha}{C}H_3-CH=CH-\overset{\alpha}{C}H_3 + NaOH + H_2O$$

$$CH_3-CH=CH-CH_3 + Cl_2 \xrightarrow[\text{θερμοκρασία}]{\text{υψηλή}} CH_3-CH=CH-\underset{\substack{| \\ Cl}}{CH_2} + HCl$$

**Παρατήρηση:** Υδρογόνα α-θέσεως τα H που είναι ενωμένα με άνθρακα α-θέσεως. Άνθρακας α-θέσεως είναι ο C που είναι ενωμένος με κύρια χαρακτηριστική ομάδα ή με C που συμμετέχει σε δ.δ ή τ.δ π.χ.

$$\overset{\omega}{C}H_3-\overset{\gamma}{C}H_2-\overset{\beta}{C}H_2-\overset{\alpha}{C}H_2-COOH$$

$$\overset{\beta}{C}H_3-\overset{\alpha}{C}H_2-\overset{\beta}{C}H_2=CH-\overset{\alpha}{C}H_2-\overset{\beta}{C}H_3$$

**2ος τρόπος:** Στην ακόρεστη ένωση (αλκένιο) προσθέτουμε υποαλογονώδες οξύ (HXO) σύμφωνα με τον κανόνα του Markonikow

$$CH_3-\underset{\underset{Cl}{|}}{CH}-CH_3+NaOH\longrightarrow CH_3-CH=CH_2+NaCl+H_2O$$

$$CH_3-CH=CH_2+\overset{(+)}{Cl}-\overset{(-)}{OH}\longrightarrow CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-\underset{\underset{Cl}{|}}{CH_2}$$

## Ε) Τρόπος παρασκευής υδρ/κων από το ακετυλένιο

**i)** ’Οταν ο υδρ/κας που θέλουμε να παρασκευάσουμε είναι συμμετρικός και τα δύο κομμάτια (συμμετρικά) είναι με 2C ή με 4C, *τότε συμφέρει* να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Wurtz, παρασκευάζοντας πρώτα τα αντίστοιχα αλκυλαλογονίδια με 2C ή 4C από HC∫ CH.

**ii)** Όταν ο υδρ/κας δεν είναι συμμετρικός ή συμμετρικός με κομμάτια που περιέχουν περιττό αριθμό ατόμων C, τότε κόβουμε κατάλληλα ένα κομμάτι του υδρ/κα που να είναι το HC∫ CH και το υπόλοιπο κομμάτι ή τα υπόλοιπα δύο κομμάτια να έχουν 2C ή 4C. Π.χ.

Έστω ότι ζητάμε να παρασκευάσουμε n-εξάνιο από $CaC_2$. Την αλυσίδα του n-εξανίου (C–C–C–C–C–C) μπορούμε να την κόψουμε σε δύο κομμάτια, δηλαδή το πρώτο HC∫ CH και το δεύτερο με 4C, οπότε χρειάζεται να παρασκευάσουμε τη $\underset{\underset{OH}{|}}{C}-C-C-C$ .

Το HC∫ CH αντιδρά με τη $\underset{\underset{OH}{|}}{C}-C-C-C$ οπότε παράγεται το C∫ C–C–C–C–C και αυτό με $H^2$, ή κόβουμε την αλυσίδα του n-εξανίου (C–C–C–C–C–C) σε τρία κομμάτια, δηλαδή HC∫ CH στη μέση και αριστερά και δεξιά κομμάτια με 2C, οπότε χρειάζεται να παρασκευάσουμε την $\underset{\underset{OH}{|}}{C}-C$ .

Το HC∫ CH αντιδρά με 2 μόρια $C-\underset{\underset{OH}{|}}{C}$ οπότε προκύπτει το C–C–C∫ C–C–Cκαι αυτό με $H_2$.

***Παράδειγμα***

Υδρ/κας του Μ.Τ. $C_6H_{10}$ έχει τις εξής χαρακτηριστικές ιδιότητες:

i) αντιδρά με Na και εκλύεται $H_2$.

ii) εμφανίζει οπτική ισομέρεια.

Να βρεθούν: α) ο Σ.Τ. (ταυτοποίηση)

β) να παρασκευασθεί ξεκινώντας από $CaC_2$.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Ο υδρ/κας $C_6H_{10}$ ανήκει στο γ.τ. $C\nu H_{2\nu-2}$ , δηλαδή αλκίνια ή αλκαδιένια.

**i)** Επειδή αντιδρά με Na και εκλύεται $H_2$, άρα είναι αλκίνιο με τον τ.δ στην άκρη, δηλαδή του γ.τ. R–CKCH, συνεπώς οι δυνατοί Σ.Τ. είναι:

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-C\equiv CH$$

$$\text{ή}\quad CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-C\equiv CH$$

$$CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-C\equiv CH$$

$$\text{ή}\quad CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}-C\equiv CH$$

**ii)** Επειδή εμφανίζει οπτική ισομέρεια, αυτό δείχνει ότι περιέχει στο μόριό του 1 $\overset{*}{C}$ συνεπώς ο μόνος Σ.Τ. είναι:

$$\boxed{CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{*}{C}H}-C\equiv CH}$$

3–μεθυλο–πεντίνιο–1

**β)** Για να τον παρασκευάσουμε από $CaC_2$, παρατηρούμε ότι αποτελείται από 2 κομμάτια, δηλαδή το 1 κομμάτι είναι το HC∫ CH και το άλλο κομμάτι με 4C, συνεπώς θα παρασκευάσουμε το

$$HC\equiv CH \quad \text{και την} \quad CH_3-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-C\equiv CH_3$$

Οι αντίστοιχες χημικές εξισώσεις, είναι:

$$CaC_2+2H_2O\longrightarrow Ca(OH)_2+HC\equiv CH$$

$$2HC\equiv CH\xrightarrow[NH_4Cl]{CuCl}CH_2=CH-C\equiv CH\xrightarrow{H_2}$$

$$CH_2=CH-CH=CH_2\xrightarrow{H_2}$$

$$CH_3-CH=CH-CH_3\xrightarrow{H_2O}$$

$$CH_3-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3\xrightarrow[-H_2O]{HC\equiv CH}$$

$$\boxed{CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-C\equiv CH}$$

# ΜΕΓΑΛΟΙ ΧΗΜΙΚΟΙ

## JOHANNES BRÖNSTED (1879 - 1947)

### (Από το βιβλίο του Α. Βάρβογλη: «Μεγάλοι Χημικοί - Η χρυσή εποχή», Εκδόσεις ΖΗΤΗ

Ο Brönsted γεννήθηκε στο Varde, μια μικρή πόλη της Δυτικής Γιουτλάνδης, από πατέρα πολιτικό μηχανικό. Η μητέρα του πέθανε όταν ήταν ακόμη μωρό, αλλά ο πατέρας του ξαναπαντρεύθηκε σύντομα. Η οικογένεια εγκαταστάθηκε σε μια φάρμα, απ' όπου ο μικρός γνώρισε και αγάπησε τη φύση. Όταν έγινε 12 ετών, μετακόμισαν στο Aarhus. Εκεί ο νεαρός μαθητής αρίστευσε στο σχολείο αναπτύσσοντας παράλληλα την κλίση του προς τη χημεία. Το 1895 πεθαίνει ο πατέρας του και οι οικογενειακοί φίλοι συμβουλεύουν να αρχίσει ο ηλικίας 14 ετών νεαρός να εργάζεται. Αυτό όμως δε θα το επέτρεπε η μητρυιά του, η οποία αποφάσισε να μετακομίσουν στην Κοπεγχάγη, προκειμένου να δώσει την ευκαιρία στον πρόγονό της και την αδελφή του να τελειώσουν το σχολείο, έστω και με πολλές θυσίες εκ μέρους της. Πράγματι, όπως είδαμε, ο Brönsted εξασφάλισε καλή μόρφωση που του επέτρεψε να εγγραφεί στο Πολυτεχνείο της Κοπεγχάγης. Ο αρχικός του σκοπός ήταν να γίνει πολιτικός μηχανικός, συνεχίζοντας το επάγγελμα του πατέρα του. Παρόλο που πήρε το πρώτο πτυχίο του σε δύο χρόνια, ο τομέας αυτός δεν τον ενέπνεε. Προτιμούσε να περνάει τον άφθονο ελεύθερο χρόνο του καλλιεργώντας άλλα πεδία-μουσική, φιλοσοφία, ποίηση, καλές τέχνες. Τελικά, συνέχισε τις σπουδές του στη Χημεία και πήρε τον τίτλο του «μάγιστρου», το 1902. Ο τίτλος αυτός –ισοδύναμος περίπου με το μάστερ– ήταν ενδιάμεσος μεταξύ πτυχίου και διδακτορικού και η απονομή του ήταν σπάνια, γι' αυτό το παρατσούκλι μάγιστρος θα συνόδευε τον Brönsted για αρκετά χρόνια.

Μετά από μια σύντομη περίοδο απασχόλησης σε ένα ηλεκτροτεχνικό εργοστάσιο, ο Brönsted επέστρεψε στην ακαδημαϊκή ζωή, αυτή τη φορά στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης, για να εκπονήσει τη διδακτορική του διατριβή. Το θέμα που επέλεξε ήταν φυσικοχημικού χαρακτήρα και αναφερόταν σε μετρήσεις των θερμοδυναμικών παραμέτρων σε μίγματα υγρών, όπως θειικού οξέος-ύδατος. Παρόλο που κατέληξε σε αξιόλογα συμπεράσματα, σε καμιά περίπτωση η διατριβή του δε μπορούσε να θεωρηθεί καλύτερη από εκείνη του Bjerrum. Εντούτοις, το χάρισμα του λόγου υπήρξε καθοριστικό για να του χαρίσει την έδρα που διεκδικούσε μαζί με τον παλιό του συμμαθητή και φίλο. Κρίνοντας εκ των υστέρων, η επιλογή αποδείχθηκε επιτυχημένη, καθώς ο Brönsted τα επόμενα 39 χρόνια, ως το θάνατό του, λάμπρυνε με την επιστημονική του δραστηριότητα την έδρα και τη χώρα του, γενικότερα. Στην αρχή ήταν αναγκασμένος να περιοριστεί σ' ένα ταπεινό εργαστήριο του Πολυτεχνείου και άρχισε κυριολεκτικά από το μηδέν, αφού η φυσικοχημεία αποτελούσε ένα νέο πεδίο και δεν υπήρχε καμία προίκα για τη νέα έδρα. Σιγά-σιγά τα πράγματα βελτιώθηκαν και μάλιστα αργότερα, όταν επισκέφθηκε τις ΗΠΑ, το 1926, κατόρθωσε να εξασφαλίσει μια γενναιόδωρη οικονομική επιχορήγηση που του επέτρεψε να δημιουργήσει ένα νέο πρότυπο εργαστήριο φυσικοχημείας, το οποίο περιελάμβανε και κατοικία για τον εκάστοτε διευθυντή του.

Το ερευνητικό έργο του Brönsted περιστράφηκε κυρίως γύρω από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες των διαλυμάτων και την κινητική συμπεριφορά αντιδράσεων που καταλύονται από οξέα ή βάσεις. Οι πρώτες του εργασίες ήταν σχετικές με τη συγγένεια των αντιδρώντων σε διάφορες αντιδράσεις, οι οποίες σύμφωνα με τη θεωρία του Nernst δεν εκφράζονταν από την εκλυόμενη θερμότητα αλλά από το μέγιστο παραγόμενο έργο. Με τις λεπτολόγες του μετρήσεις, ο Brönsted επιβεβαίωσε τις θεωρητικές προβλέψεις σε διάφορα συστήματα. Εκτός από τις θερμιδομετρικές μετρήσεις, μέτρησε επίσης με μεγάλη ακρίβεια και επινοητικότητα την ηλεκτρεγερτική δύναμη και την τάση ατμών των συστημάτων του. Πρέπει να ειπωθεί ότι γενικά ήταν σπουδαίος πειραματιστής και συνήθως αδιαφορούσε για το θεωρητικό υπόβαθρο και την ερμηνεία σε μοριακό επίπεδο των αποτελεσμάτων του. Του αρκούσε η ανεύρεση ενός εμπειρικού τύπου ή μιας κανονικότητας, με τα οποία εκφραζόταν με κάποιο καθορισμένο –και ως ένα βαθμό προβλέψιμο– τρόπο η συμπεριφορά ενός συστήματος.

Η πειραματική δεξιοτεχνία του Brönsted ήταν τόσο γνωστή, ώστε στις αρχές του 1920 ο Ούγγρος χημικός George de Hevesy (1885-1996) του πρότεινε να συνεργαστούν σε ένα φιλόδοξο πρόγραμμα διαχωρισμού ισοτόπων. Το εγχείρημα είχε μερική επιτυχία, καθώς πραγματοποίησαν μόνο εμπλουτισμό των βαρύτερων ισοτόπων του υδραργύρου και του χλωρίου, χρησιμοποιώντας την τεχνική της απόσταξης σε υψηλό κενό. Ας σημειωθεί ότι ο de Hevesy, που τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 1943, ήταν ο πρώτος που εργάσθηκε με το ραδιενεργό ισότοπο του φωσφόρου, καθώς και με το βαρύ ύδωρ, σε βιολογικά συστήματα.

Στη φυσικοχημεία συμβαίνει συχνά συστηματικές μετρήσεις ορισμένων ιδιοτήτων να οδηγούν σε γενικότερου ενδιαφέροντος συμπεράσματα. Ένα σχετικό παράδειγμα είναι οι μετρήσεις της διαλυτότητας. Ο Brönsted πραγματοποίησε πολυάριθμα πειράματα αυτού του είδους με μια μεγάλη ποικιλία ενώσεων, με αποτέλεσμα τη δημοσίευση σειράς εργασιών που έμειναν κλασικές. Για να επιτύχει ακριβείς μετρήσεις χρησιμοποιούσε μια τεχνική κατά την οποία διοχέτευε τον εκάστοτε διαλύτη μέσω κατακόρυφης στήλης γεμάτης με κρυστάλλους της υπό μέτρηση ένωσης και άφηνε μετά από αρκετό χρόνο να διέλθει το κορεσμένο διάλυμα κατά σταγόνες στο δοχείο συλλογής. Μεταξύ των ευρημάτων του, αναφέρεται ο υπολογισμός των συντελεστών ενεργότητας των ιόντων που επιβεβαίωσαν τη θεωρία των Debye-Hückel, η οποία δημοσιεύθηκε σχεδόν ταυτόχρονα. Ακόμη, οι μετρήσεις της διαλυτότητας ποικίλων συμπλόκων του κοβαλτίου έδειξαν ότι αυτά συμπεριφέρονται σε διάφορους διαλύτες κατά αναμενόμενο τρόπο και τον βοήθησαν στην ανάπτυξη των ιδεών του για τα οξέα και τις βάσεις.

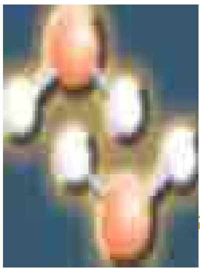
Ένας άλλος τομέας, που καλλιέργησε σε βάθος ο Brönsted, ήταν η κινητική μελέτη των αντιδράσεων, με έμφαση στα καταλυτικά φαινόμενα που παρουσιάζουν τα οξέα και οι βάσεις. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, αρκεί να αναφέρουμε δύο από τα πιο ενδιαφέροντα συμπεράσματά του. Το πρώτο είναι ο νέος ορισμός του για τα οξέα και τις βάσεις: οξύ είναι κάθε ένωση που τείνει να αποδώσει ένα πρωτόνιο και βάση είναι κάθε ένωση που μπορεί να δεχθεί ένα πρωτόνιο. Στο ίδιο συμπέρασμα είχε καταλήξει ταυτόχρονα και ο Άγγλος T. Lowry, γι' αυτό συχνά τα πρωτικά οξέα-βάσεις ονομάζονται κατά Brönsted-Lowry, όταν είναι επιθυμητό να διαφοροποιηθούν από τον διευρυσμένο ορισμό του Lewis. Στη μονογραφία του Κατάλυση από Οξέα και Βάσεις (1926), ο Brönsted περιέγραψε αναλυτικά τα καταλυτικά φαινόμενα που προκαλούν τα οξέα και οι βάσεις. Με τους νέους ορισμούς, όλες οι αντιδράσεις οξέων-βάσεων, όπως η διάσταση, η εξουδετέρωση, η υδρόλυση και οι δράσεις των ρυθμιστικών διαλυμάτων, έγινε δυνατό να υπαχθούν στην απλή αμφίδρομη εξίσωση γενικής ισχύος:

$$\text{Οξύ}(1) + \text{Βάση}\ (2) \rightleftharpoons \text{Βάση}(1) + \text{Οξύ}(2)$$

Το δεύτερο συμπέρασμα αφορούσε στην επίδραση των αλάτων επί της ταχύτητας των αντιδράσεων. Διαπιστώθηκε ότι με την προσθήκη διαφόρων αλάτων οι αντιδράσεις μεταξύ ομώνυμων ιόντων επιταχύνονται, οι αντιδράσεις μεταξύ ετερώνυμων ιόντων επιβραδύνονται, ενώ αντιδράσεις μεταξύ ουδετέρων μορίων και ιόντων παρουσιάζουν μικρή επιτάχυνση ή επιβράδυνση.

Ο Brönsted έζησε ευτυχισμένη οικογενειακή ζωή. Είχε παντρευτεί ήδη από 24 ετών και απέκτησε πέντε παιδιά. Του άρεσε να ταξιδεύει και είχε αναπτύξει ιδιαίτερους δεσμούς με την Αγγλία, απ' όπου προέρχονταν πολλοί μαθητές του, καθώς δημοσίευε τις εργασίες του στα Αγγλικά. Ως δάσκαλος διακρινόταν για τη κομψότητα του λόγου, γενικά όμως οι φοιτητές του δυσκολεύονταν να τον παρακολουθήσουν, εξαιτίας και της εγγενούς στρυφνότητας ορισμένων φυσικοχημικών εννοιών. Οι απαιτήσεις του στις εξετάσεις ήταν σημαντικές, με ιδιαίτερη έμφαση στους υποψήφιους διδάκτορες, των οποίων λεγόταν ότι ήταν σκληρός αντίπαλος. Στην ιδιωτική του ζωή πάντως είχε γοητευτική προσωπικότητα και αποτελούσε έξοχο συνομιλητή. Είχε αναπτύξει πολλά ενδιαφέροντα σε τομείς όπως τη λογοτεχνία, τη μουσική και τη ζωγραφική. Επίσης, τον απασχολούσε η διατήρηση του φυσικού περιβάλλοντος, ώστε να θεωρείται ως ένας από τους πρώτους συνειδητοποιημένους οικολόγους.

Η γερμανική κατοχή της Δανίας κατά το ΒΔ Παγκόσμιο Πόλεμο είχε ως αποτέλεσμα την ενασχόληση του Brönsted με την πολιτική. Το 1947 αποδέχθηκε την υποψηφιότητά του για μια βουλευτική έδρα στο Κοινοβούλιο, όπου και εξελέγη. Η σοβαρότητα που χαρακτήριζε την επιστημονική του ζωή τον ώθησε αμέσως στη μελέτη των κοινοβουλευτικών διαδικασιών, ώστε να είναι προετοιμασμένος για τα νέα του καθήκοντα. Δυστυχώς, δεν πρόλαβε να προσφέρει τις υπηρεσίες του στην πατρίδα του και από αυτή τη θέση, καθώς τον πρόλαβε ο θάνατος ξαφνικά, σε ηλικία 68 ετών. Ποιός ξέρει άραγε με τι τρόπο θα αντιμετώπιζε ο λογικός και ασυμβίβαστος επιστήμονας τις ιδιαιτερότητες της πολιτικής ζωής. Ο ίδιος πίστευε ότι πολλά δεινά της ανθρωπότητας οφείλονταν στην έλλειψη λογικής και ακριβών ορισμών των δημοσίων υποθέσεων, αλλά είναι ζήτημα κατά πόσο η εφαρμογή των αρχών του θα είχε επιτυχία ανάλογη με με τις επιστημονικές του επιτυχίες.



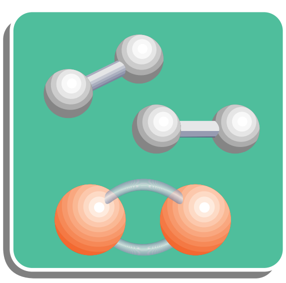
# Η ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ στη ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ της ΧΗΜΕΙΑΣ

Του **Π. Παπαθεοφάνους**, Χημικού

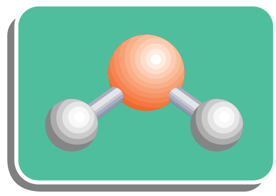
Η διδακτική εμπειρία έχει δείξει ότι οι περισσότεροι μαθητές του Γυμνασίου δυσκολεύονται να κατανοήσουν ορισμένες έννοιες της Χημείας όπως αυτές της χημικής αντίδρασης, της αρχής διατήρησης των ατόμων σε μια χημική αντίδραση καθώς και της ανακατανομής των ατόμων που οδηγεί στη δημιουργία νέων καθαρών ουσιών, της ισοστάθμισης μιας χημικής εξίσωσης, της στοιχειομετρικής αναλογίας μεταξύ αντιδρώντων και προϊόντων, της περίσσειας, του χημικού δεσμού κ.ά., όταν αυτές περιγράφονται σε καθαρά θεωρητικό επίπεδο, λόγω της αδυναμίας ανάπτυξης αφηρημένης σκέψης δείχνουν όμως να τις αντιλαμβάνονται και να συμμετέχει το σύνολο των μαθητών της τάξης, όταν η διδασκαλία τους γίνεται με τη βοήθεια μοντέλων - προσομοιωμάτων.

Βέβαια η χρήση μοντέλων μπορεί να δημιουργήσει στους μαθητές δικές τους λανθασμένες αντιλήψεις - εναλλακτικές ιδέες ή προϋπάρχουσες αντιλήψεις όπως αναφέρονται στη βιβλιογραφία και σχετίζονται με το μέγεθος των ατόμων, το σχήμα τους και το χρώμα τους, αντιλήψεις που στη συνέχεια μπορούν να δημιουργήσουν απρόβλεπτα προβλήματα. Για τους λόγους αυτούς πρέπει να ξεκαθαριστεί στους μαθητές ότι τα μοντέλα είναι μια επινόηση καθαρά διδακτική σε μια προσπάθεια απλοποίησης και κατανόησης δύσκολων εννοιών και δεν έχουν καμία σχέση με το πραγματικό μέγεθος, σχήμα, χρώμα των ατόμων των διαφόρων στοιχείων.

Ας παρακολουθήσουμε πώς μπορεί να γίνει ένα μέρος της διδασκαλίας της χημικής αντίδρασης και εννοιών που σχετίζονται με αυτήν, με τη βοήθεια μοντέλων και ποια ερωτήματα τίθενται από τη μεριά των μαθητών που συμβάλλουν στην κατανόηση του μαθήματος.



Σχεδιάζουμε στον πίνακα και συγχρόνως δίνουμε στους μαθητές, που έχουν χωριστεί σε ομάδες, μοντέλα που παριστάνουν δύο μόρια υδρογόνου (άσπρο χρώμα) και ένα μόριο οξυγόνου (κόκκινο χρώμα).



Στη συνέχεια σχεδιάζουμε στον πίνακα ένα μόριο νερού και ζητάμε από τους μαθητές να προσπαθήσουν με τα αρχικά μοντέλα υδρογόνου και οξυγόνου να δημιουργήσουν μόρια νερού γράφοντας στο τετράδιό τους και όλες τις ενέργειες, κινήσεις με τη σειρά που τις πραγματοποιούν καθώς και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν.

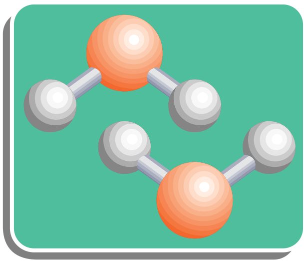
Συγχρόνως με την εκτέλεση της εργασίας τίθεται από τη μεριά των μαθητών και το ερώτημα «τι παριστάνουν οι σύνδεσμοι –γραμμές– μεταξύ ατόμων υδρογόνου και οξυγόνου και γιατί μεταξύ ομοίων ατόμων υδρογόνου υπάρχει ένας σύνδεσμος ενώ μεταξύ ομοίων ατόμων οξυγόνου υπάρχουν δύο»;

Χωρίς να επεκταθούμε στην έννοια του χημικού δεσμού, μπορούμε να αναφερθούμε σε αυτόν και να τους υπενθυμίσουμε ότι είτε άτομα του ίδιου στοιχείου είτε άτομα διαφορετικών στοιχείων ενώνονται μεταξύ, όπως είναι γνωστό, για τη δημιουργία μορίων στοιχείων ή χημικών ενώσεων. Η ένωση αυτή πραγματοποιείται με ένα «ειδικό δέσιμο» των ατόμων των στοιχείων μεταξύ τους που ονομάζεται *χημικός δεσμός* και παριστάνεται ορισμένες φορές με αυτούς τους ευθύγραμμους συνδέσμους. Έτσι δημιουργείται το άκουσμα του χημικού δεσμού που θα συναντήσουν σε άλλη τάξη. Για το υπόλοιπο σκέλος του ερωτήματός τους, τους εξηγούμε ότι η απάντηση θα δοθεί σε άλλη τάξη και στην επιμονή τους «τώρα», τους απαντάμε ότι όλη η ύλη του μαθήματος της Χημείας δεν μπορεί να χωρέσει στο πρόγραμμα της τάξης.

Ας δούμε τώρα τις ενέργειες και τα συμπεράσματα όπως τις κατέγραψε μέσα στην τάξη, ένας μαθητής με χαμηλή απόδοση.

*Ενέργεια 1η:* Σπάω τους συνδέσμους που υπάρχουν ανάμεσα στα άτομα υδρογόνου και στα άτομα οξυγόνου.

*Ενέργεια 2η:* Φέρνω κοντά άτομα υδρογόνου και άτομα οξυγόνου, δημιουργώντας ανάμεσά τους νέους συνδέσμους, που οδηγούν στη δημιουργία μορίων νερού.



Από μια πρώτη παρατήρηση καταλήγω στα παρακάτω συμπεράσματα:

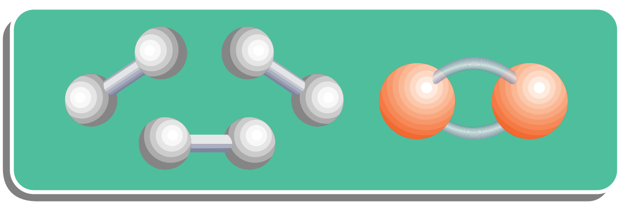
*Συμπέρασμα 1ο:* Όσα ήταν τα άτομα του υδρογόνου στην αρχή, άλλα τόσα είναι και στο τέλος. Το ίδιο ισχύει και για τα άτομα του οξυγόνου.

*Συμπέρασμα 2ο:* Από δύο μόρια υδρογόνου και ένα μόριο οξυγόνου δημιουργούνται δύο μόρια νερού.

Εξηγούμε στους μαθητές την αξία των συμπερασμάτων και των ενεργειών στις οποίες έχουν προβεί. Για να τους ενθαρρύνουμε και να τους κινήσουμε το ενδιαφέρον, τους λέμε ότι συμπεριφέρθηκαν σαν Μικροί Χημικοί και με τα συμπεράσματα και τις ενέργειές τους επιβεβαίωσαν σημαντικές αρχές και νόμους της Χημείας. Το μεν πρώτο συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν επιβεβαιώνει μια σημαντική αρχή της Χημείας, «την αρχή διατήρησης των ατόμων», το δε δεύτερο, δείχνει την αναλογία με την οποία αντιδρούν το υδρογόνο και το οξυγόνο για το σχηματισμό νερού.

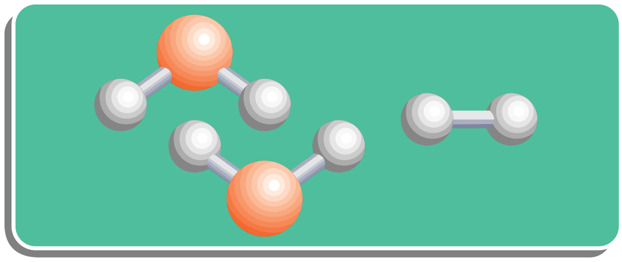
Όσον αφορά τις δύο πρώτες ενέργειές τους, τους εξηγούμε ότι αυτές αποτελούν στην ουσία το μηχανισμό με τον οποίο δημιουργούνται τα καινούργια σώματα, μετά από σπάσιμο των αρχικών δεσμών και δημιουργία νέων με αναδιάταξη –«αλλαγή παρέας»– των ατόμων των αρχικών σωμάτων.

Δίνουμε στη συνέχεια στους μαθητές πάλι μοντέλα που παριστάνουν τώρα τρία μόρια υδρογόνου και ένα μόριο οξυγόνου και τους ζητάμε να εκτελέσουν την ίδια εργασία και να καταγράψουν μόνο όσα συμπεράσματα είναι διαφορετικά από τα προηγούμενα.

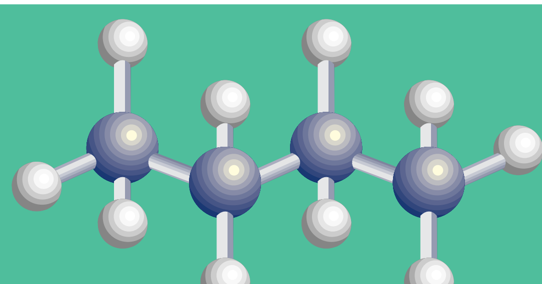


Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ήταν ότι έχουμε πάλι δημιουργία δύο μορίων νερού, αλλά τώρα έχει περισσέψει ένα μόριο υδρογόνου.

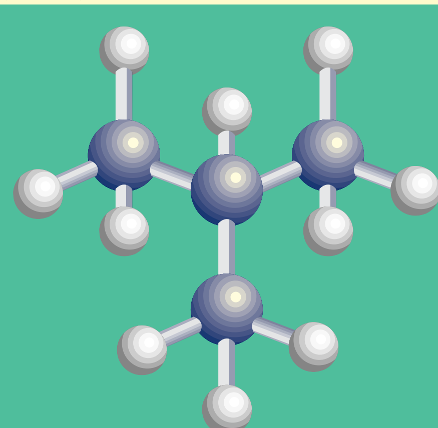
Γίνεται λοιπόν φανερό με την παραπάνω εργασία ότι αν αναμείξουμε υδρογόνο και οξυγόνο σε αναλογία μορίων διαφορετική από την προηγούμενη, θα περισσέψει κάποια ποσότητα από ένα από τα αρχικά σώματα. Έτσι η δύσκολη έννοια της περίσσειας, γίνεται αντιληπτή.



Η χρήση μοντέλων μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση εννοιών που αναφέρονται όχι μόνο στην ύλη Χημείας του Γυμνασίου, αλλά και σε αυτήν του Λυκείου, (ειδικότερα στην ύλη Χημείας Γενικής Παιδείας Β Λυκείου –Οργανική) όπως οι έννοιες ισομέρεια, αντιδράσεις προσθήκης - ανόρθωσης του διπλού δεσμού κ.ά.



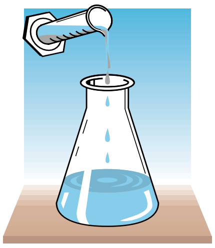
**Βουτάνιο**



**(2) μεθυλο-προπάνιο**

## Διευθύνσεις διάθεσης μοντέλων Leader Books

- Αγ. Ιωάννου 75, Αγ. Παρασκευή τηλ. 6015435 - 6015452
- Εμμ. Μπενάκη 45, Αθήνα τηλ. 3811937 - 3805254
- Παν. Κυριακού 17, Αμπελόκηποι τηλ. 6466118
- Πανεπιστήμιο Αθηνών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Ζωγράφου τηλ. 7257485
  Email: info@leaderbooks.com
  Http//www.leaderbooks.gr
- Θεοδωροπούλου Γεωργία, Ηπείρου 17, Αθήνα τηλ. 8216985 - 3801307



# ΣΚΟΠΟΣ και ΣΤΟΧΟΙ της ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Του **Δ. Παυλίδη,** Χημικού

Η διαγνωστική αξιολόγηση αποτελεί αναμφίβολα μία καινοτομία της μαθησιακής διδασκαλίας με στόχους εκπαιδευτικούς αλλά και κοινωνικούς. Ασφαλώς βοηθά τον εκπαιδευτικό να αντλήσει άμεσα πληροφορίες για το ποιόν του μαθητή και του τμήματος γενικότερα, με αποτέλεσμα να οργανώσει αποτελεσματικότερα τη διδακτική πράξη και να εντοπίσει ευκολότερα τις αδυναμίες ορισμένων μαθητών τις οποίες και θα προσπαθήσει κατόπιν να αντιμετωπίσει.

### Σκοπός των διαγνωστικών δοκιμασιών είναι:

α. Να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να προσδιορίσουν το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές τους, ώστε να εφαρμόσουν τα ανάλογα σχέδια διδασκαλίας.

β. Να διερευνήσουν αν οι μαθητές διαθέτουν τις προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες, για να παρακολουθήσουν χωρίς προβλήματα τη διδασκαλία της νέας ύλης.

γ. Να επισημάνουν τις ελλείψεις τους για να συμπληρωθούν με τον προσφορότερο, κατά την κρίση του διδάσκοντος, τρόπο κατά τη διδασκαλία στην τάξη.

Η διαγνωστική αξιολόγηση περιλαμβάνει ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου και φυσικά ασκήσεις -εφαρμογές και προβλήματα (κριτήρια αξιολόγησης).

*Οι ερωτήσεις κρίσεως, πολλαπλής επιλογής, σωστού-λάθους με αιτιολόγηση, σύντομης απάντησης, συμπλήρωσης διάστικτων, αντιστοίχισης αλλά και συνδυασμού των παραπάνω κατηγοριών αποτελούν τα* ***κριτήρια αξιολόγησης*** που εισάγονται πλέον στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

«Τα θέματα των γραπτών και απολυτήριων εξετάσεων λαμβάνονται από την ύλη που ορίστηκε ως εξεταστέα για κάθε μάθημα, κατά το έτος που γίνονται οι εξετάσεις. *Σε κάθε μάθημα επιδιώκεται η χρησιμοποίηση συνδυασμού επαρκών ερωτήσεων διαφορετικών μορφών και τύπων* **(ερωτήσεις ανάπτυξης, σύντομης απάντησης, κλειστού τύπου: πολλαπλής επιλογής, διαζευκτικής απάντησης, συμπλήρωσης, αντιστοίχισης, διάταξης)**, *ανάλογα με τη φύση κάθε μαθήματος και τους διδακτικούς στόχους που ελέγχονται. Οι ερωτήσεις είναι ανάλογες προς εκείνες που χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια του αντίστοιχου σχολικού έτους, διατρέχουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη έκταση της εξεταστέας ύλης, ελέγχουν ευρύ φάσμα διδακτικών στόχων και είναι οπωσδήποτε διαφορετικού βαθμού δυσκολίας.* Οι μαθητές απαντούν υποχρεωτικά σε όλες τις ερωτήσεις, εκτός αν στη διατύπωση των θεμάτων ορίζεται διαφορετικά.

Η αξιολόγηση των μαθητών του Λυκείου είναι αναπόσπαστο μέρος της διδακτικής διαδικασίας, έχει ως στόχο να ελέγξει το βαθμό συγκράτησης πληροφοριών και γνώσεων, αλλά κυρίως να υιοθετήσει μεθόδους και πρακτικές που αξιολογούν το βαθμό επίτευξης των διδακτικών στόχων που έχουν τεθεί και των βασικών δεξιοτήτων, και συνδυάζει ποικίλες μορφές και τεχνικές για την πραγματοποίηση έγκυρης, αξιόπιστης, αντικειμενικής και αδιάβλητης αποτίμησης των γνώσεων και δεξιοτήτων, χωρίς πρόσθετη εξεταστική επιβάρυνση.

Οι διαγνωστικές δοκιμασίες διεξάγονται με την ευθύνη του διδάσκοντος, σε συνεργασία με το Διευθυντή του Σχολείου, *σε μια διδακτική ώρα χωρίς προειδοποίηση των μαθητών. Δεν επιτρέπεται να διενεργούνται περισσότερες από μία (1) κατά την διάρκεια του ημερήσιου διδακτικού προγράμματος, ούτε να υπερβαίνουν τις τρεις (3) κατά τη διάρκεια του εβδομαδιαίου διδακτικού προγράμματος για τους ίδιους μαθητές*».

Άλλωστε η **πρόοδος** των μαθητών ελέγχεται με ποικίλες ενδιάμεσες γραπτές εξετάσεις όπως:

### 1. Ολιγόλεπτες γραπτές δοκιμασίες

Αποτελούν εναλλακτικό τρόπο εξέτασης των μαθητών στο μάθημα της ημέρας και συμπληρώνουν την αξιολόγηση μέσω προφορικών διαδικασιών. *Γίνονται χωρίς προειδοποίηση των μαθητών με τη μορφή σύ-*

*ντομων, ποικίλων και κατάλληλων ερωτήσεων, οι οποίες εκπονούνται από το διδάσκοντα με βάση τα σχετικά παραδείγματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία και στο λοιπό παιδαγωγικό υλικό που αποστέλλεται στα σχολεία ή λαμβάνονται έτοιμες από Τράπεζα Θεμάτων ή επίσημα ανθολόγια ερωτήσεων.*

### 2. Ωριαίες γραπτές δοκιμασίες σε ευρύτερες ενότητες

*Γίνονται ύστερα από προειδοποίηση σε χρόνο και ενότητα που επιλέγει και ανακοινώνει στους μαθητές ο διδάσκων. Ως προς τη μορφή τους μπορούν να συνδυάζουν ταυτόχρονα διαφορετικού τύπου ερωτήσεις (ανάπτυξης, σύντομης απάντησης και κλειστού τύπου).*

Να δούμε τώρα μερικές ερωτήσεις διαφορετικών τύπων και την αντίστοιχη εφαρμογή τους στη ***Χημεία*** και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο της ***ΧΗΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ***.

### Α. Πολλαπλής επιλογής

**1. Η αύξηση της θερμοκρασίας σε μία χημική ισορροπία εξώθερμης αντίδρασης της μορφής $A \rightleftharpoons Π+Q$:**

**Α.** Δε μεταβάλλει τη θέση της χημικής ισορροπίας.

**Β.** Προκαλεί μετατόπιση του συστήματος προς το προϊόν Π.

**Γ.** Προκαλεί μετατόπιση του συστήματος προς το αντιδρών Α.

**Δ.** Σε συνδυασμό με αύξηση της πίεσης οδηγεί τη χημική ισορροπία προς το προϊόν Π.

**2. Για τη χημική ισορροπία $H_2+I_2 \rightleftharpoons 2HI$ στους 400 °C, όπου όλες οι ουσίες είναι αέριες, βρέθηκε ότι η $K_c=64$ ενώ στους 60 °C είβαι $K_c=80$.**

Η παραπάνω αντίδραση είναι:

**Α.** ενδόθερμη. **Β.** ουδέτερη θερμικά.

**Γ.** εξώθερμη.

**Σχόλιο:** *Με τις παραπάνω ερωτήσεις μπορεί ο μαθητής να δείξει πως κατέχει το κεφάλαιο της χημικής ισορροπίας, εφόσον γνωρίζει τους παράγοντες που την επηρεάζουν καθώς και τη χρήση της σταθεράς της χημικής ισορροπίας.*

### Β. Συμπλήρωσης κενών

**3.** Αν στους 2000 °C το στερεό $CaCO_3$ διασπάται σε αέριο $CO_2$ και στερεό CaO με απόδοση 60% και στους 3000 °C διασπάται με απόδοση 40% τότε η αντίδραση

$$CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2$$

είναι .................

**4.** Σε δοχείο σταθερού όγκου προσθέτουμε ποσότητα $PCl_5$. Παρατηρούμε τότε σταδιακή αύξηση της πίεσης λόγω ................................. και τελικά αποκαθίσταται η ισορροπία

$$PCl_5 \rightleftharpoons PCl_3 + Cl_2.$$

**Σχόλιο:** *Με τις ερωτήσεις αυτές φαίνεται η κατανόηση της απόδοσης μιας αντίδρασης σε σχέση με το θερμικό περιεχόμενο. Μπορεί επίσης ο μαθητής να μας δείξει την αντίληψή του για το φαινόμενο της χημικής ισορροπίας.*

### Γ. Ερωτήσεις του τύπου Σωστό - Λάθος με αιτιολόγηση

**5.** Αν για τη χημική ισορροπία

$$CO_2 + C(s) \rightleftharpoons 2CO$$

οι μερικές πιέσεις των συστατικών της είναι ίσες με 2 atm τότε η $K_p$ είναι επίσης 2.

**Σ**-□, **Λ**-□

**6.** Στη χημική ισορροπία

$$2NH_3 \quad N_2 + 3H_2$$

η ελάττωση της πίεσης και η προσθήκη υδρογόνου προκαλούν τη μετατόπισή της προς την κατεύθυνση του σχηματισμού της αμμωνίας.

**Σ**-□, **Λ**-□

**Σχόλιο:** *Με την πρώτη ερώτηση φαίνεται η εξοικείωση του μαθητή με την $K_p$ και η ταχύτητα της σκέψης του στην εκτέλεση και λύση ενός απλού προβλήματος. Στη δεύτερη ερώτηση φαίνεται η εμπέδωση του νόμου του Le Chatelier.*

### Δ. Αντιστοίχησης

**7.** Σε όλες τις παρακάτω αντιδράσεις, με ελάττωση της θερμοκρασίας παρατηρούμε αύξηση της απόδοσης. Να εκτιμήσετε αν οι αντιδράσεις γίνονται με έκλυση ή απορρόφηση θερμότητας:

**Α.** $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$

**Β.** $2NH_3 \rightleftharpoons N_2 + 3H_2$ 1. ενδόθερμη

**Γ.** $COCl_2 \rightleftharpoons CO + Cl_2$ 2. εξώθερμη

**Δ.** $CO + H_2O \rightleftharpoons CO_2 + H_2$

**8.** Σε 3 διαφορετικά δοχεία του ενός λίτρου εισάγουμε 1 mol $PCl_5$ στο Α, 1 mol $N_2O_4$ στο Β και 1 mol HI στο Γ. Η απόδοση όλων των αντιδράσεων είναι 50%. Να αντιστοιχίσετε τη σωστή τιμή

της $K_c$ για κάθε αντίδραση:

**Α.** $PCl_5 \rightleftharpoons PCl_3 + Cl_2$ α. 0,125

**Β.** $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$ β. 0,5

**Γ.** $2HI \rightleftharpoons H_2 + I_2$ γ. 2

**Σχόλιο:** *Οι ερωτήσεις αυτές αφενός ελέγχουν αν οι μαθητές κατέχουν το νόμο του Le Chatelier και την $K_c$ και αφετέρου αν μπορούν να εκτελούν απλές αριθμητικές πράξεις, χρήσιμες για την επίλυση προβλημάτων.*

## Ε. Σύντομης απάντησης

**9.** Ποσότητα στερεού $CaCO_3$ διασπάται μερικώς και αποκαθίσταται η χημική ισορροπία:

$$CaCO_3 \rightleftharpoons CaO + CO_2 \quad -Q$$

Προς ποια πλευρά θα γίνει μετατόπιση της ισορροπίας αν:

α) αυξήσουμε τη θερμοκρασία υπό σταθερή πίεση.

β) αυξήσουμε την πίεση υπό σταθερή θερμοκρασία.

γ) ποιος συνδυασμός πίεσης και θερμοκρασίας αυξάνει την απόδοση παραγωγής του CaO;

**10.** Δίνεται η χημική ισορροπία:

$$4HCl + O_2 \rightleftharpoons 2H_2O + 2Cl_2 \quad + Q$$

(όλα αέρια). Να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) ποιος συνδυασμός πίεσης και θερμοκρασίας ευνοεί την παραγωγή χλωρίου;

β) αν προσθέσουμε αφυδατική ουσία στο χώρο της αντίδρασης, τι συνέπειες θα έχει στην παραγωγή του χλωρίου;

γ) αν χρησιμοποιήσουμε καταλύτη, θα αυξηθεί η παραγωγή χλωρίου;

**Σχόλιο:** *Με τις ερωτήσεις αυτές ελέγχεται η κατανόηση των παραγόντων που επιδρούν στη χημική ισορροπία ενώ με τη συνδυαστική ερώτηση που ακολουθεί ελέγχεται ολόκληρη η ενότητα της χημικής ισορροπίας.*

## ΣΤ. Συνδυαστική

Αν για τη χημική ισορροπία

$$H_2 + I_2 \rightleftharpoons 2HI$$

στους 400 ˚C, όπου όλες οι ουσίες είναι αέριες, βρέθηκε $K_c = 64$ ενώ στους 600 ˚C η $K_c = 80$, τότε αυτή είναι μια .................... αντίδραση. Αν αρχικά στο δοχείο εισάγουμε 2 mol HI στους 400 ˚C παρατηρούμε ότι βαθμιαία η πίεση μέσα στο δοχείο ………………….… και τελικά αποκαθίσταται χημική ισορροπία με απόδοση:

**α.** 20% **β.** 40% **γ.** 60% **δ.** 80%

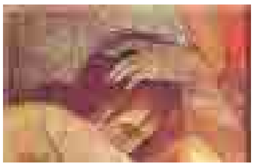
Αν μετά την αποκατάσταση της χημικής ισορροπίας αυξήσουμε τη θερμοκρασία τότε αυτή μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση της διάσπασης του HI ή προς την αντίθετη κατεύθυνση; Τι θα συμβεί στην ισορροπία αν:

**Α.** ελαττώσουμε τη θερμοκρασία.

**Β.** αφαιρέσουμε ποσότητα ιωδίου.

**Γ.** αυξήσουμε την πίεση.

**Δ.** αυξήσουμε τον όγκο του δοχείου.



# ΤΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ και η ΥΠΟΒΑΘΜΙΣΗ τους στη ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Της **Π. Αλατζόγλου**, Φιλολόγου στο 2ο Λύκειο Συκεών

Με το κείμενο που ακολουθεί θα ήθελα να επισημάνω κάποια προβλήματα που έχουν σχέση με τη διδασκαλία των λατινικών στη γ τάξη του λυκείου· διδασκαλία που γίνεται βάσει του εγχειριδίου ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΟΥ των Μ. Πασχάλη και Γ. Σαββαντίδη, βιβλίο το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για μια ακόμη χρονιά τουλάχιστον (δηλαδή για τη σχολική χρονιά 1998-1999). Δεν ξέρουμε, βέβαια, ακόμη τίποτε για το/τα βιβλίο/α που θα δοθεί/θούν στους μαθητές που θα αποφοιτήσουν με το εθνικό απολυτήριο, αλλά, νομίζω, πως οι όποιες σκέψεις και παρατηρήσεις των ανθρώπων που για χρόνια χρησιμοποιούν το εγχειρίδιο που αναφέρθηκε παραπάνω, μπορούν να είναι χρήσιμες για το σχεδιασμό του/των καινούριου/ων βιβλίου/ων. Οι επισημάνσεις που θα ακολουθήσουν δεν εξαντλούν, βέβαια τα θέματα που θίγονται στο σχολικό βιβλίο· είναι απλώς ενδεικτικές των προβλημάτων που υπάρχουν και που, κατά τη γνώμη μου, ευθύνονται για την απαράδεκτη υποβάθμιση του μαθήματος.

Έτσι:

Στο 2ο μάθημα (στο σχολ. βιβλίο πάντοτε), στην παρατήρηση 2 διαβάζουμε ότι «η δοτική χρησιμοποιείται ως συμπλήρωμα ρημάτων που δηλώνουν εχθρική διάθεση (...) ή φιλική διάθεση (...)...». Υιοθετείται, λοιπόν, μια ορολογία καινούρια, αφού, σύμφωνα με όσα γνωρίζουν οι μαθητές μας από τη σύνταξη της αρχαίας ελληνικής και σύμφωνα με τη «λατινική γραμματική» του Τζάρτζανου (ΟΕΔΒ) τα ρήματα φιλικής και εχθρικής διάθεσης συντάσσονται με αντικείμενο κατά δοτικήν. Τι προσφέρει η υιοθέτηση της συγκεκριμένης ορολογίας, που καθόλου δεν βοηθάει στην κατανόηση του κειμένου μέσω του συντακτικού;

Στο μάθημα 10 αναφέρεται η λέξη caelum, i. Στο λεξιλόγιο του μαθήματος, όπως και στο λεξιλόγιο που δίνεται στο τέλος του βιβλίου δεν γίνεται καμία μνεία για την κλίση του ονόματος. Το βιβλίο του καθηγητή δεν κάνει επίσης καμία αναφορά σχετικά. Το λεξικό του Τσακαλώτου παραπέμπει στη λέξη coelum, i και γράφει «πλ. -li, π. και σπ. (= ποιητικός και σπάνιος)». Σε μέρος της βιβλιογραφίας που κυκλοφορεί στο εμπόριο λέγεται ότι το caelum κλίνεται στον πληθυντικό σαν αρσενικό, ενώ αλλού το caelum χαρακτηρίζεται ως ουδέτερο, χωρίς καμία άλλη παρατήρηση.

Στο μάθημα 35 γίνεται λόγος για τις αιτιολογικές προτάσεις που χαρακτηρίζονται ως προτάσεις επιρρηματικές. Ωστόσο, στο μάθημα 24 διαβάζουμε, ότι μετά από ρήματα ψυχικού πάθους ακολουθούν ουσιαστικές προτάσεις που εισάγονται με το quod, εκφέρονται με οριστική και εκφράζουν την αιτία. Να θεωρήσουνε, λοιπόν, οι μαθητές ότι πρόκειται για μιαν άλλη κατηγορία δευτερευουσών προτάσεων, όπως συμβαίνει με τις προτάσεις του quominus και του quin (τις οποίες εγώ, ειρήσθω εν παρόδω, μόνο στο σχολικό βιβλίο γνώρισα σαν ιδιαίτερη κατηγορία δευτερευουσών προτάσεων); Μένει, συνεπώς, ασαφές το αν οι αιτιολογικές προτάσεις είναι επιρρηματικές μόνο ή και ονοματικές. Ασάφεια η οποία μπορεί πολύ εύκολα να θεραπευθεί, αν στη διαπραγμάτευση των αιτιολογικών προτάσεων στο σχολικό βιβλίο υπήρχε και η παρατήρηση ότι μόνον ο αιτιολογικός σύνδεσμος quod εισάγει δευτερεύουσες αιτιολογικές προτάσεις που μπορούν να λειτουργήσουν ονοματικά (π.χ. υποκείμενο, αντικείμενο, επεξήγηση...)· στην περίπτωση αυτή ο quod συντάσσεται μόνο με οριστική και συνήθως ακολουθεί μετά από ρήματα που δηλώνουν ψυχικό πάθος. Ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις ως προς το θέμα αυτό υπάρχουν και στη Λατινική γραμματική του Τζάρτζανου, σελ. 180-181.

Στο μάθημα 43 η πρόταση

«Quamvis infesto et minaci animo perveneras» είναι δευτερεύουσα εναντιωματική ή δευτερεύουσα παραχωρητική. Ο quamvis (σύμφωνα με το σχολ. βιβλίο) είναι σύνδεσμος παραχωρητικός και συντάσσεται με υποτακτική. Η χρήση του (sic) προτιμάται μπροστά από επίθετα και επιρρήματα. Μόνο που στο κείμενο η quamvis συντάσσεται με το perveneras που είναι οριστική υπερσυντέλικου. Το βιβλίο του καθηγητή, το οποίο συμειωτέον δεν διαπραγματεύεται σχεδόν ποτέ προβληματικές περιπτώσεις, χαρακτηρίζει τον quamvis ως παραχωρητικό σύνδεσμο και συμπληρώνει ότι η σύνταξή του με οριστική (κατ' αναλογία προς τον quamquam) είναι κυρίως ποιητική και μετακλασική. Άλλοι θεωρούν ότι η πρόταση είναι εναντιωματική, ότι προτιμάται ο quamvis (αντί του quamquam που κανονικά συντάσσεται με οριστική), επειδή ακολουθεί επίθετο (infesto) και ότι εκφράζεται πραγματική κατάσταση παρά την οποία ισχύει το περιεχόμενο της κύριας πρότασης (παρατήρηση που συμφωνεί με την πληροφορία του σχολικού βιβλίου, σελ. 233, π2 ότι οι εναντιωματικές προτάσεις εκφράζουν πραγματική κατάσταση παρά την οποία ισχύει το περιεχόμενο της κύριας πρότασης). Ο Gildersleeve στο βιβλίο Latin grammar §606

αναφέρει ότι για την περίοδο μετά τον Αύγουστο ο quamvis συναντάται και με οριστική και με υποτακτική. Ακόμη, ότι ο quamvis συντάσσεται με υποτακτική των αρκτικών χρόνων συνήθως. Το κείμενο 43 είναι γραμμένο από τον Τίτο Λίβιο που ζει την εποχή του Αυγούστου και λίγο αργότερα. Νομίζω ότι η τελευταία πληροφορία σε συνδυασμό με τα στοιχεία από το βιβλίο του καθηγητή μας βοηθάει να καταλήξουμε στην παρακάτω αναγνώριση της δευτερεύουσας πρότασης: δευτερεύουσα παραχωρητική πρόταση, εισάγεται με τον quamvis και εκφέρεται με οριστική, δηλώνει πραγματικό γεγονός. Η αναγνώριση που προτείνεται είναι υπερ-αρκετή για τους μαθητές μας, οι οποίοι στο επίπεδο που βρίσκονται δεν κάνουν επιστήμη (πώς θα μπορούσαν, άλλωστε, με τα (50) πενήντα κείμενα που καλούνται να επεξεργαστούν, εκ των οποίων τα περισσότερα είναι διασκευασμένα επί το απλούστερον), απλώς καλούνται να μάθουν κάποια στοιχεία της λατινικής γλώσσας, προκειμένου να αντιμετωπίσουν τις πανελλήνιες εξετάσεις.

Με την υπερπροσφορά, όμως, διαφορετικών λύσεων για το ίδιο πρόβλημα, είτε αυτό είναι γραμματικό είτε είναι συντακτικό, και εξαιτίας της απουσίας σαφών και ολοκληρωμένων θέσεων από το σχολικό βιβλίο, οι μαθητές βρίσκονται σε σύγχιση και δεν ξέρουν πραγματικά ποιαν άποψη να ακολουθήσουν προκειμένου να εξετασθούν με επιτυχία, αφού άλλα υποστηρίζει ο καθηγητής στο φροντιστήριο και άλλα ο καθηγητής τους στο σχολείο.

Τα παραδείγματα, σαν αυτά που αναφέρθηκαν, είναι πολλά και δείχνουν με πόση προχειρότητα στήθηκε το εγχειρίδιο που είναι σε χρήση. Δείχνουν ακόμη, κατά τη γνώμη μου, την αδιαφορία της πολιτείας για το συγκεκριμένο μάθημα και τη συνακόλουθη υποβάθμισή του. Υποβάθμιση που ξεκινάει, βέβαια, από τα πανεπιστήμιά μας.

Ωστόσο, όσοι εμπλεκόμαστε στη διδασκαλία των κλασικών γλωσσών στο σχολείο, πρέπει να αντιληφθούμε κάποτε ότι η διδασκαλία της λατινικής γλώσσας είναι απαραίτητη και για το λόγο ότι η γνώση της συνάπτεται με τη γνώση της αρχαίας ελληνικής. Αν, λοιπόν, θέλουμε οι μαθητές μας να μάθουν σωστά αρχαία ελληνικά, οφείλουμε να τους διδάξουμε και σωστά λατινικά. Για τη συνάφεια των αρχαίων ελληνικών με τα λατινικά αντιγράφω τελειώνοντας ένα απόσπασμα από το βιβλίο του Ι.Ν. Καζάζη, Αρχαιοελληνικός Πεζός Λόγος. Προλεγόμενα στην τέχνη της γραφής του, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1992. «...Η πρωιμότερη δανειοδότηση της λατινικής γλώσσας από την ελληνική με στοιχεία που αναφέρονται στη θρησκεία, τη ναυτιλία και την καλλιέργεια της ελιάς κατέστη δυνατή μέσα από την ετρουσκική και τις ιταλιωτικές γλώσσες. Στη διάδοση του ελληνικού λεξιλογίου συνέβαλαν όλα τα στρώματα του πληθυσμού, από τα κατώτερα και λαϊκά ως το ανώτερο αριστοκρατικό, για το οποίο η γνώση της ελληνικής αποτέλεσε ταξικό σύμβολο, ό,τι ήταν, στα νεότερα χρόνια, η γαλλική γλώσσα για τη ρωσική και τη γερμανική αριστοκρατία. Οι μορφωμένοι Ρωμαίοι ήξεραν να γράφουν και την ελληνική, την οποία τη διδάσκονταν στο σχολείο. Αν η πρώτη επέκταση του ελληνικού πολιτισμού στα όρια της τότε οικουμένης οφείλεται στον Μ. Αλέξανδρο, η δεύτερη, διαρκέστερη και πλουσιότερη σε αποτελέσματα, πρέπει να πιστωθεί στη ρωμαϊκή επικυριαρχία, η οποία υιοθέτησε την ελληνική κληρονομιά των παρηκμασμένων κρατών των Επιγόνων. Με την ανάλυση της γραμματολογικής πλευράς του φαινομένου καταπιάστηκε με ιδιαίτερο ζήλο η φιλολογία του εικοστού αιώνα (ιδιαίτερα η μεταπολεμική) και έχει σήμερα τεκμηριωθεί ασφαλέστερα και με συγκλονιστικές λεπτομέρειες η παλιότερη γενικόλογη διαπίστωση, ότι δηλαδή με την πνευματική κατάκτηση του κατακτητή γεννήθηκε μια νέα εθνική λογοτεχνία (σε γλώσσα ρωμαϊκή και με χαρακτήρες δικούς της), η οποία προστέθηκε στη σωζόμενη ΑΕ παραγωγή ως οργανικό υποσύνολό της, και με έναν όγκο ίσον προς το ένα δέκατο περίπου εκείνης. Γιατί μέσα από τη θυγατρική λογοτεχνία, δεν ανακόπηκε, αλλά συνεχίστηκε και ολοκληρώθηκε ουσιαστικά η μητρική λογοτεχνική παράδοση.

Είναι χαρακτηριστικό και καθόλα τυπικό ότι το αρχαϊκό έπος ενός Ομήρου, με σηματικότερον ενδιάμεσο σταθμό το ελληνιστικό έπος του Απολλωνίου Ροδίου, τελειώνει και τελειώνεται με τον Βιργίλιο. Με ανάλογο τρόπο, συμπληρώνονται και κάποια από τα χαίνοντα και γριφώδη κενά της ΑΕ: λ.χ. μόνο μέσω του Προπέρτιου και των άλλων Ρωμαίων ελεγειακών ποιητών παίρνουμε σήμερα μια ιδέα για την ελληνική «υποκειμενική ελεγεία», ένα είδος παντελώς αμάρτυρο στις ελληνικές πηγές, αν εξαιρεθεί ένα μικροσκοπικό παπυρικό σπάραγμα που δημοσιεύθηκε εντελώς πρόσφατα. Σημαντικά είναι και τα ιστορικά έργα που συγγράφονται στη Ρώμη και από Ρωμαίους, ελληνιστί.

Η χρηστική γλώσσα, ο λεγόμενος sermo urbanus, βρίθει από ελληνισμούς, όπως μαρτυρεί η επιστολική γλώσσα του Κικέρωνα. Το κύρος της ελληνικής στη Ρώμη είναι μέγα...».

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Μ. Πασχάλης - Γ. Σαββαντίδης, Λατινικά Λυκείου, Αθήνα xx.

Gavin Betts, Latin, London 1992.

Αχ. Τζαρτζάνου, Λατινική Γραμματική, ΟΕΔΒ, Αθήναι 1974.

B.L. Gildersleeve - G. Lodge, Latin Grammar, New York 1968.

Σπ.Κ. Σακελλαρόπουλου, Λατινική Γραμματική, Αθήνα 1927.

Θ.Α. Κακριδή, Γραμματική της Λατινικής Γλώσσης, Βιβλιοπωλείων της «Εστίας», Αθήνα xx.

Αθ. Γιαγκόπουλου, Συντακτικό της λατινικής γλώσσας, Θεσσαλονίκη 1974.

Α. Καριπίδη - Ε. Μαντουλίδη, Λατινικόν Συντακτικόν και 92 θέματα, Θεσσαλονίκη 1972.

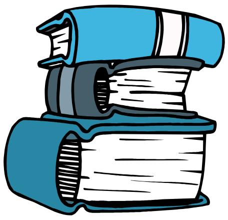
Θ. Μαυρόπουλου, Συντακτικόν του λατινικού πεζού λόγου. Θεωρία - ασκήσεις, εκδ. Καραγιάννη, Θεσσαλονίκη 1970.

Κ.Γ. Ντούρου, Λατινικά Λυκείου, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1997.

Ευστρ. Δ. Τσακαλώτου, Λατινοελληνικόν λεξικόν, Αθήναι xx.

H.J. Rose, Ιστορία της Λατινικής Λογοτεχνίας μετ. Κ.Χ. Γρόλλιου, ΜΙΕΤ, Αθήνα 1978.

Ι.Ν. Καζάζης, Αρχαιοελληνικός Πεζός Λόγος. Προλεγόμενα στην τέχνη της γραφής του, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1992.



# ΤΟ ΥΦΟΣ

Του **Δ. Φαρμάκη**, Φιλόλογου

## Τα είδη του ύφους

### Α. Γενικά

#### 1. Ορισμός

Ύφος είναι ο ιδιαίτερος τρόπος έκφρασης του συγγραφέα, ο τρόπος που εκφράζει τις σκέψεις και τα συναισθήματά του. Κάθε συγγραφέας δημιουργεί το δικό του ύφος, το οποίο είναι άμεση συνάρτηση της φυσιογνωμίας και του πνεύματός του.

* Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το λογοτεχνικό ύφος, δε θα μας απασχολήσει το ύφος επιστημονικών κειμένων, εγγράφων, ιδιωτικών επιστολών κ.τ.λ.

**Σχηματική παράσταση**
**ειδών και χαρακτηριστικών ύφους**

**1.Απλό** → συντομία, φυσικότητα, αυθορμητισμός

**2.Γλαφυρό** → χάρη, λεπτότητα, λαμπρότητα

**3.Υψηλό ύφος** → ενεργητικότητα, σφοδρότητα, μεγαλοπρέπεια

**4.Μικτό ύφος** Εναλλαγή και των τριών ειδών ύφους

#### 2. Στοιχεία του ύφους

Συμπληρώνοντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να ορίσουμε τα στοιχεία εκείνα που συνιστούν το ύφος:

α) από άποψη περιεχομένου, τα νοήματα, τα συναισθήματα και οι εικόνες

β) από άποψη μορφής, το λεξιλογικό πλαίσιο του κειμένου, η σύνταξη και ο τρόπος σύνδεσης των νοημάτων και τα σχήματα λόγου.

Το νόημα του κειμένου πρέπει να διακρίνεται από αλήθεια, ακρίβεια, σαφήνεια και χάρη.

Με την εικόνα εννοούμε την αισθητοποίηση μιας έννοιας και μπορούμε να πούμε ότι τις επιτυχημένες εικόνες τις διακρίνει ακρίβεια και αναλογία. Η εικόνα, όταν είναι παραστατική, δίνει χρώμα και ζωηρότητα στο λόγο.

Συναίσθηση είναι η κίνηση της ψυχής και η διάθεσή της για ένα αντικείμενο υλικό ή αφηρημένο. Χαρακτηριστικά των συναισθημάτων είναι η φυσικότητα, η λεπτότητα και η ευγένειά τους.

Όσον αφορά τη μορφή, εξετάζοντας τα λεξιλογικά πλαίσια στα οποία κινείται ο συγγραφέας, πρέπει να προσέξουμε αν χρησιμοποιείται πλούτος λέξεων, λέξεις με ακρίβεια και σαφήνεια, λέξεις λόγιες ή καθημερινές.

Εξετάζοντας τη σύνταξη προσέχουμε την παρατακτική ή υποτακτική σύνδεση και τον τρόπο πλοκής των λέξεων.

Τέλος, χρειάζεται να επιμείνουμε στα σχήματα λόγου και στα τεχνικά μέσα που χρησιμοποιεί (αφήγηση, περιγραφή, διάλογος, μονόλογος) και να τα αξιοποιήσουμε στον προσδιορισμό του ύφους.

#### 3. Αρετές και σφάλματα του ύφους

Αρετές του ύφους είναι: σαφήνεια (διαύγεια στην έκφραση), ορθότητα (λέξεις που ταιριάζουν στο πνεύμα της συγγραφής), κυριολεξία, ακρίβεια, φυσικότητα (αβίαστη έκφραση), ευγένεια (ύφος ιδεών), ευπρέπεια (αρμονία περιεχομένου και μορφής), ποικιλία (αποφυγή μονοτονίας), αρμονία (ευχάριστο ακουστικό αίσθημα και ρυθμός).

Σφάλματα του ύφους είναι: ασάφεια (σκοτεινότητα), ιδιωματισμός (νεολογισμοί, εκχυδαϊσμός της γλώσσας), αναχρονισμός (απόδοση ιδεών και συνηθειών σε ανθρώπους μιας εποχής, κατά την οποία αυτά ήταν άγνωστα, π.χ. η χριστιανική ψυχή του Αριστείδη), εκφραστική ανακρίβεια, περιττολογία, επιτήδευση (στόμφος), χυδαιολογία και αγένεια ιδεών, μονοτονία, κακοφωνία.

### 4. Στυλίστες του ύφους

Οι καλοί συγγραφείς δημιουργούν ύφος με τη δική τους ιδιομορφία, προσωπικό ύφος που τους ξεχωρίζει από τους άλλους. Τέτοιοι συγγραφείς ξεχωρίζουν με τον όρο στυλίστες, μερικοί απ' αυτούς είναι ο Κάλβος, ο Σολωμός, ο Παλαμάς, ο Βαλαωρίτης, ο Καβάφης, ο Παπαδιαμάντης, ο Σεφέρης, Ελύτης κ.ά.

## Β. Είδη ύφους

Το έντονο προσωπικό στοιχείο στο ύφος μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως υπάρχουν τόσα είδη ύφους όσοι είναι και οι συγγραφείς. Οι περισσότεροι τεχνοκριτικοί, ωστόσο, λειτουργώντας αφαιρετικά προχωρούν σε μια συμβατική και γενική κατηγοριοποίηση, κατά την οποία διακρίνουν τέσσερα είδη ύφους: το απλό, το μέσο ή γλαφυρό, το υψηλό και το μικτό ύφος.

**1. Το απλό ή ισχνό ύφος** εκφράζει σκέψεις, συναισθήματα και εικόνες με φυσικότητα και αυθορμητισμό. Πλησιάζει την καθημερινή ομιλία στο λεκτικό, είναι φειδωλό στα σχήματα λόγου και αποφεύγεται η περίπλοκη υπόταξη των νοημάτων. Ευχαριστεί και προκαλεί το ενδιαφέρον με την ακρίβεια και την ορθότητα των εκφράσεων, την κυριολεξία και τη συντομία του. Συχνά με κοφτό και περιεκτικό ύφος καταφέρνει να αποδίδει πλούτο σκέψεων και ιδεών με χάρη, αλλά με λίγα λόγια. Χαρακτηριστικοί για το σύντομο και λιτό τους ύφος είναι ο στίχοι του Σολωμού από το Β Σχεδίασμα των Ελεύθερων Πολιορκημένων:

*Άκρα του τάφου σιωπή στον κάμπο βασιλεύει*
*Λαλεί πουλί, παίρνει σπυρί, κι η μάνα το ζηλεύει*

Με συντομία απεικονίζονται τα παθήματα των αγωνιστών του Μεσολογγίου. Συχνά το απλό ύφος μπορεί να παρεκτραπεί σε κάποια μειονεκτήματα, όπως είναι η αμέλεια του ύφους, η σκοτεινότητα από την υπερβολική συντομία, η ξηρότητα από την έλλειψη σχημάτων λόγου και η ψυχρότητα από τη συναισθηματική αφυδάτωση.

**2. Το μέσο ή γλαφυρό ύφος** στην έκφραση συναισθημάτων και ιδεών βρίσκεται στη μέση μεταξύ απλότητας και υψηλού ύφους. Χαρακτηριστικά του γνωρίσματατα είναι ο πλούσιος συναισθηματικός κόσμος, ωραίες ιδέες, λογικά νοήματα, θελκτικές εικόνες, εξαιρετικοί χαρακτήρες και φυσιογνωμίες. Απαιτούνται λέξεις και φράσεις αρμονικές, σύμμετρες, σχήματα λόγου λειτουργικά χωρίς επιτηδεύσεις και ακρότητες. Ο λόγος έχει χάρη, λεπτότητα συναισθημάτων, λαμπρότητα ιδεών και τα νοήματα είναι πλούσια και εκφράζονται με πνευματώδη τρόπο. Στο Β Σχεδίασμα των Ελεύθερων Πολιορκημένων διακρίνουμε μια ιδιαίτερη λαμπρότητα και λεπτή αισθητική συγκίνηση:

*Στην κεφαλή σου κρέμεται ο ήλιος μαγεμένος·*
*Παλικαρά και μορφονιέ, γεια σου, Καλέ χαρά σου!*
*Άκου! νησιά, στεριές της γης, έμαθαν τ' όνομα σου*

Χάρη διακρίνει την περιγραφή του Φωτεινού του Αριστοτέλη Βαλαωρίτη:

*Κάτασπρο το κεφάλι του, πυκνό, μακρύ το γένι*
*στα λιοκαμένα στήθια του αφράτο κατεβαίνει*
*σαν ανθισμένη αγράμπελη που πέφτει από κοτρόνι·*
*Στα αποσπάσματα του Παλαμά από το Δωδεκάλογο του Γύφτου υπάρχει ευφυία στον τρόπο έκφρασης:*
*σαν το δρόμο του ήλιου· γέρνεις· όμως*
*το πρωί για σε δε θα γυρίσει*
*λεπτότητα συναισθημάτων και πλούτος ιδεών:*
*Όσο να σε λυπηθεί*
*της αγάπης ο Θεός*
*και να ξημερώσει μιαν αυγή*
*και να σε καλέσει ο λυτρωμός*
*ω Ψυχή παραδαρμένη από το κρίμα!*

και:

*θα αιστανθείς να σου φυτρώσουν, ω χαρά!*
*τα φτερά,*
*τα φτερά τα πρωτινά σου τα μεγάλα*

Ακόμη πρέπει να θεωρηθεί πλούσια έκφραση εκείνη που δημιουργεί ολόκληρη και εντυπωτική εικόνα:

*'Εκοίταα, κι ήτανε μακριά ακόμη τ' ακρογιάλι*
*αστροπελέκι μου καλό, για ξαναφέξε πάλι!*
*Τρία αστροπελέκια επέσανε, ένα ξοπίσω στ' άλλο*
(Σολωμός)

Τα σφάλματα που κάποτε παρουσιάζονται στο γλαφυρό ύφος είναι η μονοτονία από την ομοιομορφία, η επιτήδευση από την υπερβολική χρήση σχημάτων λόγου και ο ρητορισμός.

**3. Το υψηλό ύφος** ξεχωρίζει για τη μεγαλοπρέπεια, το μεγαλείο του, τη συναισθηματική του δύναμη και την έξαρση των ιδεών του. Το υψηλό ύφος αφορμάται από τα αισθητά πράγματα, τα οποία τα παρουσιάζει μεγαλοπρεπή και έντονα και προχωρεί στα νοητά με τολμηρές σκέψεις και νοήματα συναρπαστικά γεμάτα έξαψη και ορμή. Συχνά παίρνει τη μορφή του τραγικού, του δραματικού, του μεγαλειώδους. Απαντά συχνά το πάθος και η ενάργεια των εικόνων:

*Κρέμονται υπό τους πόδας του*
*πάντα τα έθνη, ως κρέμεται*
*Βροχή έτι εναέριος*
*εν ῳ κοιμώνται οι ανέμοι*
*της οικουμένης*

(Κάλβος, *Εις Αγαρηνούς*)

Χαρακτηριστικό γνώρισμα του υψηλού ύφους είναι η σφοδρότητα:

*Προδότες οι Τρικούπηδες. Κρεμάλα!*
*Κι οι Ψυχάρηδες; Γιούχα! Πλερωμένοι*
*Να η Ελλάδα! Αρσακιώτισσα δασκάλα*
(Παλαμάς, *Σατιρικά Γυμνάσματα*)

Ελαττώματα του υψηλού ύφους μπορεί να είναι:

α) η ψυχρότητα από έλλειψη συναισθηματικού τόνου και ζωηρών εικόνων.

β) ο στόμφος από υπερβολική χρησιμοποίηση μέσων λεκτικών, συναισθημάτων.

γ) ογκώδες λεκτικό χωρίς σκοπιμότητα.

Το υψηλό ύφος πρέπει να διαθέτει έκφραση απλή, σύντομη και διαυγή.

**4. Μικτό ύφος** είναι το ύφος που διαφέρει από σημείο σε σημείο και παρουσιάζεται άλλοτε απλό, άλλοτε γλαφυρό, άλλοτε υψηλό. Είναι το πιο συνηθισμένο ύφος στους περισσότερους συγγραφείς λογοτεχνικών κειμένων, αφού επιδιώκεται ποικιλία ύφους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μικτού ύφους είναι το διήγημα του Παπαδιαμάντη *"Ο Αλιβάνιστος"* (σελ. 170 Κ.Ν.Λ. Β Λυκείου ΟΕΔΒ). Γραμμένο, όπως και όλα τα διηγήματα του Παπαδιαμάντη, σε γλώσσα μωσαϊκό από λόγιες εκφράσεις, αρχαϊσμούς, τύπους από συναξάρια, λέξεις και βαρβαρισμούς της καθημερινότητας υφασμένα πάνω στο τυπικό της καθαρεύουσας. Το ύφος του συγγραφέα είναι άλλοτε γλαφυρό, γεμάτο χάρη: *"Αι τελευταίαι ακτίνες του ηλίου εχρύσωναν ακόμη τας δύο ράχεις, ένθεν και ένθεν της κοιλάδος.* Άλλοτε γίνεται παιχνιδιάρικο: *"Σ' έσκιαξα, θεία Μολώτα! .... Έθεσε την δεξιάν χείρα εντός του τυλιγμένου πανίου, το οποίο εκράτει, έλαβεν ένα μαύρον πράγμα, και θέλων να παίξη το έρριψεν εις την ποδιάν της Μολώτας, ήτις εκάθητο ακόμη επί της πέτρας".* Σε άλλα σημεία γίνεται μεγαλοπρεπές: *"Ο μπάρμπα-Κόλιας ήθελε να έλθῃ, αλλ' εντρέπετο. Επαραξενεύετο πολύ, θα επεθύμει να τον απήγου δια της βίας. Ο Μπαρέκος, ως να είχε εισδύσει εις τα ενδόμυχα της ψυχής του, έκραξε τους άλλους δύο βοσκούς πλησίον του".* Πρόκειται για τη σκηνή με την οποία αρχίζει η επανένταξη ενός τραγικού προσώπου στο σώμα της εκκλησίας και της κοινωνίας. Η απλόχερη ανθρωπιά της εικόνας σ' έναν αναχωρητή και αρνητή της ζωής, που παλιότερα γεύτηκε την έλλειψη αγάπης και την κοινωνική απόρριψη, προκαλεί υψηλή αισθητική συγκίνηση ... .

◆

# «ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΣ ΣΤΑΘΜΟΣ»

Του **Γ. Κατσή, Φιλολόγου**

## ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΟΙΗΜΑ

*23-4-1941:* Η βασιλική κυβέρνηση με το νέο Πρωθυπουργό Εμ. Τσουδερό, αναχωρεί αρχικά για την Κρήτη και από κει (31-5-1941) για τη Μέση Ανατολή (Κάιρο) ακολουθώντας τον Αγγλικό στρατό. Παραμένουν μέχρι το Σεπτέμβρη του 1941 (5-9.1941: Ο πρωθυπουργός και κάποιοι υπουργοί ακολουθούν το βασιλιά (μετά από υπόδειξη των Άγγλων) στο Λονδίνο για περισσότερη ασφάλεια.

*3-3-1943:* Η κυβέρνηση και ο βασιλιάς επιστρέφουν στο Κάιρο.

ΚΑΤΟΧΙΚΕΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΘΗΝΑΣ:
(Κουΐνσλιγκ).

α) στρατηγός Τσολάκογλου (27-4-41......19-11-42)
β) γιατρός Λογοθετόπουλος (19-11-42......7-4-43)
γ) πολιτευτής Ι. Ράλλης (7-4-43......12-10-44)

### ΣΥΜΦΩΝΙΕΣ ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ:

**Α) *Συμφωνία Λιβάνου:*** Αποφασίστηκε ο σχηματισμός κυβέρνησης εθνικής ενότητας με πρωθυπουργό το Γ. Παπανδρέου με σκοπό το συντονισμό κοινής δράσης στην κατεχόμενη Ελλάδα *3-9-1944 η ΠΕΤΑ* συμμετέχει στην κυβέρνηση με 6 υπουργούς (Α. Σβώλος, Γ. Ζεύγος, Μ. Πορφυρογένης, Η. Τσιριμώκος, Ν. Ασκούτσης, Α. Αγγελόπουλος).

ΠΕΤΑ: Ιδρύθηκε στις 10-3-1944. (Πολιτική Επιτροπή Εθνικής Απελευθέρωσης). Είναι η κυβέρνηση "των βουνών", του ΕΑΜ με πρόεδρο τον καθηγητή Αλέξ. Σβώλο.

*16-9-1944:* Άφιξη της κυβέρνησης εθνικής ενότητας (Γ. Παπανδρέου) στην Ιταλία.

**Β) *Συμφωνία Καζέρτας*** *26-9-1944:* Μια συμφωνία ανάμεσα στο ΕΑΜ (Σαράφης, Δεσποτόπουλος) και τον ΕΔΕΣ (Ν. Ζέρβας), που αναγνωρίζουν ως αρχιστράτηγο των δυνάμεων στην Ελλάδα τον Εγγλέζο στρατηγό Σκόμπυ. Παράλληλα απαγορεύτηκε στον ΕΛΑΣ να μπει και να απελευθερώσει την Αθήνα απ' τους αποχωρούντες Γερμανούς.

*12-10-1944:* Οι Γερμανοί αποχωρούν από την Αθήνα (μέχρι 3-11 από όλη την Ελλάδα).

*18-10-1944:* Αποβιβάζεται στον Πειραιά η εξόριστη κυβέρνηση μαζί με την Εγγλέζικη συνοδεία του Σκόμπυ, χωρίς όμως το βασιλιά, που δεν ήρθε σ' εκείνη τη φάση. Το ακανθώδες πρόβλημα του αφοπλισμού *όλων* των ανταρτικών στρατιωτικών σωμάτων είναι το κυρίαρχο πρόβλημα του τόπου. Ο Σκόμπυ (μαζί του και ο Παπανδρέου) αντιδρά στον αφοπλισμό της "Ορεινής Ταξιαρχίας" και του "Ιερού Λόχου".

*Ορεινή Ταξιαρχία:* Δύναμη 3.377 ανδρών με διοικητή το συνταγματάρχη Θ. Τσακαλώτο, που συγκροτήθηκε στη Μ. Ανατολή, από ακραιφνή βασιλικά και τεταρτοαυγουστιανά στοιχεία. Στις *21-9-1943* μπήκε (αποβιβάστηκε) στο Ρίμινι της Ιταλίας, κατά τη συμμαχική απόβαση και συνθηκολόγηση των Ιταλών (ταξιαρχία Ρίμινι).

*Ιερός Λόχος:* Ιδιότυπη μονάδα, που αποτελούνταν αποκλειστικά και μόνο από αξιωματικούς (αριθμούσε περί τα 1.000 άτομα). Πήρε μέρος στη μάχη του «Ελ Αλαμέιν». Σταδιακά μετατράπηκε σε μονάδα πιστή στο βασιλιά και τους Εγγλέζους.

*ΔΕΚΕΜΒΡΙΑΝΑ: 2-12-1943:* Παραιτούνται οι 6 Εαμικοί υπουργοί διαμαρτυρόμενοι για την ωμή επέμβαση των Άγγλων στα εσωτερικά της Ελλάδας.

*3-12-1944:* Διαδήλωση του ΕΑΜ στο Σύνταγμα καταλήγει σε αιματοχυσία. (Απολογισμός 28 νεκροί και 100 τραυματίες. Πρώτη πράξη του εμφυλίου).

## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΠΟΙΗΜΑΤΟΣ

### Κυριαρχεί ο εξομολογητικός - προφητικός λόγος

***Α ΕΝΟΤΗΤΑ:*** στίχοι (1-23): Μοτίβο φεγγαριού - Εικόνα αποστροφής (νόστος). Αναφορά στο φεγγάρι γίνεται στους στίχους (7, 9, 20, 23 και 96).

*Τελειωμένη μέρα:* (Εδώ αναφέρεται με την έννοια του χρονικού διαστήματος). Στίχος 12: Τον ανησυχεί η

επιστροφή (ατμόσφαιρα εσωτερικού μονόλογου).
Μπορούμε να συνδέσουμε το στίχο 12 με το φεγγάρι (ξεπέρασε τα σύννεφα και...).

Η επιστροφή για πολλούς είναι εξόφληση χρέους (παρήχηση λ και ρ).

Υποφώσκει η ευτέλεια της συναλλαγής (ρεβάνς) και το ήθος των συναλλασσομένων.

Μορφή της *σελήνης* - *συμβόλου:* (εικόνα συγκρατημένης μελαγχολίας).
Αντίθεση των στίχων 1 και 13: (κι όμως αυτή η βραδιά - επιστροφή μου αρέσει).
Χιαστό σχήμα ανάμεσα στους στίχους 8 και 9 (τόπος - φωτισμός - φωτισμός - τόπος).

*Στίχος 23:* Μοτίβο της απάτης (νέος Δούρειος Ίππος - η επικείμενη επιστροφή).

***Β ΕΝΟΤΗΤΑ:*** στίχοι 24-63) Περιπλάνηση - Διασπορά - Φιλοσοφικός μονόλογος. Εδώ κυριαρχεί το α πληθυντικό πρόσωπο (από πού ερχόμαστε - πού πάμε).
Σεφερική φιλοσοφική ανθρωπολογία - Περίσκεψη - Προβληματισμός (τι είμαστε;).

*Στίχος 30:* Φόβος και ανησυχία για τη “διαφθορά” του συντρόφου από την πατρίδα. Υπάρχει κίνδυνος να εξαφανιστούμε σαν το βασίλειο της “Κομμαγηνής”.

(Υποδουλώθηκε το 638 μ.Χ. στους Άραβες και έχασε τελείως την ελληνικότητά του).

Οι μαραγκιασμένες ψυχές είναι οι εγκλωβισμένοι πολιτικοί (σαν το πουλί).

Πολιτικοί τυχοδιώκτες - επιβουλεύονται το “αίμα” των άλλων - αγωνιστών)

*Πληγή:* Ο καθένας με την ευθύνη του (μικρή ή μεγάλη - ανάλογη με το πόστο του).

Κλιμάκωση ευθύνης - νέμεση - μοίρα. Κακές συνήθειες (άλλοι φταίνε).

Ιδιοτέλεια (σφύριγμα του κέρδους). Δόλος - απάτη (πολιτικές μηχανορραφίες).

Έντονη χρήση της ΜΕΤΑΦΟΡΆΣ: *Χόρτο* (φυτό: έχει μόνο θρεπτική ιδιότητα - επιβίωση).

*Θέρος:* (θέρος να γλιτώσει - ξεγλιστρήσει απ’ την ευθύνη με πλάγια μέσα).

***Γ ΕΝΟΤΗΤΑ:*** στίχοι (64-88). Αφρικανικές εμπειρίες - Αιχμαλωσία - Προσφυγιά.

Συναισθήματα μοναξιάς του πρόσφυγα - αισμαλώτου.

Ο άνθρωπος πάνω στο κατάστρωμα κατάντησε πραμάτεια (αιχμάλωτοι για λύτρα).

Υπάρχει διέξοδος: Μήπως η φυγή σε εξωτικές - απολίτιστες χώρες;

*Στίχος 72:* Συνεχίζεται με τους «αγάπανθους» η εικόνα της φυγής.

*Στίχος 73:* Ο άνθρωπος *χόρτο* - γίνεται τόπος (εξορία πολιτικών), *πεύκο* (τον καίνε) τρένα - στρατόπεδα συγκέντρωσης - μεταφορά αιχμαλώτων.

Τα παραμύθια (δόλος, απάτη, Κομμαγηνή, Πρωτέας) και οι παραβολές (άνθρωπος - χόρτο, τόπος - πεύκο, δέντρα, φίλοι) τ’ ακούς γλυκότερα - η φρίκη δεν κουβεντιάζεται.

***Δ ΕΝΟΤΗΤΑ:*** Στίχοι (89-95) Σκεπτικισμός - Προφητεία για τις χαμένες θυσίες.

Εδώ αντίθετα με τις μαραγκιασμένες ψυχές έχουμε την ηρωολογία (Μιχάλης).

Ο Μιχάλης ίσως να αντιπροσωπεύει την ηρωϊκή γενιά της Αντίστασης.

Συσκοτισμένη πολιτεία: (πολεμικά ταραγμένη αλλά και πολιτικά αβέβαιη).

*Μηδενιστική ερμηνεία* ίσως τα λόγια του Μιχάλη (πηγαίνουμε στο σκοτάδι - πουθενά).

***Ε ΕΝΟΤΗΤΑ:*** Στίχος 96 Κατακλειδα. Κλείνει με τη μορφή του κύκλου (Λίγες...).

Έχουμε όμως μια διαφοροποίηση στο ρήμα αρέσαν - αρέσουν: μήπως έχουν λιγοστέψει ακόμα περισσότερο (απαισιοδοξία) οι φεγγαρόφωτες νύχτες μέσα του;

Το ποίημα αναφέρεται σε οριακές στιγμές της ανθρώπινης προσωπικότητας.

Ο άνθρωπος όντας (απ’ τη φύση;) μαλακός - ευμετάβολος σαν χόρτο, αλλοτριώνεται και διαφθείρεται μέσα στον πόλεμο. Τι γίνεται όμως με τη λήξη του πολέμου;

Ο ποιητής μετά την περιδιάβαση που έκανε στο παρελθόν επανέρχεται στο παρόν.

Επίκειται τώρα η επιστροφή και η κάθε είδους πληρωμή (άλλος παίρνει - άλλος δίνει).